

# ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Volumen 21

**Clame**

Comité Latinoamericano  
de Matemática Educativa



# ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA VOLUMEN 21

## Editora:

Patricia Lestón

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

## Editores Asociados:

Cecilia Crespo Crespo, Carlos Oropeza Legorreta y Hugo Parra

### Diseño de portada y CD:

Liliana Álvarez Díaz

*Dirección de Educación Continua del Instituto Politécnico Nacional*

Janet Ramírez Sandoval

*CICATA-IPN, Legaria*

### Diseño de interiores:

José Francisco Canché Gómez

*CICATA-IPN, Legaria*

### Digitalización:

Juan Gabriel Molina Zavaleta

Christian Pérez Bohorquez

*CICATA-IPN, Legaria*

## Edición:

©2008. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

CMM 040505 IC7

Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720

Coacalco, Estado de México

México

[www.cmmedu.com](http://www.cmmedu.com)

ISBN: 978-970-9971-15-6

©2008. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

[www.clame.org.mx](http://www.clame.org.mx)

Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.



# Consejo Directivo

---

**Gustavo Martínez Sierra**  
Presidente  
*presidencia@clame.org.mx*

**Germán Beitía**  
Secretario  
*secretario@clame.org.mx*

**Joaquín Padovani**  
Tesorero  
*tesorero@clame.org.mx*

**Juan Raúl Delgado Rubí**  
Vocal Caribe  
*vocal\_caribe@clame.org.mx*

**Edison de Faria**  
Vocal Centroamérica  
*vocal\_centroamerica@clame.org.mx*

**Gisela Montiel Espinosa**  
Vocal Norteamérica  
*vocal\_norteamerica@clame.org.mx*

**Cecilia Crespo Crespo**  
Vocal Sudamérica  
*vocal\_sudamerica@clame.org.mx*

2004 - 2008

## Consejo

### Consultivo

---

Egbert Agard  
Ricardo Cantoral  
Fernando Cajas  
Guadalupe de Castillo  
Evarista Matías  
Rosa María Farfán  
Teresita Peralta

## Comisión

### de Admisión

---

Sandra Castillo  
Eugenio Carlos  
Liliana Homilka

## Comisión de

### Promoción Académica

---

Javier Lezama  
Edison de Faria  
Yolanda Serres  
Leonora Díaz Moreno  
Mayra Castillo  
Uldarico Malaspina

## Comité

### Internacional de Relme

---

Leonora Díaz Moreno  
Miguel Solís  
Gustavo Bermúdez  
Olga Pérez

# Comité

## Científico de Evaluación

Alanís, Juan Antonio  
Aparicio, Eddie  
Arcos, Ismael  
Ardila, Analida  
Arrieche Alvarado, Mario  
Ávila Godoy, Ramiro  
Bermúdez, Gustavo  
Blanco, Haydeé  
Blanco, Ramón  
Buendía Abalos, Gabriela  
Cabañas Sánchez, María Guadalupe  
Cadoche, Lilian  
Camacho, Alberto  
Campistrous, Luis  
Cantoral, Ricardo  
Carlos Rodríguez, Eugenio  
Carrasco, Eduardo  
Carrillo, Hugo  
Castañeda, Apolo  
Castillo, Sandra  
Cordero Osorio, Francisco  
Cortés Zabala, Carlos  
Crespo Crespo, Cecilia  
Dalcín, Mario  
De Faria, Edison  
Delgado, Raúl  
Delgado, César  
Díaz Moreno, Leonora  
Dolores, Crisólogo  
Engler, Adriana  
Espinoza, Lorena  
Espinoza, Pedro  
Farfán, Rosa María  
Gaita Ipaguirre, Rosa Cecilia  
García Zatti, Mónica  
Grijalva, Agustín  
Gutiérrez Alvarez, Milagros  
Homilka, Liliana  
Ibarra Olmos, Silvia  
Lara Galo, Claudia  
Lanza, Pierina

Lestón, Patricia  
Lezama, Javier  
Mántica, Ana María  
Marcolini Bernardi, Josefina Marta  
Mariscal, Elizabeth  
Martínez Sierra, Gustavo  
Mingüer Allec, Luz María  
Miranda Montoya, Eduardo  
Molfino, Verónica  
Molina, Juan Gabriel  
Montiel Espinsa, Gisela  
Muñoz, Germán  
Ochoviet, Teresa Cristina  
Ojeda Salazar, Ana María  
Olave, Mónica  
Oropeza Legorreta, Carlos  
Ortega del Rincón, Tomás  
Osorio Abrego, Héctor  
Parra, Hugo  
Pérez González, Olga Lidia  
Pérez, María del Carmen  
Piceno Rivera, Juan Carlos  
Ponteville, Christiane  
Reséndiz, Evelia  
Rey, José Luis  
Rizo Cabrera, Celia  
Rosas Mendoza, Alejandro  
Ruiz, Blanca  
Salat, Ramón  
Sánchez Aguilar, Mario  
Sardella, Oscar  
Scaglia, Sara  
Serna, Luis Arturo  
Serres, Yolanda  
Sierra, Modesto  
Tejada de Castillo, Guadalupe  
Testa Rodríguez, Yacir  
Valdivé, Carmen  
Valero, Socorro  
Velázquez Bustamante, Santiago  
Zúñiga, Leopoldo

## EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: UNA MIRADA DESDE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Jhony Alexander Villa Ochoa

Grupo FORDAD (Ciep-Asdem). Grupo "Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Medellín

javo@une.net.co

Campo de investigación: Gráficas y funciones

Colombia

Nivel: Medio

**Resumen.** En este documento se presentan los avances del proyecto de investigación "El concepto de función en las matemáticas escolares" realizado en cooperación entre el Programa de Educación Formal para Adultos del ITM y la Universidad de Antioquia. Se retoma la tesis propuesta por Posada & Villa,(2006) en donde se afirma que una didáctica del concepto de función debe abordar los aspectos de la variación, la modelación y los sistemas de representación. Con base en este planteamiento se construye una propuesta didáctica que pretende potenciar el entendimiento de algunos aspectos de la función lineal y cuadrática.

**Palabras clave:** función lineal, función cuadrática, pensamiento variacional

### Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido un área de constante preocupación en las últimas décadas y a la cual muchos investigadores han dedicado grandes esfuerzos hasta lograr los desarrollos que actualmente se conocen en esta disciplina. Uno de estos alcances radica en el establecimiento de diferentes herramientas que sean de utilidad para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. En Colombia se pretende construir dicho pensamiento matemático a partir del desarrollo de otros cinco tipos de pensamiento, a saber: *Métrico, Numérico, Variacional, Aleatorio, y Espacial*; de igual manera se propone que al interior de las aulas de clase los docentes puedan implementar los siguientes cinco procesos: *el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.* (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 18)

Esta investigación aborda el estudio del concepto de función como un elemento fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica y

Media, colocando un fuerte acento en los procesos de modelación de situaciones de variación. A continuación se presentarán algunos elementos para una didáctica que promueva la construcción del concepto de función cuadrática y se muestra, a manera de ejemplo, una situación que permitiría ilustrar la forma en cómo se puede abordar este concepto al interior del aula de clase.

### **Elementos para una didáctica de la función cuadrática**

En este documento se plantean algunas reflexiones sobre los procesos de variación inmersos en la comprensión de la función cuadrática y se retoman elementos sobre el desarrollo del pensamiento variacional.

Con la propuesta del desarrollo del pensamiento variacional se hace especial énfasis en los procesos de variación. En términos del Ministerio de Educación Nacional, (2006)

*[...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.*

*Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. (p. 66)*

De lo anterior puede interpretarse que uno de los propósitos de la matemática en la Educación Básica no es únicamente el manejo de variados sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos; sino también el desarrollo de un Pensamiento Variacional. Éste, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de

variación en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática: desde lo geométrico, lo estadístico y muy especialmente en lo numérico y lo métrico. En particular la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente.

En este sentido Vasco, C. (2006) afirma que:

*El objeto del pensamiento variacional es entonces la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad. (p. 139)*

Es así como la comprensión de los fenómenos de las ciencias experimentales, la ingeniería y demás espacios de conceptualización que se basen en los principios del cálculo diferencial, adquieren sentido cuando se estructuran desde el proceso de modelación atrapado en el concepto de función.

### **El concepto de función lineal como base para el entendimiento de la función cuadrática desde una perspectiva variacional**

En Posada & Villa (2006) se desarrolló una propuesta para introducir el concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, en dicho trabajo se retoma el concepto de unidad significativa introducido por Duval (1999) para determinar algunas características de la función lineal. Al respecto se afirma que:

[para el concepto de función lineal] las unidades significantes serán determinadas a partir de la noción de variación y razón de cambio. Esto debido a que es la razón de cambio constante la que permite determinar el concepto de función lineal desde el punto de vista variacional.

Esta decisión, permitirá dar una mirada un tanto diferente al estudio del concepto de función lineal desde tres elementos:

- Unificar la noción de función lineal y afín.



- Concebir la función lineal como un modelo matemático de un conjunto de situaciones con una misma característica (razón de cambio constante).
  - Proponer una única unidad significativa cognitivamente pertinente, que permita el estudio de las dificultades presentadas en la actividad cognitiva.
- (Posada & Villa, 2006, p. 93-94)

Con base en ello, se afirma que “Se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante”(Posada & Villa, 2006, p. 96). Representando el “cambio” de una variable como  $\Delta x$  se tendría que la variación lineal puede representarse así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ con } a \text{ constante}$$

Con estos planteamientos como base, se pretende dar sentido a la noción de función cuadrática partiendo de la variación lineal de la razón de cambio. De esta forma, puede plantearse una interpretación de la función cuadrática desde una perspectiva variacional en los siguientes términos.

*“Se llama función cuadrática a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio varía linealmente”*

A partir de esta idea se considera que un entendimiento de la función cuadrática debe tener en cuenta:

1. La descripción cualitativa del cambio a partir de la identificación de características de su gráfica.
2. La identificación del cambio de la razón de cambio como una constante.
3. La identificación del producto de dos cantidades que varía linealmente.

4. La construcción de una función  $g(x)$  de la cual se conoce que su razón de cambio  $f(x)$  varía linealmente.
5. La construcción de una función lineal a partir de una función constante y a partir de ella una función cuadrática de la cual puede provenir.
6. Asumir una función cuadrática y a partir de ella encontrar la función lineal que representa su cambio y a su vez la función constante que hace referencia al cambio de segundo orden.
7. La asociación de la forma como varía el cambio con las concavidades de la gráfica de la función.
8. La generalización de un patrón cuadrático a partir de la interpolación de un conjunto de datos en una tabla.

#### **A manera de ejemplo: caída libre.**

##### ***Reflexiones sobre la situación***

La siguiente es una situación de variación cuadrática con la cual puede iniciarse la construcción del concepto de función de este tipo. El contexto de la situación es tomado de la física, la cual a su vez, plantea la necesidad de avanzar conceptualmente de forma paralela en ambas asignaturas partiendo de una situación común a ambos temas.

La situación ha sido pensada en tres momentos, cada uno de ellos diseñados con el objetivo de seguir, *grosso modo*, las fases de un proceso de modelación según Bassanezi, R. (2002) que apunte al reconocimiento progresivo de las características de las razones de cambio que van a permitir la caracterización de la función.

El *primer momento* está diseñado de tal manera que los estudiantes se hagan una idea mental de la situación. Primero se les presenta el fenómeno de caída de un cuerpo y luego se les pide que describan las características del movimiento con lo cual deben procurar establecer y validar diferentes regularidades, de esta manera se espera que los

estudiantes reconozcan las diversas cantidades que intervienen en la situación. (v.g. la altura del objeto, la velocidad con que cae, la aceleración, la resistencia del aire...) de igual forma se puede orientar a los estudiantes hacia el reconocimiento de relaciones de dependencia entre las cantidades. En este momento se pretende dejar en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar las relaciones matemáticas lo cual se hace evidente con la descripción cualitativa con diferentes usos del lenguaje y los diferentes sistemas de representación.

En el *segundo momento* se les plantea la experimentación con una guía directa de laboratorio con materiales especializados; para ello se les pedirá a los estudiantes que lleven un control de la situación mediante un cronómetro y regla graduada y que construyan una tabla de la situación. Con base en la tabla construida y en la trayectoria dejada por el objeto los estudiantes deben reflexionar y conjeturar sobre el problema; de igual manera se espera construir un gráfico cartesiano del comportamiento de las cantidades. Inicialmente los estudiantes podrían entender la razón de cambio constante no como un cociente de diferencias, sino como el cociente aritmético entre los valores de una tabla. Esto permitirá proponer algunas ideas que ayuden a los estudiantes a identificar esta característica de la razón de cambio en el momento de la intervención.

Un *tercer momento* incluye la simulación del fenómeno en el software *modellus*, con el cual se pretende que los estudiantes puedan interactuar mostrando simultáneamente las gráficas cartesianas de la posición, velocidad y aceleración. En este momento se espera la construcción de un modelo algebraico de las relaciones entre las magnitudes.

### **Desarrollo de la situación**

#### **Actividad n° 1. Reconocimiento y descripción de la variación [captación cualitativa]**

Se le entrega a cada equipo de estudiantes una pelota y se les pide que describan el movimiento del objeto cuando se deja caer a cierta altura.

Se orienta el trabajo con el siguiente conjunto de preguntas:

- ¿Qué cantidades intervienen en la situación?
- ¿Cuáles de ellas son constantes y cuáles varían en las condiciones del problema?
- Presente un argumento del porqué el movimiento puede o no ser lineal.
- Realice una gráfica aproximada que represente la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el objeto.

**Actividad n° 2. Cuantificación de la Variación. [Captación numérica de la razón de Cambio]**

En este momento se le pide a los estudiantes que observen los valores mostrados por el software en la tabla No 1. Se les pide que:

Observen la tabla y describan la forma en como cambian la altura del objeto con respecto al tiempo.

a 1. Generada en el software Modellus

t	Y
0.10	504.95
0.20	504.80
0.30	504.56
0.40	504.22
0.50	503.78
0.60	503.24
0.70	502.60
0.80	501.86
0.90	501.03
1.00	500.10
1.10	499.07
1.20	497.94
1.30	496.72
1.40	495.40
1.50	493.98
1.60	492.46
1.70	490.84
1.80	489.12
1.90	487.31
2.00	485.40

Tabla

- ¿Varía Linealmente? Justifique su respuesta.
- Copie los valores de la tabla y péguelos en un archivo de Excel.
- Calcule la *Razón de Cambio* de la altura del objeto con respecto al tiempo. ¿Observa alguna regularidad? Describa la forma en que *cambia* la *razón de Cambio*, y represéntela simbólicamente. (A esta razón de cambio se le llama velocidad)
- Calcule la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. (A este valor se le llama aceleración).

### Actividad n° 3. Construcción del modelo.

En este momento se espera que el estudiante alcance a construir el modelo matemático de la situación determinando las gráficas cartesianas y las expresiones simbólicas.

- Construya en Excel una gráfica de la altura, velocidad y aceleración con respecto al tiempo.
- Compare los gráficos obtenidos con los presentados en el software *modellus*.
- Determine una expresión simbólica que represente la variación entre la velocidad y el tiempo.
- Determine una expresión simbólica que represente la variación entre la posición y el tiempo.

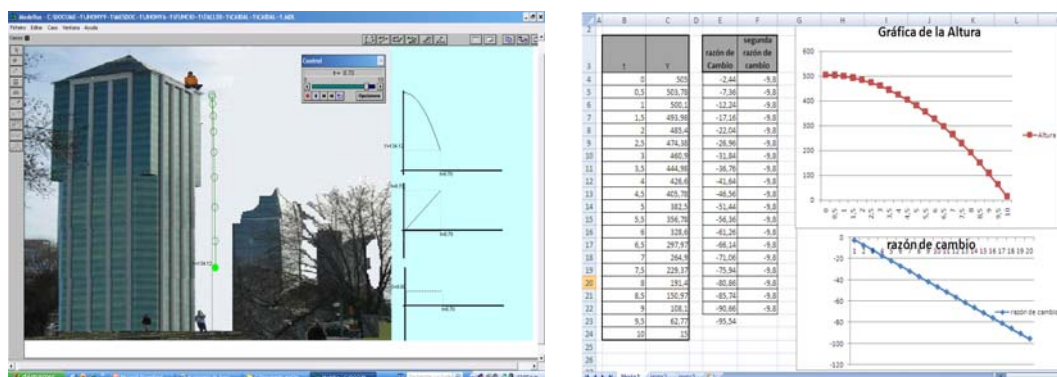


Ilustración 1. Animación en el software *modellus* y de las tablas y gráficas construidas en Excel.

### Consideraciones finales

Las situaciones de modelización de fenómenos de variación han estado presentes en el desarrollo histórico del concepto de función (Posada & Villa, 2006). Ello sugiere que la presencia de este tipo de situaciones puede ser útil en la construcción de dicho concepto y por tanto posibilita ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes a

reconocer, en el concepto de función, un modelo matemático que describe, sistematiza y organiza situaciones en contextos particulares donde intervienen fenómenos de variación y cambio.

Finalmente, es posible considerar que para que en la escuela se pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función desde una perspectiva variacional se requieren tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
- La identificación de la razón de cambio y la forma en como puede cambiar dicha razón.
- El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
- El reconocimiento de la variación lineal de la razón de cambio como elemento que identifica las funciones cuadráticas.
- La comprensión de la función como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.

### Referencias bibliográficas

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Posada & Villa. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Vasco, C. (2006). Pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco (Ed.), *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pág. 148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.