# Resolución de problemas de cónicas con el apoyo de la geometría dinámica

**David Benítez Mojica**
*Profesor Universidad Autónoma de Coahuila*
*Coahuila, México*
dbenitez@mail.uadec.mx

**Resumen**

En el presente estudio se documentan las características que tiene la resolución de problemas, de búsqueda de relaciones, con el uso de geometría dinámica. Un problema sirve de plataforma para que los estudiantes visualicen, construyen conjeturas y utilicen argumentos para validarlas.

## 1. Presentación de la actividad

Considera una circunferencia con centro en $O$ y radio arbitrario. Sea $P$ un punto en el plano y $R$ un punto sobre la circunferencia. Se traza el segmento $PR$ y la recta que pasa por $O$ y $R$. Se construye la mediatriz del segmento $PR$. Sea $S$ el punto de intersección del segmento $PR$ y la recta que pasa por los puntos $O$ y $R$. ¿Cuál es el lugar geométrico de $S$ cuando $R$ se mueve alrededor de la circunferencia?

## 2. Análisis de la actividad

La comprensión del problema, que se plantea en un contexto puramente matemático, implica identificar las variables. En ese sentido, el resolutor debe observar que la variable independiente es la posición del punto P, y la forma que tiene el lugar geométrico que deja $S$ cuando $R$ se mueve sobre la circunferencia. El problema consiste en identificar la variación de la forma de este lugar geométrico respecto a las distintas ubicaciones del punto $P$ (interior, exterior o frontera).

El uso de software coadyuva considerablemente en la solución del problema. Es posible hacer una construcción en las condiciones estipuladas en el enunciado, empleando algunas de las características notables del software como el arrastre, la traza y el lugar geométrico. En tal contexto, se pueden emprender las siguientes actividades:

- Se deja fijo el punto $P$ y se arrastra el punto $R$.
- Se construye la traza (o el lugar geométrico) del punto $S$ cuando $R$ se mueve sobre la circunferencia.
- Cuando el estudiante construye la traza o el lugar geométrico que deja el punto $S$, debe identificar la forma del lugar que resulte. Posteriormente, debe argumentar por qué la solución es una elipse, circunferencia, hipérbola o parábola.

- Se puede analizar qué ocurre con el lugar geométrico para casos especiales del punto $P$. Por ejemplo, explorar el lugar geométrico que deja $S$ cuando $P$ está en el centro de la circunferencia, sobre la circunferencia o en el exterior de ésta.

El manejo de Cabri en la solución de problemas, ayuda al estudiante a sustentar sus afirmaciones, vía el uso de diferentes recursos matemáticos. Desde esta perspectiva, la actividad intenta establecer un "puente "entre la visualización y la argumentación de las ideas matemáticas.

Los pre-requisitos: definición de mediatriz, definición de cada una de las cónicas, criterios de congruencia de triángulos. Si el estudiante quiso recurrir a Cabri en la solución del problema, debía manejar las herramientas básicas del software como el arrastre, la construcción de trazas y lugares geométricos, la verificación de propiedades, la medición, y el uso de la calculadora que tiene el software.

Los procesos del pensamiento matemático: la visualización, la particularización, el estudio de casos especiales, la construcción de conjeturas, la argumentación y la demostración.

Contenidos involucrados en la solución del problema: la definición de las cónicas, la variación desde la perspectiva geométrica.

# 3. El contexto de las entrevistas

Se presentó a los estudiantes una construcción y se realizó la entrevista, de acuerdo con unas preguntas previamente establecidas.

De grupo que cursó geometría euclidiana, en la carrera de Matemáticas aplicadas (20 de estudiantes en total), se presentaron seis voluntarios para una entrevista; se seleccionó a tres de ellos, luego de revisar los reportes escritos y las videograbaciones de clase. La elección se concretó tomando en cuenta los siguientes criterios: un estudiante que resuelva los problemas con lápiz y papel, y use la tecnología para comprobar las soluciones; uno que obtenga parte de la solución con lápiz y papel y el complemento con tecnología y uno más que prefiriera sustentar sus ideas matemáticas con el apoyo de ésta.

El entrevistados expuso el problema en el pizarrón y los estudiantes iniciaron la solución. Las entrevistas se realizaron por separado, en sesiones de 90 minutos cada una, aproximadamente.

Cada sesión fue video-grabada. Los alumnos podían utilizar el pizarrón, lápiz y papel o Cabri. La computadora dispuesta para las entrevistas se conectó a un cañón para que la cámara pudiera filmar el proceso de solución. El estudiante eligió las herramientas a utilizar.

En la entrevista se siguió un protocolo previamente preparado, con base en la solución de la actividad (ver anexos) y en el conocimiento de algunas características del pensamiento matemático de los participantes, como la argumentación de las ideas matemáticas, la búsqueda de patrones, la construcción de conjeturas y el manejo de la tecnología para la resolución de problemas.

# 4. El análisis de las entrevistas

## 4.1. Entrevista a Perla

Este apartado corresponde a la solución que, desarrolló Perla acerca del problema planteado en la entrevista. La alumna fue seleccionada porque en las tres primeras actividades, que integran el presente estudio, respaldó, generalmente, sus argumentos matemáticos con el uso del lápiz y del papel, complementándolos con el uso de la tecnología.

Perla se abocó en sus reflexiones iniciales a entender el problema; construyó sobre el pizarrón una gráfica semejante a la siguiente:

La alumna pone en práctica la estrategia heurística de hacer los trazos que indica el enunciado del problema, para posiciones específicas del punto $R$. Durante el proceso dibujó una circunferencia y dos puntos: $O$ (centro) y un punto $P$ en el interior del círculo. Decidió dejar fijos este par de puntos. Dibujó un punto $R$. Construyó el punto $S$ que resulta de la intersección entre la recta $OR$ y la mediatriz al segmento $PR$. Dicha operación la repitió cinco veces para diferentes ubicaciones del punto R. Dibujó una curva que une los puntos de intersección de la mediatriz con la recta que pasa por el centro de la circunferencia. A continuación se presenta interacción con el entrevistador:

*Entrevistador: ¿Qué estás haciendo?*
*Perla: Estoy cruzando más o menos cómo quedaría el lugar geométrico; quiero ver qué pasaría... ¿Es una elipse?*
*Entrevistador: ¿Me estás preguntando? O ¿Estás afirmando?*
*Perla: Estoy afirmando*
*Entrevistador: ¿Cómo podemos estar seguros de que eso es una elipse? Porque ya lo dijiste muy segura.*
*Perla: Pues... porque aparenta*
*Entrevistador: Aparenta ser una elipse.*

Hasta ese momento la estudiante había entendido el problema. En la etapa inicial construyó un bosquejo gráfico y percibió que el lugar geométrico buscado era una elipse, aunque no parecía estar muy convencida. En esta primera aproximación, la estudiante empleó las ideas clave del problema reflexionó sobre las diferentes condiciones: un punto $R$ móvil; un punto $P$ fijo para tratar de hacer un bosquejo del lugar geométrico, solicitado en el problema. Aquí, la visualización juega un papel central.

El entrevistador le sugirió a Perla que construyera una figura donde no se vieran los trazos auxiliares. La alumna construye la siguiente figura:

En el próximo episodio, el entrevistador la cuestiona sobre la conjetura de que el lugar geométrico que dejó el punto $S$ es una elipse:

*Entrevistador: Entonces lo que se quiere es que tú nos justifiques, si quieres hacer una demostración o lo que quieras hacer, para que nos convenzas que eso es una elipse, ¿Cómo nos puedes convencer que esa curva es una elipse?*
*Perla: Desde cualquier parte que esté $R$ siempre tiene los mismos focos, yo nombraría focos a $O$ y a $P$*
*Entrevistador: Entonces ¿qué se cumple?*
*Perla: Que en cualquier lugar que este $R$, $O$ y $P$ siempre permanecen en el mismo lugar*

*y serían los focos de la elipse.*
*Entrevistador: ¿Qué condición se debe cumplir para que la figura sea una elipse?*
*Perla: De que la distancia $OS$ más la distancia $SP$ es constante.*
*Entrevistador: La distancia $OS$ más $SP$ es constante, y eso ¿Lo puedes probar?*
*Perla: ¿Con medidas?*
*Entrevistador: No, digo demostrar.*
*Perla: ¿Demostrarlo? Así como lo estoy haciendo, ¿no?*
*Entrevistador: Como prefieras.*
*Perla: Sí,*
*Entrevistador: Entonces ¿qué vas a hacer?*
*Perla: Utilizar Cabri.*

Del análisis de este episodio se pueden hacer dos observaciones: Perla conocía la definición de elipse y la pudo incorporar a la solución del problema. La estudiante tiene la creencia de que la demostración de una propiedad geométrica se puede hacer a partir de medidas específicas y en el proceso incorporó, voluntariamente, Cabri como una herramienta de validación de sus ideas.

Perla manejó Cabri para hacer una construcción con las condiciones del enunciado del problema. Posteriormente, dibuja el lugar geométrico del punto $S$ cuando el punto $R$ se mueve alrededor de la circunferencia. A continuación midió los segmentos $OS$, $SP$ y calculó la suma del par de segmentos. Arrastra el punto $R$ y observa que el resultado de la suma es constante.

A continuación se muestran dos gráficas: una fotografía del original (izquierda) y una reconstrucción en Cabri (derecha). La reconstrucción se hizo con medidas diferentes a las usadas originalmente por la alumna. La nueva figura puede ayudar a entender el proceso de solución de Perla.

Haciendo una construcción en Cabri para darle seguimiento a una conjetura El entrevistador desea profundizar en la creencia que tiene Perla sobre la demostración. En el contexto, propicia la siguiente interacción:

*Entrevistador: ¿Y para qué los mediste?*
*Perla: Para ver si es constante y se forma la elipse; para demostrar si es elipse. Y... si es.*
*Entrevistador: ¿Por qué?*
*Perla: Porque aunque mueva la R, la suma de los dos de $OS$ y $PS$ es constante.*
*Entrevistador: ¿ Y dónde estás viendo que es constante?*
*Perla: Aquí (señalando sobre la pantalla el lugar donde realizó la suma)*
*Entrevistador: ¿ Y eso ya es una demostración?*
*Perla: Sí*

El episodio constituye una evidencia más de que Perla usó los recursos y estrategias que tiene el software, para justificar sus ideas matemáticas. Desde el punto de vista de la estudiante, el proceso realizado en Cabri es una demostración.

En otro momento de la entrevista, se le preguntó por el lugar geométrico que deja el punto $S$ cuando $P$ está muy cerca del centro y $R$ se mueve alrededor de la circunferencia. Perla contestó que es una circunferencia y, posteriormente, arrastró el punto $P$ hasta un lugar próximo al punto $O$, como se muestra en la siguiente figura:

Más adelante, se le propuso que imaginara el lugar geométrico de $S$ cuando $P$ está fuera de la circunferencia. Se transcribe el diálogo:

*Entrevistador: Bueno, entonces podría ser elipse o podría ser una circunferencia; ahora te pregunto ¿qué pasa si $P$ ya no está dentro? ¿Qué pasa si $P$ está afuera? ¿Te lo imaginas?*
*Perla: ¿Si $P$ estuviera fuera de la circunferencia?. No.*
*Entrevistador: No, bueno, ¿Qué esperas?*
*Perla: No... ¿Lo hago en Cabri?*
*Entrevistador: Como prefieras.*

Con esta evidencia se concluye que la estudiante visualizó el lugar geométrico solicitado y que no hizo casos particulares para realizar un bosquejo gráfico en el pizarrón. Posteriormente, hizo la construcción en Cabri y a partir de la forma de la gráfica, conjeturó que el lugar geométrico es una hipérbola. Perla dio muestras de manejar la definición de hipérbola y de incorporarla a la solución del problema. En el proceso de justificación de la nueva conjetura, utilizó un procedimiento análogo al caso de la elipse.

Construyó la conjetura que la parábola se genera cuando el punto $P$ está sobre la circunferencia. En este contexto, la alumna lleva el punto $P$ a un lugar cercano de la circunferencia y luego redefine $P$ sobre la circunferencia.

*Entrevistador: Bueno, ahora otra pregunta, esta ya es la final, ya generaste la circunferencia, la elipse, en alguna parte estaría la parábola? ¿Podrías generar la parábola?*
*Perla: ¿Moviendo a $P$ sobre la circunferencia?*
*Entrevistador: ¿Me preguntas?*
*Perla: ¿Puede ser que ahí esté la parábola, no?*
*Entrevistador: Pues a ver...*
*Perla: (Redefine el punto $P$ sobre la elipse)*

Se presenta una fotografía del trabajo de Perla en esta parte de la solución:

En dicha interacción, el uso del Cabri le permitió encontrar que el lugar geométrico que se genera, en este caso es un punto y no una parábola, como estaba esperando. Nuevamente, la alumna usó el Cabri como herramienta de validación o de refutación de sus conjeturas.

## 4.2. Entrevista a Vanesa

En esta etapa se presenta la entrevista que se le realizó a Vanesa. El criterio para seleccionarla se basó en que en las tres primeras actividades, que conforman el estudio, respaldó sus argumentos matemáticos con el uso de la tecnología.

*Entrevistador: ¿Cómo podrías resolver el problema?*
*Vanesa: Viéndolo en computadora*
*Entrevistador: Ah! ¿No lo puedes hacer en el pizarrón?*
*Vanesa: Pues es que sí, pero... al momento en que se muevan los puntos...*
*Entrevistador: ¿Entonces qué vas a usar?*
*Vanesa: Se me hace más fácil en Cabri.*

A diferencia de Perla, Vanesa no aborda el problema haciendo un bosquejo en el pizarrón, sino que emprende directamente la solución en Cabri. En la siguiente figura se puede observar que la alumna usa el software para hacer un bosquejo gráfico del enunciado del problema.

Desde el comienzo del proceso de solución se pudo observar que la alumna entendió el problema. Utilizó la estrategia de dejar la traza del punto $S$; arrastra al punto $R$ y construye la siguiente gráfica:

El entrevistador le pide a la alumna que describa lo que está haciendo:

*Entrevistador: Ya lograste hacer el dibujo; ahora bien ¿qué vas a hacer para contestar la pregunta?*
*Vanesa: Pues primero tratar de que el punto $R$ me deje la marca por donde va pasando cuando yo mueva $Q$, si? Mover antes que nada a $R$, lo muevo alrededor de la circunferencia, entonces pues vemos cómo se forma la elipse.*

Después de que Vanesa logra identificar, visualmente, que el lugar geométrico es una elipse, el entrevistador le pide que justifique su idea:

*Entrevistador:¿Cómo vas a ver si esa curva es una elipse o no?*
*Vanesa: Ver que la suma de las distancias de este segmento que sería $RP$ más la distancia que hay entre $RP$ al momento que yo voy a $Q$, posteriormente $R$ también se está moviendo, pero esa suma tiene que ser constante, si es elipse, y pues tenemos que ver eso, si?*
*Entrevistador: A ver...*
*Vanesa: Al momento que yo muevo a $Q$ tenemos que observar la suma de los segmentos (señala a $CR$ y $RP$) y pues nosotros estamos observando que este dato es constante.*
*Entrevistador: ¿En qué lo estás observando?*
*Vanesa: Al momento que yo muevo $Q$,*
*Entrevistador: Síguelo moviendo.*
*Vanesa: El dato de $RP$ más $RC$ cuando yo muevo $Q$ si es constante, pues se va a mantener si se sigue moviendo*
*Entrevistador: Y ¿sí se mantiene? o ¿no?*
*Vanesa: Sí se está manteniendo, mientras el punto $R$ se mueve sobre la circunferencia se va viendo que la suma de los puntos es constante y pues si tiene que ser una elipse.*
*Entrevistador Bien, ahora otra pregunta, ¿tú podrías hacer una demostración que esto es una elipse?*
*Vanesa: Pues...*
*Entrevistador: A ver, ¿si puedes hacer una demostración?*
*Vanesa: Sí, pero pienso que si podría hacer la demostración pero, pues... ahorita rápido no me imagino cómo tendrá que hacerse, cómo empezarla.*

La gráfica sobre la que estuvo razonando Vanesa es:

En el episodio se observa que Vanesa (al igual que Perla) aplicó la definición de elipse y manejó los recursos del software para justificar su conjetura. En la parte final, se advierte que Vanesa no cree que el trabajo hecho sobre Cabri sea una demostración y que durante la entrevista no pudo hacer la prueba en el pizarrón. Hay que recordar que Perla aseguró que el trabajo realizado en Cabri era una demostración.

En otra parte de la entrevista, Vanesa explora el lugar geométrico cuando el punto P se localiza sobre la circunferencia y en el exterior de ésta. Para el primer caso, realiza, en principio, un dibujo sobre el pizarrón. Se muestra una fotografía de su trabajo:

En la figura anterior se observa que la alumna construye una circunferencia con centro en $C$. Ubica dos puntos $P$ y $Q$ sobre la circunferencia. Trazó un segmento $PQ$, la mediatriz a este segmento y la recta que pasa por $C$ y $Q$. Encontró el punto de intersección $R$ entre la recta mediatriz y la recta que pasa por el centro de la circunferencia. Repitió tal proceso para varias posiciones específicas del punto $Q$. Vanesa llegó a conjeturar que el lugar geométrico del punto $S$ es una parábola.

Como se puede ver en la Figura 10, la construcción que Vanesa realizó en el pizarrón tiene muchos trazos auxiliares. No usó regla o compás para hacer la construcción; sólo un marcador. Fue evidente la falta de precisión en los trazos y el desconocimiento que tiene la alumna del teorema, que dice que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia. Estos tres factores (la cantidad de trazos, la falta de precisión y el desconocimiento de un resultado), propiciaron que Vanesa llegara a conjeturar que el lugar geométrico estudiado, en este caso, es una parábola. Posteriormente, decidió darle seguimiento a su conjetura con el uso de Cabri.

*Vanesa: Tenemos la circunferencia y nuestro punto $C$, nuestro punto $Q$ debe estar sobre la circunferencia, y luego en la construcción de la parábola yo pienso que $P$ debe de estar sobre la circunferencia*
*Entrevistador: ¿Y luego?*
*Vanesa: Para encontrar al punto $R$ tengo que calcular la mediatriz entre $P$ y $Q$. Oh!*
*Entrevistador: Dijiste oh! oh!, ¿Porqué? ¿Te sorprendió?*
*Vanesa: Porque la intersección de la mediatriz con la recta que une a $P$ y a $Q$ quedó sobre el centro*
*Entrevistador: Y ¿tú estabas esperando eso, o no?*
*Vanesa: No lo esperaba.*

Se tiene una nueva evidencia para afirmar que los estudiantes manejan la tecnología, como herramienta de validación de sus ideas matemáticas. Vanesa se sorprende porque la conjetura que hace en el pizarrón difiere de los resultados de la construcción en Cabri. El uso del software le posibilitó a ver que la mediatriz del segmento PR pasa por el centro. En ese momento, Vanesa encontró un error y lo superó con ayuda del software.

Desde esta perspectiva, se puede asegurar que la exactitud en los trazos, en ambiente Cabri, pasó a ser parte del conjunto de recursos a disposición de la resolución de problemas. Otro factor importante, en el proceso de resolución de problemas con Cabri, es que las construcciones auxiliares se pueden ocultar, mientras que en una construcción con lápiz y papel no es posible.

En la parte final, se le pide a Vanesa que imagine qué lugar geométrico se genera cuando el punto $P$ está fuera de la circunferencia. El entrevistador le pidió que realizara algunos trazos sobre el pizarrón. La alumna ubica un punto P en el exterior de la circunferencia, un punto $Q$ sobre ésta, y el centro $C$. Encontró el punto $R$, resultado de la intersección entre la mediatriz del segmento $PQ$ y la recta $QC$. Repitió estos trazos con diferentes ubicaciones del punto $Q$ sobre la circunferencia. A continuación se muestra el dibujo:

Se presenta el diálogo que se produjo mientras Vanesa intenta visualizar el lugar geométrico:

*Entrevistador: Bueno OK, si $P$ se encuentra fuera de la circunferencia, logras imaginarte qué lugar geométrico dejaría*

*Vanesa: No,*

*Entrevistador: ¿No logras imaginártelo? A ver si los trazos que haces te pueden ayudar.*

*Vanesa: Vamos a ver. $P$ cualquier punto fuera de la circunferencia, aquí. Voy a construir los mismos trazos, que sería el segmento $PQ$, si nosotros sacamos la mediatriz de $P$ y $Q$, y pues $R$ también sería una intersección de $PQ$ con la recta que une a $C$ y a $Q$, y por ejemplo al seguir moviendo $Q$, si tenemos a $Q$ en esta posición, el punto $R$ va a quedar aquí. Esto ya nos hace imaginar qué lugar geométrico podría dejar el punto $R$ si $P$ está fuera de la circunferencia, la mediatriz de $P$ y $Q$ pasa por aquí y pues ahora $R$ sería esta. La verdad no me podría imaginar qué lugar geométrico dejaría $R$.*

La estudiante afirma que no logra imaginarse el lugar geométrico que se produce en este caso. Para contestar la pregunta, usa Cabri y conjetura que se trata de una hipérbola; en este proceso juega un papel muy importante la visualización. A continuación se presenta el episodio que se dio en esta parte de la entrevista:

*Vanesa: No esperaba esto*

*Entrevistador: ¿No esperabas eso?*

*Vanesa: No,*

*Entrevistador: ¿Qué aparenta ese lugar geométrico?*

*Vanesa: Una hipérbola.*

El proceso de construcción y seguimiento de la conjetura es similar al que empleó Perla en este mismo caso: usar la definición de hipérbola, identificar los focos, hacer las mediciones y cálculos. Por su parte, Vanesa ubicó un punto $S$ sobre el lugar geométrico y calculó las distancias $PS$ y $SC$. Más adelante, calculó $PS$ menos $SC$. Arrastró el punto $Q$ sobre la circunferencia para observar si la diferencia $PS - SC$ es una constante. A dicha acción de control se le denomina la prueba del arrastre.

El uso de la prueba del arrastre jugó un papel importante en el proceso de argumentación.

## 4.3. Entrevista a Socorro

La sección corresponde al proceso de solución que llevó a cabo Socorro. Fue elegida por su desempeño en las tres primeras actividades, del presente estudio, donde respaldó sus argumentos matemáticos con el uso del lápiz y del papel.

Socorro utilizó el pizarrón desde el comienzo del proceso de solución. Puso en práctica la estrategia heurística de hacer los trazos que involucra el enunciado del problema para posiciones específicas del punto $R$. En la figura 15a. se puede observar, que la alumna resalta los puntos de intersección del segmento $PR$ con la recta que pasa por $OR$. En la figura 15b se ve que Socorro unió estos puntos con una curva.

En la figura 15b Socorro hizo varios trazos, los cuales le dificultaron estudiar las propiedades que hay entre los elementos que la componen. Por esta razón, la alumna decidió dibujar una figura más simple, prescindiendo de los trazos auxiliares.

La alumna conjetura que el lugar geométrico que describe el punto $S$, cuando $R$ se mueve alrededor de la circunferencia, es una elipse con focos $O$ y $P$.

El siguiente episodio corresponde a la justificación que hizo Socorro de su conjetura:

*Socorro: Entonces, quiero probar que la longitud entre el segmento $PS$, más la longitud del segmento $OS$, siempre va a ser constante; es decir, vamos a tratar de probar que $P$ y $O$ son los focos de esa elipse. Entonces, una manera de probarlo podría ser si nosotros consideramos que el triángulo $PRS$ está formado por los triángulos $PH$ a la intersección de la mediatriz con el segmento $PR$ (triángulo $PHS$) y también el triángulo $RHS$.*
*Entrevistador: OK, si, y ¿Qué más?*
*Socorro: Ahora, lo que nosotros podríamos saber o determinar respecto a ese triángulo, si lo único que sabemos es que esos dos triángulos tienen dos lados que miden lo mismo, o sea, aparte de ser rectángulos.*
*Entrevistador: ¿Por qué son rectángulos?*
*Socorro: Porque el segmento, digo, la línea que va de $H$ a $S$ es la mediatriz del segmento $PR$, entonces.*
*Entrevistador: Adelante*
*Socorro: $PH$ es igual a $HR$; ahora si consideramos también el otro lado que tienen en común es $SH$ y los dos son triángulo rectángulo, entonces los dos tienen un lado con la misma longitud, entonces si los dos tienen dos lados con la misma longitud, esos dos triángulos son congruentes.*
*Entrevistador: ¿Cuáles triángulos son congruentes?*
*Socorro: El triángulo $PHS$, congruente con el triángulo $RHS$.*
*Entrevistador: ¿Por qué son congruentes?*
*Socorro: Porque tienen dos de sus lados iguales. Pero... si nosotros queremos determinar si efectivamente que el tercer lado que es el $PS$ y el $PR$ son de la misma longitud, podríamos establecer la proporción de sus lados; es decir, $PH$ está $RH$, como $HS$ está $HS$, como $PS$ está $RS$, si, pero nosotros sabemos que esto es 1, entonces de ahí se comprende que $PS$ es igual a $RS$*
*Entrevistador: ¿Y esto, para qué te sirve? ¿Esta conclusión para qué te sirve en el problema planteado?*
*Socorro: Si nosotros consideramos que $PS$ este lado es igual a este otro, entonces nosotros tenemos que la longitud que a nosotros nos interesa es $OS$ más $SP$, queremos que esa sea constante, ¿si? Entonces si consideramos que $PS$ es igual a $SR$, entonces $OS$ más $SR$ eso ¿cuánto es? Es la longitud del radio de la circunferencia original que es $OR$ y eso es una constante.*
*Entrevistador: Y con eso ¿qué pruebas?*
*Socorro: Con eso se demuestra que efectivamente $OP$ son los focos de una curva y que esta curva es una elipse.*

En esta parte del proceso de solución, Socorro dio evidencias de que manejó las definiciones de elipse, de mediatriz y los criterios de congruencia de triángulos. Además, mostró su capacidad para hacer demostraciones de matemáticas. Posteriormente, Socorro logró conjeturar y demostrar que la circunferencia se genera cuando el punto $P$ coincide con $O$. A continuación el diálogo:

*Entrevistador: ¿Qué pasa si P lo acercases hacia el centro? Antes de que lo hagas en Cabri ¿qué diría tu intuición?*
*Socorro: Que la elipse va a disminuir*
*Entrevistador: ¿Qué quiere decir eso?*
*Socorro: Que lo que es el lado mayor del eje mayor de la elipse va a irse disminuyendo y disminuyendo, y esa curva sería un poco más cerrada*
*Entrevistador: Qué quiere decir más cerrada?*
*Socorro: Que quizás aparentaría circunferencia*

En esta parte, la alumna construyó sobre el pizarrón un dibujo donde el punto $P$ coincide con el punto $O$. Realizó los trazos que le indica el enunciado del problema y argumenta que el lugar geométrico sería una circunferencia de radio, igual a la mitad de $OS = SR$:

En otro momento de la entrevista, se le pidió a Socorro que imagine qué lugar geométrico genera el punto $S$ cuando $P$ está en el exterior de la circunferencia. Al igual que Vanesa y Perla, Socorro no logra visualizar el lugar geométrico que se genera en este caso. Para encontrar la respuesta, decidió usar Cabri.

Después de hacer la construcción y arrastrar los puntos $R$ y $P$, Socorro conjeturó que el lugar geométrico es una hipérbola. Usó una estrategia similar a la que empleó en el caso de la elipse, para demostrar la validez de la conjetura.

A pesar de la capacidad que tiene Socorro para resolver problemas, construir conjeturas y demostrarlas, en el caso del punto P en el exterior de la circunferencia, no logró visualizar el lugar geométrico. El uso del software le ayudó a visualizar el resultado y a construir una conjetura. Desde esta perspectiva, se afirma que el uso de la tecnología en la resolución de problemas de variación, en contexto geométrico, amplifica el dominio de recursos y estrategias a disposición del resolutor.

# 5. Comentarios finales

El empleo que un alumno le dio a la tecnología, dependió de las cuatro dimensiones propuestas por Schoenfeld (1985) en la resolución de problemas: dominio de recursos, de las estrategias heurísticas y metacognitivas y, al sistema de creencias que tenga sobre las matemáticas.

Las estudiantes entrevistadas pudieron resolver problemas con la ayuda de Cabri. En esta experiencia la manipulación del software les permitió desarrollar diferentes niveles de argumentación que incluyen:

Nivel 1. El reconocimiento visual. Las estudiantes usan el pizarrón o el entorno Cabri para hacer trazos que les permitan visualizar un lugar geométrico. La construcción de trazas o de lugares geométricos juega un papel central en el proceso de visualización. A partir de estas acciones, las estudiantes estuvieron en posibilidad de construir una conjetura.

Nivel 2. La prueba del arrastre. Las alumnas arrastraron los objetos primitivos de la construcción para verificar si la propiedad visualizada en el nivel 1 es verdadera o no. Esta prueba también puede ser aplicada para acotar el dominio geométrico, donde se cumple una propiedad. Las estudiantes utilizaron las definiciones de las cónicas y las herramientas del software como la medición y el arrastre para darle seguimiento a una conjetura.

Nivel 3. La prueba con lápiz y papel. Después de inducir y darle seguimiento a una conjetura, Socorro hizo demostraciones con lápiz y papel.

En las entrevistas clínicas, se encontraron evidencias para concluir que las estudiantes utilizaron Cabri con fines diferentes y bajo creencias diversas. Por ejemplo, Vanesa la usó para hacer los trazos y construir conjeturas (herramienta de exploración), Perla afirmó que la argumentación realizada en Cabri constituye una demostración (herramienta de validación) este perfil de uso es peligroso para la formación matemática de los estudiantes, mientras que Socorro usa el software para comparar los resultados de la demostración, hecha con lápiz y papel y la visualización de la propiedad en la computadora (herramienta de comparación).

Arcavi & Hadas (2000) proponen que los software de geometría dinámica constituyen laboratorios virtuales en los cuales los alumnos pueden visualizar, experimentar, sorprenderse, retroalimentarse y ver la necesidad de construir demostraciones. Si bien es cierto, que los resultados de la investigación que se reporta en el presente documento, los alumnos desarrollan dichas habilidades, también se encontraron casos de alumnos que usaron Cabri en la solución de problemas como herramienta de validación. Dicho perfil del manejo de la tecnología, puede conducir a la generación de creencias erróneas.

Con base al análisis de las entrevistas clínicas, se pudieron apreciar varios procesos cognitivos, ligados con la resolución del problema:

- La exploración de la figura desconocida y su comportamiento, cuando se arrastran los objetos libres.
- El análisis de las propiedades geométricas de las cónicas, que siguen siendo invariantes bajo el arrastre, y en particular la distinción entre las propiedades de los objetos matemáticos y la apariencia visual.
- La verificación de las supuestas propiedades geométricas de una cónica, usando las herramientas proporcionadas por el software. Por ejemplo, si un lugar geométrico da la apariencia visual de ser una elipse, las estudiantes usaron diferentes recursos y estrategias para argumentar la validez de sus ideas. Un camino común fue el de identificar los focos; medir las distancias desde un punto sobre el lugar geométrico, a cada uno de los focos, y sumar tales distancias. El arrastre se usó para verificar que la suma de las distancias es una constante.

## Bibliografía

[1] ARCAVI, A.; HADAS, N., (2002). *Computer mediated learning: an example of an approach*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 5: 25-45, 2000. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

[2] GOLDIN, A., (2000). *A Scientific Perspective on Structured*, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). Handbook of research Design in Mathematics Education. (pp. 517- 545).

[3] MORENO (2002b)., *Ideas matemáticas del currículum presentadas mediante el Cabri Géomètre*. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.) Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. p.p. 141-150. Santa Fe de Bogotá.

[4] SANTOS, M., (2003). *Hacia una instrucción que promueva los procesos de pensamiento matemático*. En Filloy, E. (Ed.). Matemática Educativa. Aspectos de la Investigación Actual. pp.314-332. México: Fondo de Cultura Económica.

[5] SCHOENFELD, A., (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.