El concepto de área

Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
lmendieta@uni.pedagogica.edu.co

Johana Andrea Torres Díaz
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

Presentamos el concepto de área desde el punto de vista de Euclides, de Hilbert y lo comparamos con la presentación que se hace en algunos textos de la educación básica, media y universitaria.

1. El concepto de área en Euclides

Los *Elementos* son reconocidos como una de las obras que ha ejercido más influencia en el desarrollo de las matemáticas en diferentes épocas; de hecho, durante 22 siglos se constituyó en la base de las matemáticas, en el modelo de un sistema formal para las mismas, por lo cual es justificable que sea uno de los libros más editado e impreso en el mundo. Euclides, su autor, un matemático alejandrino de finales del siglo IV a.C., es reconocido por su habilidad expositiva y pedagógica; en particular, los Elementos, bien pueden considerarse como un libro de texto para iniciar a los aprendices en el estudio de la geometría y, en general, de todas las matemáticas elementales conocidas en esa época (aritmética, geometría y álgebra), descritas y organizadas lógicamente, de manera que cada proposición pudiera ser justificada con base en unos postulados, definiciones y proposiciones demostradas previamente.

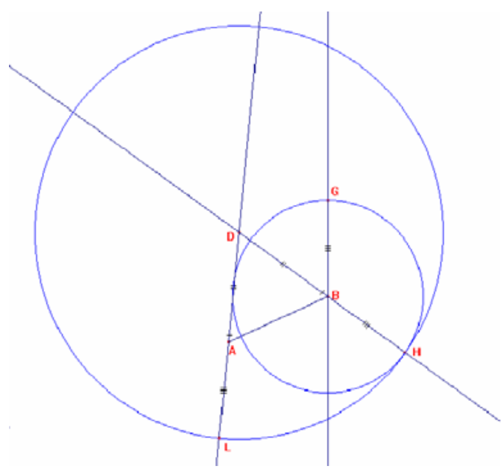
Los Elementos incluyen trece libros: los seis primeros sobre geometría plana, los libros VII, VIII y IX de aritmética (teoría de números), el libro X sobre los inconmensurables y los últimos tres sobre geometría del espacio. En el libro primero, además, se establecen 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes, las cuales son el punto de partida para el desarrollo de toda la obra.

Las 48 proposiciones que componen el primer libro abarcan construcciones y propiedades de las figuras planas rectilíneas y el concepto de congruencia, o igualdad, entre ellas. El concepto de área se aborda por primera vez en la proposición 34, sin que haya explícitamente alguna definición o se recurra a números y fórmulas para expresarla; Euclides establece, de manera implícita, cuestiones relativas al área de figuras planas, en términos de magnitudes y proporciones que, en últimas, aportan las condiciones básicas del concepto; esto se evidencia, particularmente, en la proposición 35 del libro I, debido a la ampliación de la idea de igualdad de figuras planas.

La primera idea de igualdad aparece en la noción común 7, la cual establece: *Las cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí*, entendida esta congruencia en el sentido de encajar, ajustar o coincidir. Tradicionalmente, esto se interpreta como un principio de superposición: si una cosa puede trasladarse para coincidir con otra, entonces son iguales; sin embargo, como lo enuncia Campos (1994), corresponde a una coincidencia experimental que no es válida desde el punto de vista axiomático.

Es evidente que Euclides no era muy partidario del uso de este principio, pues sólo lo uso en la proposición I-4, el primer criterio de congruencia de triángulos[1]: *Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases y los dos triángulos serán iguales*. Tiene sentido este rechazo, tal vez por que no está muy claro qué significa sobreponer un triángulo en otro, podría interpretarse como mover el triángulo para colocarlo encima de otro, y el movimiento, aunque fuera sin deformación, no estaba considerado en la geometría, ésta estudiaba los objetos inmóviles y sólo en la astronomía se admitía y estudiaba el movimiento de los objetos[2].

En la proposición I-2, *construir en un punto dado un segmento igual a otro dado*, al igual que en la I-4, pareciera que hay movimiento de un segmento, pero lo que se hace es una construcción con regla y compás:



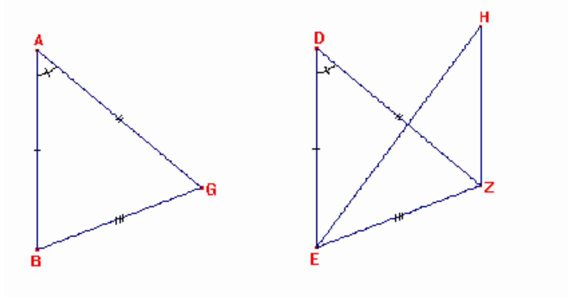
Sea BG el segmento dado y A, el punto dado. Se construye sobre el segmento el triángulo equilátero ADB (Proposición I-1), se prolongan los lados DA y DB (Postulado 2) y se trazan las circunferencias con centro en B y radio BG y con centro en D y radio DH (Postulado 3). Entonces, el segmento BG es igual al segmento BH, el segmento DL es igual al segmento DH y el segmento DA es igual al segmento DB, de donde el segmento BH resulta ser igual al segmento AL (Noción común 3) y, por lo tanto, GB es igual a AL (Noción común 1). Así, construimos un segmento igual a GB en el punto A.

[1]Criterio Lado-Ángulo-Lado

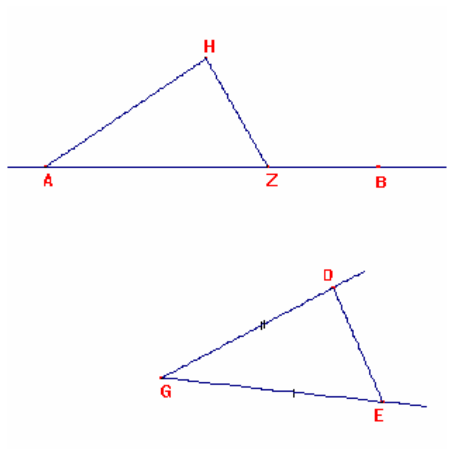
[2]Este problema fue solucionado por Helmholtz en 1887, con su principio de libre movilidad. Este principio fue incluido por Hilbert entre los axiomas de congruencia en sus Grundlagen der Geometrie. Un estudio detallado de este problema aparece en Campos, 1994.

Otras proposiciones relacionadas con la igualdad de figuras en términos de congruencia, recurren a la proposición I-4, y a otras que se van demostrando. Los enunciados son:

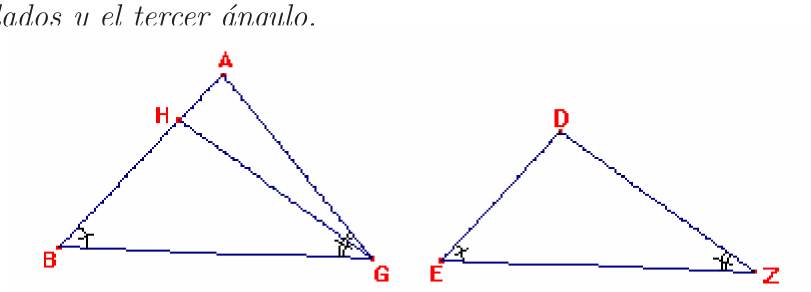
I-8: *Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a los lados del otro e iguales las bases, tendrán iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales.*



I-23: *Sobre una recta dada y en uno de sus puntos construir un ángulo rectilíneo igual a otro rectilíneo dado.*



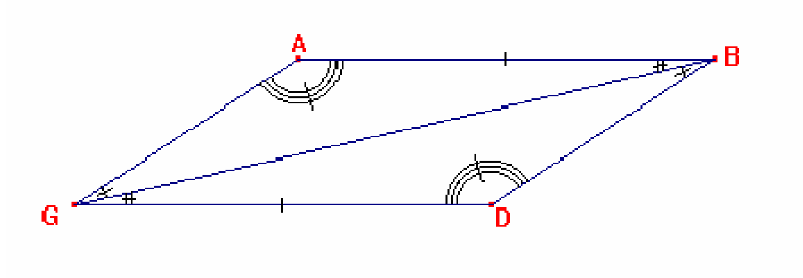
I-26: *Si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado iguales, ya sea este lado el situado entre los ángulos iguales o el subtendido por uno de los ángulos iguales, tendrán iguales los otros dos lados y el tercer ángulo.*



La proposición I-34, *Los lados y los ángulos opuestos de regiones paralelográmicas son iguales entre sí y la diagonal divide en dos dichas regiones*, inicia el estudio de área de figuras rectilíneas -sin hacer mención explicita de la palabra área-, es una primera comparación entre triángulos y paralelogramos, basada en la congruencia de los dos triángulos, como se ve en la demostración de la última parte del enunciado:

"Digo también que la diagonal divide en dos regiones iguales a una región paralelográmica porque siendo AB igual a GD y BG común, los dos segmentos A y BG serán iguales a los

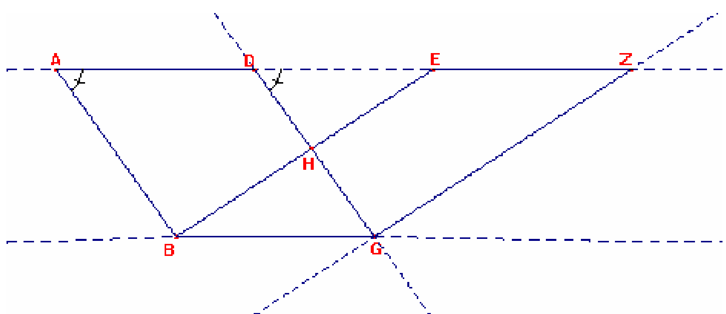
dos GB y DG y el ángulo ABG igual al BGD. Por tanto, la base AG será igual a la BD y el triángulo ABG igual al BGD. l.q.q.d." (Euclides, traducción de Vera, 1970, p.725)



1.1. Igualdad de figuras planas rectilíneas en términos de áreas

Hasta aquí la igualdad sólo está contemplada en el sentido de congruencia, aplicando segmentos, ángulos y triángulos; sin embargo, sin hacer alguna referencia a algún cambio en el significado del término *igual*; en la proposición I-35, Euclides introduce por primera vez una idea de igualdad entre figuras rectilíneas, sin necesidad de que éstas tengan la misma forma, una igualdad referida al área de las figuras[3].

La proposición I-35 establece que *Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales.*



Para demostrarla, Euclides considera los paralelogramos ABGD y EBGZ, sobre la misma base BG y entre las mismas paralelas AZ y BG. Por ser paralelogramos, los segmentos AB y BG son iguales y, de manera análoga, los segmentos EZ y BG, y los segmentos AB y DG (Proposición I-34), por lo cual AD y EZ son iguales (Noción común 1). Sumando el segmento común DE, los segmentos AE y DZ resultan ser iguales (Noción común 2).

Por otra parte, por ser paralelos los segmentos AB y DG (Proposición I-33), los ángulos ZDG y EAB son iguales (Proposición I-29), con lo cual el triángulo EAB es igual al triángulo DZG (Proposición I-4).

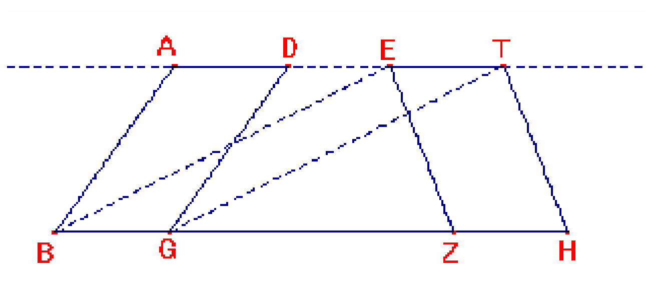
Restando el triángulo común DHE, resultan iguales los trapecios ABHD y EHGZ (Noción común 3) y, sumando a éstos últimos el triángulo común BHG, se concluye que los paralelogramos ABGD y EBGZ son iguales (Noción común 2), como se quería demostrar.

[3]Legendre introdujo el término *equivalente* para expresar este sentido más amplio de la igualdad, restringiendo el término *igual* sólo para las figuras congruentes (Heath, 1956). De hecho, algunas traducciones de los Elementos, como la de Vera (1970), utilizan la palabra equivalente en estas proposiciones, en lugar de la palabra igual, usada en las proporciones de congruencia. Nosotros no haremos esta distinción.

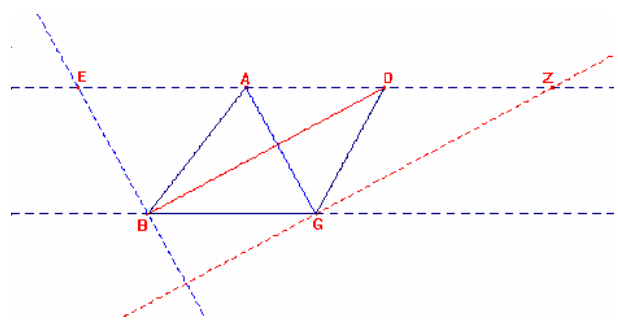
Se observa, en la demostración de esta proposición, que Euclides trata a las figuras como magnitudes; es decir, que implícitamente señala que el área es una magnitud, pues suma y resta áreas iguales y utiliza las nociones comunes para garantizar la igualdad de las nuevas áreas que se obtienen de estos procedimientos, que antes habían sido usadas para las longitudes, el área es la segunda magnitud que aparece en los Elementos. Incluso, en el desarrollo de la demostración para establecer la igualdad de paralelogramos, usa como argumento la igualdad entre dos trapecios, evidentemente no congruentes.

De manera similar se observa en las siguientes tres proposiciones, de las cuales sólo presentamos el enunciado y el dibujo de la construcción:

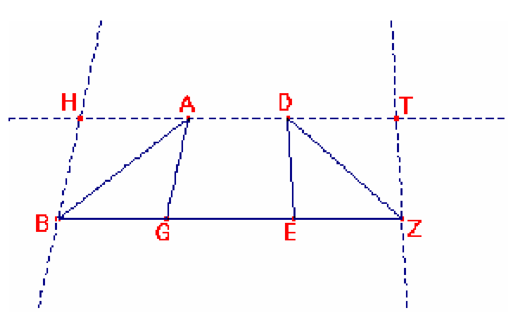
I-36: *Los paralelogramos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales*



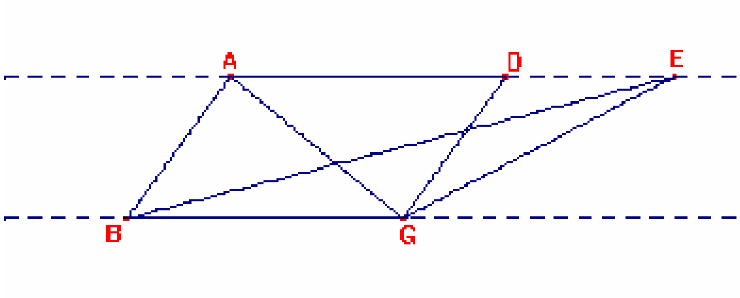
I-37: *Los triángulos colocados sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales*



I-38: *Los triángulos colocados sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales*



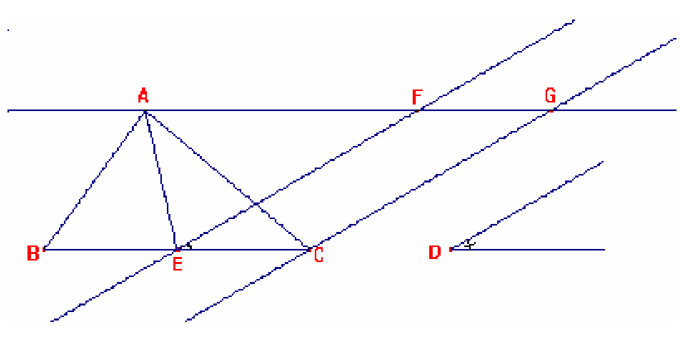
De lo anterior, podemos concluir que el área de un paralelogramo y de un triángulo dependen de la base y de la altura, pues todos los triángulos, o paralelogramos, que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas tienen la misma área. Una idea un poco más elaborada aparece en la proposición I-41: *Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo*, es decir que Euclides afirma, sin recurrir a fórmulas, que el área del triángulo es la mitad del área de un paralelogramo de igual base y altura. Veamos la construcción:



Considérese el triángulo EBG con base BG igual a la del paralelogramo ABGD y colocados entre las mismas paralelas AE y BG. Trácese la recta AG y entonces, los triángulos ABG y EBG son iguales (proposición I-37); además, El paralelogramo ABGD es doble del triángulo ABG (Proposición I-34), luego, el paralelogramo ABGD es el doble del triángulo EBG, como se quería demostrar.

1.2. Construcción de paralelogramos iguales a otras figuras planas rectilíneas

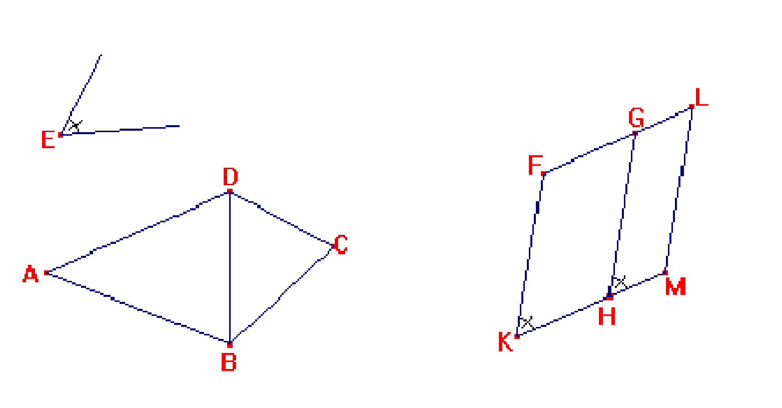
Con la proposición I-42, *Construir, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado*, Euclides muestra una nueva perspectiva en su estudio sobre áreas de figuras rectilíneas, denominada aplicación de áreas. Antes de esta proposición, presenta varias situaciones en las cuales triángulos y paralelogramos tienen áreas iguales y el resultado de que un triángulo tiene la mitad del área de un paralelogramo; pero ahora, el interés está en construir figuras que tengan la misma área que una figura dada. La construcción y demostración elaborada por Euclides para esta proposición es como sigue:



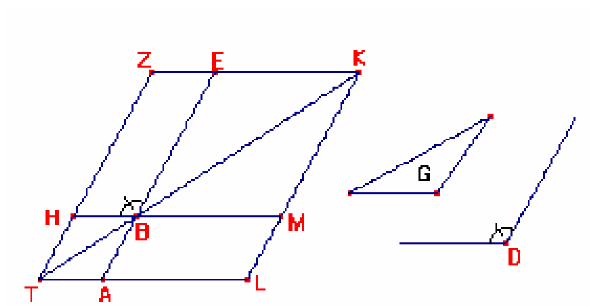
Sea el triángulo ABC y el ángulo D. Construya el punto medio E del segmento BC (Proposición I-10), trácese el segmento AE y constrúyase el ángulo CEF igual al ángulo dado D (Proposición I-23). Trácese la recta paralela a BC en el punto A y la recta paralela a EF en el punto C (Proposición I-31), la intersección de éstas será G.

Los triángulos ABE y AEC son iguales (Proposición I-38); luego, el triángulo ABC es el doble del triángulo AEC y como el paralelogramo EFGC (Proposición I-33) es también el doble del triángulo AEC (Proposición I-41), dicho paralelogramo, construido con un ángulo igual a D, es igual al triángulo dado (Noción común 1).

Con la proposición 45, se extiende el procedimiento a cualquier figura; esto es, cualquier figura rectilínea puede transformarse en un paralelogramo: *Construir, en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada.*

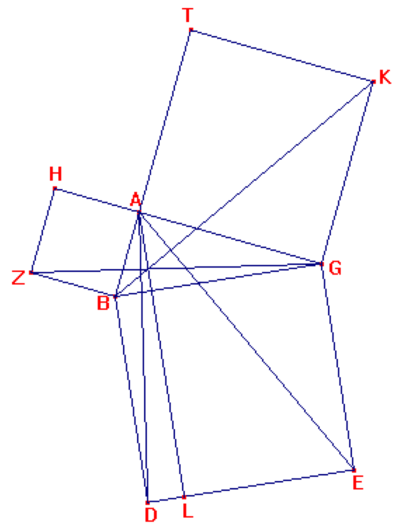


Así, el área de una figura rectilínea se reduce al área de un paralelogramo, lo cual apunta, como se verá más adelante, a la posibilidad de cuadrar una figura cualquiera y con esto, reducir sustancialmente el problema de determinar el área de una figura. La estrategia para demostrar esta proposición es dividir la figura dada en triángulos y usar la proposición I-42, las veces que sea necesario, con la condición adicional de un segmento, pues se debe construir cada paralelogramo con un lado común al primer paralelogramo ya construido. Este artificio es posible gracias a la proposición I-44: *Aplicar en un segmento dado y en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.*



1.3. Descomposición de figuras rectilíneas planas en otras figuras rectilíneas planas

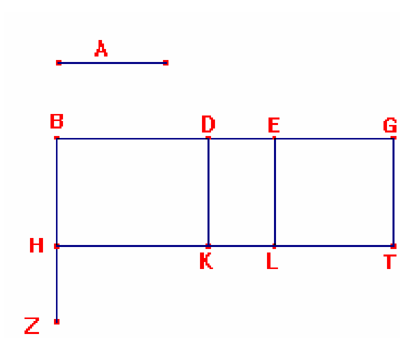
En las proposiciones I-45 y I-47, aparece una nueva idea, la posibilidad de expresar un área como suma de otras. El Teorema de Pitágoras (Proposición I-47) es tal vez el ejemplo más conocido de este planteamiento sobre el área: *En los triángulos rectángulos el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman ese ángulo recto.*



Este nuevo elemento sobre el estudio del área, se hace más evidente en el libro II de los Elementos, usualmente catalogado como Álgebra Geométrica, debido a que las 14 proposiciones que allí se incluyen son análogas a expresiones algebraicas que permiten la factorización de polinomios y la solución de ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, los principios expuestos también hacen referencia implícita a la posibilidad de transformar un área en la suma de otras; en particular, el área de rectángulos como suma de otros rectángulos[4].

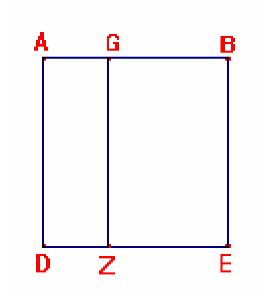
Ejemplos de esta precisión son las proposiciones:

II-1: *Si una de dos rectas se divide en un número cualquiera de partes, el rectángulo comprendido por dichas rectas equivale a los rectángulos comprendidos por la no dividida y por cada una de las parciales.*

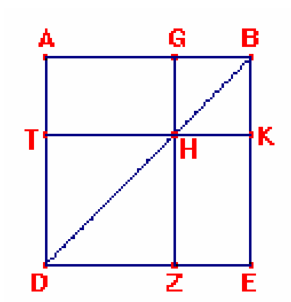


[4]La propuesta de álgebra geométrica se basa en áreas de rectángulos, debido a que la multiplicación de dos segmentos, en Euclides, da como resultado un rectángulo. Esta idea se mantuvo hasta Descartes, quien, basado en la proposición 12 del libro VI de los Elementos, mostró una manera para que el producto de dos segmentos sea un segmento.

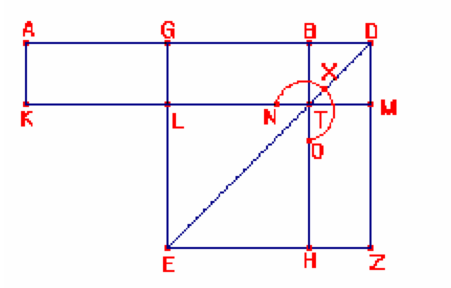
II-2: *Si se divide de un modo cualquiera una recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y cada una de sus partes es equivalente al cuadrado de la recta entera.*



II-4: *Si se divide de modo cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera equivale a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo comprendido por las partes.*



II-6: *Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la parte entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad, es equivalente al cuadrado de la recta formada por la recta mitad y la prolongación.*

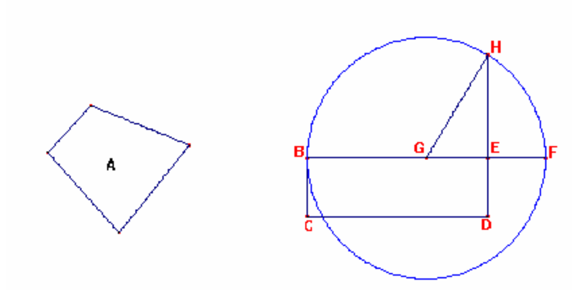


1.4. Cuadraturas de figuras planas rectilíneas

El significado de la palabra cuadratura está relacionado con la posibilidad de construir un cuadrado con la misma área de una figura dada. La proposición II-14[5], resuelve esta cuestión para una figura rectilínea cualquiera, construyendo un cuadrado igual a un

[5]Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

rectángulo; así, el primer paso de la construcción remite a la proposición I-45. Una vez construido el rectángulo CBED, igual a la figura A, se toma el caso en que uno de los lados, en este caso BE, sea mayor, pues si los lados fueran iguales ya estaría concluido el problema.



Se prolonga entonces el segmento BE hasta el punto F, tal que EF sea igual a ED, se encuentra el punto medio G del segmento BF y se traza la circunferencia con centro en G y radio GF. Se prolonga el segmento DE hasta que se interseque con la circunferencia, el punto H, y se traza el segmento GH.

Como el segmento BF está dividido en partes iguales por G y en partes desiguales por E, el rectángulo comprendido por BE y EF más el cuadrado de lado EG es igual al cuadrado de EF (Proposición II-5) y al cuadrado de GH, pues éste último es igual al segmento EF (Noción común 1). Por otra parte, el cuadrado de EG más el cuadrado de EH es igual al cuadrado de GH (Proposición I-47), luego el rectángulo comprendido por BE y EF más el cuadrado de lado EG es igual a el cuadrado de EG más el cuadrado de EH (Noción común 1).

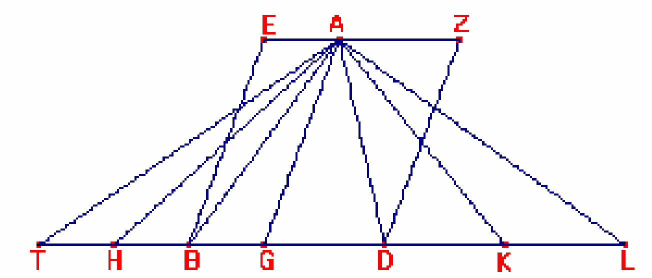
Restando el cuadrado común de lado EG, el rectángulo comprendido por BE y EF resulta ser igual al cuadrado EH (Noción común 3), como se quería demostrar, pues EF es igual a ED. Entonces, el cuadrado de la do EH es igual a la figura A dada.

Con esta proporción cualquier figura rectangular, y en últimas cualquier figura rectilínea, puede cuadrarse; esto, en suma, significa encontrar el área de la figura, pues el cuadrado es una medida canónica del área. Al parecer la proposición II-14 era un fin en sí mismo al que apuntaba Euclides en relación con el área, pues este resultado no se usa en la demostración de otras proposiciones; de cierta manera, él observa que con esta proposición se soluciona el problema del área de las figuras rectilíneas. El problema del área del círculo requiere otros artificios y éste es el siguiente aspecto que sobre el estudio de áreas aparece en los Elementos.

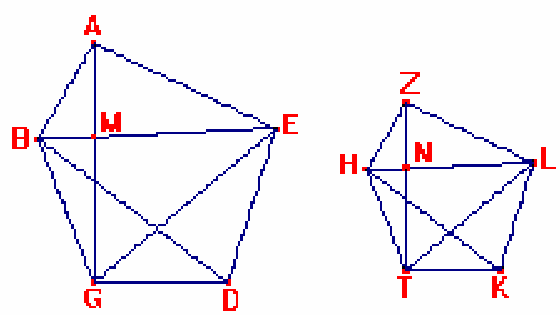
1.5. Áreas proporcionales

En los libros V y VI se expone en detalle la teoría de proporcionalidad, desarrollada por Eudoxo, para magnitudes geométricas. En particular, para el caso del área, las proposiciones 1 y 20 del libro VI, permiten ampliar el espectro de áreas calculables, paso preliminar para el estudio del área del círculo. Tales proposiciones enuncian lo siguiente:

VI-1: *Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases*[6]

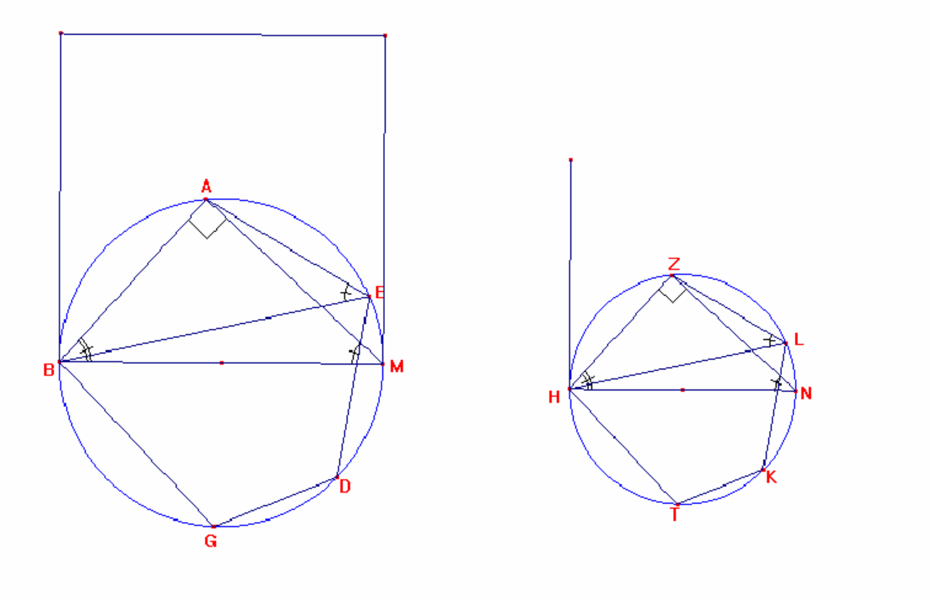


VI-20 *Los polígonos semejantes se dividen en el mismo número de triángulos semejantes con la misma razón que los totales y son entre sí como las razones duplicadas de los lados homólogos*

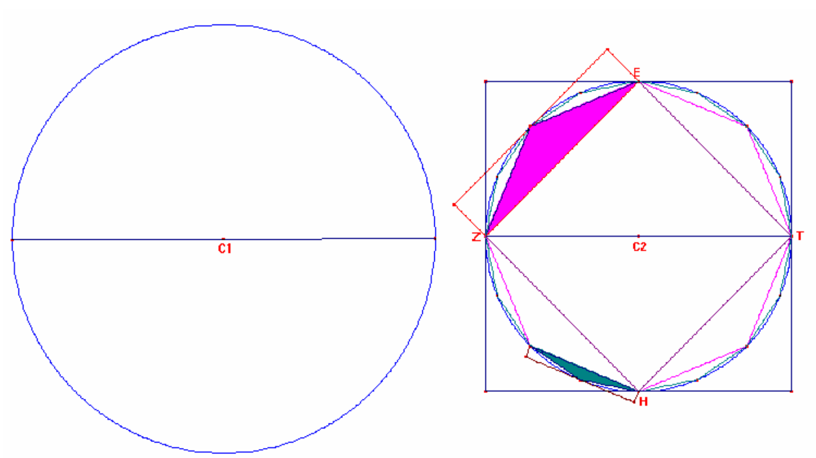


En esta proposición, Euclides reduce el problema a la semejanza entre triángulos, establecida con las proposiciones VI-5, VI-6, VI-7 y VI-19. La intención no es encontrar el área del polígono, pues este problema ya había sido abordado en los libros I y II, el interés de Euclides está en comparar áreas de polígonos semejantes, como un primer paso para comparar luego áreas de polígonos semejantes con *infinitos lados*, como efectivamente se evidencia en la proposición 1 del libro XII, preparatoria de la cuestión del área del círculo: *Los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como el cuadrado de los diámetros*.

[6]En la demostración de esta proposición se recurre a las proposiciones I-41 y VI-4 y a la definición 5 del libro V, considerada la base de la teoría de proporciones: *Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.*



Por último, con la proposición XII-2: *Los círculos son entre sí como el cuadrado de sus diámetros*, Euclides finaliza su estudio sobre áreas de figuras planas, haciendo uso por primera vez del método de exhaución, hoy denominado de paso al límite, y varios de los resultados expuestos anteriormente[7].



Como vemos, el concepto de área en Euclides no requiere el uso de números ni de fórmulas, pero sí enfatiza en el concepto de área como la equivalencia de figuras que tienen igual descomposición en figuras congruentes.

2. El Concepto de área en Hilbert

El libro *Fundamentos de la Geometría*, de David Hilbert, publicado por primera vez en 1899, pone el punto final al desarrollo axiomático de la geometría, dejando de lado

[7] Un estudio detallado de esta proposición se encuentra en Luque, C., Mora, M., Torres, J. *Euclides y el círculo*, En: memorias XIV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y II Encuentro de Aritmética.

los significados habituales de los conceptos geométricos, que son útiles para descubrir y aprender teoremas, pero que no tienen importancia alguna para su demostración, usa como términos no definidos: punto, recta, plano y las relaciones entre ellos: estar situado entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo.

En el primer capítulo se presentan los axiomas y algunas de sus primeras consecuencias, están divididos en cinco grupos:

I. Axiomas de pertenencia

I 1. Dados dos puntos A, B existe siempre una recta, a, a la cual pertenece cada uno de los dos puntos A, B.

I 2. Dados dos puntos A, B no existe más de una recta, a la cual pertenece cada uno de los dos puntos A, B.

I 3. Sobre una recta, existen siempre al menos dos puntos. Existen por lo menos tres puntos no situados en línea recta.

I 4. Dados tres puntos A, B, C cualesquiera no situados sobre la misma recta, existe siempre un plano al cual pertenece cada uno de los tres puntos. Para cada plano existe siempre un punto que pertenece al plano.

I 5. Dados tres puntos cualesquiera A, B, C no situados sobre la misma recta, no existe más de un plano al cual pertenece cada uno de los tres puntos A, B, C. I 6. Cuando dos puntos A, B de una recta a están sobre un plano α, cada punto de la recta a pertenece al plano α.

I 7. Cuando dos planos tienen un punto A común, todavía tienen, al menos, otro punto común B.

I 8. Existen, al menos, cuatro puntos no situados en un plano.

Este conjunto de axiomas (también llamados de enlace) establecen las relaciones que existen entre los puntos, las rectas y los planos.

II. Axiomas de orden

II 1. Cuando un punto B está situado entre un punto A y un punto C, y A, B, C son tres puntos distintos de una recta y además también B está situado entre C y A.

II 2. Dados dos puntos A y C, existe siempre al menos un punto B sobre la recta AC, de tal modo que C está situado entre A y B.

II 3. De tres puntos cualesquiera de una recta no hay más de uno situado entre los otros dos.

II 4. Sean A, B, C tres puntos dados no situados sobre una recta y a una recta en el plano ABC, que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C: cuando la recta a pasa por un punto del segmento AB, pasa también por un punto del segmento AC o por un punto del segmento BC.

Los axiomas de orden definen el concepto *estar entre* y posibilita la ordenación de los puntos sobre una recta.

III. Axiomas de congruencia

III 1. Si A, B son dos puntos de una recta a y además es A' un punto de la misma o de distinta recta a', puede encontrarse siempre sobre un lado determinado de a', un punto B' tal que el segmento AB sea congruente o igual al segmento $A'B'$.

III 2. Si un segmento $A'B'$ y un segmento $A''B''$ son congruentes con el mismo segmento AB, también el segmento $A'B'$ es congruente con el $A''B''$.

III 3. Sean AB y BC dos segmentos de la recta a sin puntos comunes y, de otra parte, $A'B'$, $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta a o sobre otra distinta a' también sin puntos comunes; si $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$, entonces $AC \equiv A'C'$.

III 4. Dados un ángulo $\angle(h, k)$ en un plano α, una recta a' en un plano β, y una de las regiones de β determinadas por a'; representemos por h' una semirrecta de a' que parte de O'. Entonces, existe en el plano β una única semirrecta k' tal que $\angle(h,\, k)$ sea congruente, o igual, con $\angle(h',\, k')$ y tal que todos los puntos interiores del ángulo $\angle(h',\, k')$ estén situados en la región dada con respecto a a'. Además todo ángulo es congruente consigo mismo.

III 5. Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican las congruencias

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'\,,$$

también verifican la congruencia: $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

IV. Axioma de las paralelas.

IV. (Axioma de Euclides). Sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a: en el plano determinado por a y A existe a lo más una recta que pasa por A y no corta a a.

IV*. (Axioma de las paralelas en sentido riguroso). Sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a: en el plano determinado por a y A existe una y sólo una recta que pasa por A y no corta a a.

V. Axiomas de continuidad

V1. (Axioma de la medida o de Arquímedes). Si AB y CD son dos segmentos cualesquiera, existe siempre sobre la recta AB un número de puntos $A_1, A_2, A3, \ldots, A_n$, tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ son congruentes con CD y el punto B está situado entre A y A_n.

V1*. (Axioma de la medida o de Arquímedes para el cálculo de segmentos). Si AB y a son dos segmentos cualesquiera de una recta, existe siempre sobre la misma un número de puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de modo que B está situado entre A y A_n y los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ son iguales a a en el sentido del cálculo de segmentos fundado en los axiomas I, II, IV* y el teorema de Desargues.

V2. (Axioma de la compleción lineal). El conjunto de los puntos de una recta provisto de las relaciones de orden y de congruencia, no es susceptible de ampliación alguna en la que sean válidas las relaciones precedentes y las propiedades fundamentales de orden lineal y de congruencia deducidas de los axiomas I - III y del axioma V1.

V2* (Axioma de la compleción lineal para el cálculo de segmentos). El conjunto de los puntos de una recta provisto de la relación de orden, no es susceptible de ampliación alguna en la que sea válida esta relación y las propiedades fundamentales de orden lineal deducidas de los axiomas I - III y del axioma V1.

2.1. Congruencia de segmentos y de ángulos

Los axiomas de congruencia definen el concepto de congruencia y el de movimiento, lo que posibilita el transporte y la suma de segmentos y también, el transporte y la suma de ángulos.

Entre otras cosas demuestra que la relación de congruencia es de equivalencia y los teoremas[8]:

11. En un triángulo con dos lados congruentes (isósceles), los ángulos opuestos a ellos son congruentes.

12. *El primer teorema de congruencia de triángulos*: Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'BC'$ en el caso de que sean válidas las congruencias: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle A \equiv \angle A'$.

13. *El segundo teorema de congruencia de triángulos*: Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$, en el caso de que sean válidas las congruencias $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$.

14. Si un $\angle ABC$ es congruente con otro $\angle A'B'C'$, el adyacente del primero es congruente con el adyacente del segundo.

18. *El tercer teorema de congruencia de triángulos*: Si en dos triángulos los lados correspondientes son congruentes, los triángulos son congruentes.

19. Dos ángulos congruentes con un tercero son congruentes entre si.

En el teorema 20 establece la comparación de la magnitud del ángulo y con ello demuestra en el teorema 21, que todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.

El teorema 22 afirma que: un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los dos ángulos del triángulo no adyacentes a él y como consecuencias: en todo triángulo el mayor lado se opone al mayor ángulo, un triángulo con dos ángulos iguales es isósceles y todo segmento es bisecable.

2.2. La teoría de las proporciones

En el tercer capítulo de los Fundamentos aparece la teoría de las proporciones donde se introducen los números reales y se demuestra el teorema de Pascal,

Sobre los lados de un ángulo de vértice O considérense 6 puntos dispuestos así: C', B', A', O, C, B, A. Sí BC' es paralela a $B'C$, y, AC' es paralela $A'C$, entonces, AB' es paralela a $A'B$.

Este teorema (Teorema 40) permite definir un cálculo de segmentos (suma y multipicación) que cumple las reglas de los números reales, e introduce los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos, demostrando en particular:

41. Si a, b y a', b' son lados homólogos correspondientes de triángulos semejantes, entonces se verifica la proporción $a : b = a' : b'$.

42. *Teorema fundamental en la teoría de las proporciones*: Si 2 paralelas cortan sobre los lados de un ángulo cualquiera los segmentos a, b, a', b', entonces, se tiene la proporción

[8] La numeración de los teoremas que mencionamos es la de los Fundamentos.

$a : b = a' : b'$.

Recíprocamente, si 4 segmentos a, b, a', b' satisfacen la proporción $a : b = a' : b'$, y, si a, a', b, b' están sobre los lados de un ángulo, entonces, las rectas que unen los extremos de a y b, y, los de a' y b' son paralelas.

Con los axiomas de ordenación establece una dirección positiva y una negativa en la recta, y con ello a los segmentos, para definir sistemas de coordenadas en el plano y reducir los desarrollos posteriores a la geometría analítica.

Al añadir el axioma de Arquímedes, es posible asignar números reales a los puntos de una recta cualquiera en el espacio y para cada número del cuerpo de números algebraicos A existe un punto de la recta que le corresponde.

Si vale el axioma de la compleción lineal, V2, entonces, a cada número real le corresponde un punto de la recta.

2.3. El concepto de área

En el capítulo cuarto de los Fundamentos se desarrolla la teoría del contenido superficial en el plano, donde el teorema de Pascal juega un papel fundamental y en él se introducen los conceptos de equidescomponibilidad y equicomplementariedad de polígonos.

Hilbert define, dos polígonos *equidescomponibles* cuando se pueden descomponer en un número finito de triángulos, los cuales, por parejas, son congruentes entre sí, dos polígonos simples *equicomplementarios* cuando se les puede agregar un número finito de polígonos equidescomponibles, de modo que los polígonos compuestos, sean equidescomponibles y demuestra los teoremas:

43. Si dos polígonos son equidescomponibles con un tercero, entonces, son equidescomponibles entre sí y si dos polígonos son equicomplementarios con un tercero, entonces, son equicomplementarios entre sí.

44. Dos paralelogramos de igual base e igual altura son equicomplementarios.

45. Todo triángulo es equidescomponible con un paralelogramo de la misma base y con altura igual a la mitad de la del triángulo.

46. Dos triángulos con igual base e igual altura son equicomplementarios.

La demostración de los teoremas 43, 44 y 46 necesitan del axioma de Arquímedes. En una geometría donde no se cumpla este axioma hay parejas de triángulos con igual base e igual altura, equicomplementarios, pero no equidescomponibles[9]. El teorema de Pitágoras también es consecuencia de los teoremas 43, 44 y 46.

El teorema 47 establece que para un triángulo cualquiera y, por lo tanto para cualquier polígono simple, puede construirse siempre un triángulo rectángulo con uno de sus catetos igual a 1 que sea equicomplementarios con el triángulo o con el polígono y en el 48 que dos triángulos equicomplementarios de igual base, tienen también igual altura.

[9]HILBERT, D., *Fundamentos de la Geometría*. 1899. Traducción española de la séptima edición alemana, 1930, publicada en 1953 en Madrid por el Instituto Jorge Juan y reimpresa, 1996, en Madrid por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas con una introducción de José Manuel Sánchez Ron. p. 80.

Euclides demuestra este teorema (Elementos I 39) con base en la noción común 5: *El todo es mayor que la parte*; lo cual equivale a introducir un nuevo axioma. Para evitarlo, Hilbert introduce la noción de área. Así la teoría del contenido superficial tiene como base solamente los axiomas planos, sin el axioma de Arquímedes. Afirma que en *un triángulo cualquiera, el producto de un lado por la altura correspondiente no depende del lado* y como consecuencia *el semiproducto de la base por la altura de un triángulo es un segmento* que llama *característico*.

Con estas herramientas, Hilbert introduce las nociones de área de un triángulo ABC, recorrido en sentido positivo y la nota $[ABC]$ y de área de un triángulo recorrido en sentido negativo cuya notación es $[CBA]$ y demuestra que,

49. *Si un punto O está situado fuera de un triángulo ABC, entonces se tiene la relación:* $[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA]$.

50. *Si un triángulo se divide de cualquier manera en un número finito de triángulos parciales, entonces, el área del triángulo recorrido en sentido positivo es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos parciales recorridos en sentido positivo.*

Y con esto define el área de un polígono simple recorrido en sentido positivo como la suma de las áreas de los triángulos recorridos positivamente en que queda dividido por una determinada descomposición y concluye que:

51. *Polígonos equidescomponibles tienen igual área y polígonos equicomplementarios tienen igual área.*

52. *Dos polígonos equicomplementarios tienen igual área y dos polígonos de igual área son equicomplementarios.*

53. *Al descomponer, mediante rectas, un rectángulo en diversos triángulos y suprimir uno de los triángulos, no es posible completar el rectángulo con los triángulos restantes.*

Como vemos en la teoría del contenido superficial, el teorema de Pascal es piedra angular, se utiliza en la demostración de los teoremas 48, 50 y 51; pero, de otra parte, puede ser deducido de los teoremas 46 y 48. Hilbert reconoce además que un polígono situado completamente en el interior de otro polígono, tiene siempre menor área que éste.

2.4. Medida de áreas

Hemos establecido que el cálculo de segmentos se corresponde con el de los números reales, podemos asignar a cada segmento un número positivo determinado, de manera que:

1. A segmentos congruentes correspondan números iguales.
2. Si B es un punto interior del segmento AC y a los segmentos AB y BC le corresponden los números a y b respectivamente, entonces al segmento AC le corresponde el número $a + b$.
3. A algún segmento OO' le corresponde la unidad.

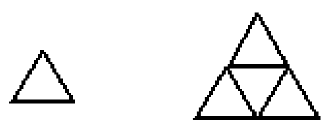
La relación de congruencia es de equivalencia, cada una de sus clases la llamamos una *longitud* y el número real positivo que le corresponde a cada segmento lo llamamos la *medida de la longitud del segmento*.

Análogamente, la relación de equidescomponibilidad es de equivalencia, a cada clase de equivalencia la llamamos *un área* y a cada área le hacemos corresponder un número que es *la medida de su área*.

Como en un triángulo cualquiera el producto de un lado por la altura correspondiente no depende del lado elegido, entonces el *semiproducto de un lado por la altura correspondiente* es un número positivo a éste es la medida del *área del triángulo* y se cumple que:

1. Triángulos congruentes tienen igual área.
2. Si un triángulo se divide en un número finito de triángulos sin puntos interiores comunes, el área del triángulo es la suma de las áreas de cada uno de los triángulos que lo componen.
3. Si dos triángulos son semejantes *la razón de sus áreas es el cuadrado de la razón de dos lados cualesquiera correspondientes*.

La escogencia del semiproducto de un lado por la altura correspondiente para la medida del área de un triángulo, es una manera de escoger la *unidad de área*, que habitualmente es la de un *cuadrado de lado unidad*, pero esto no es necesario, pues podemos elegir otra; por ejemplo, un triángulo equilátero de lado uno:



Así, si un triángulo tiene lado 2, su área es $1+3=4$, para el de lado 3, es $1+3+5=9$ y así sucesivamente; entonces, para un triángulo de lado L, la medida del área, con unidades triangulares es:

$$A = 1+3+5+\cdots+(2L-1) = L^2$$

Pero si optamos por un cuadrado de lado uno como unidad de medida, un triángulo de lado L tiene como medida del área:

$$A' = \frac{L\sqrt{3}L}{2\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

Y la medida del área de un cuadrado de lado L' con la misma unidad es L'^2.

La medida del área de un paralelogramo en unidades triangulares es proporcional a su altura (H) y a su base (L), esto es:

$$A'' = kHL$$

Pero, la medida del área de un paralelogramo de lado L construido con dos triángulos equiláteros es $2A$, y como

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

Entonces

$$A'\prime = k\frac{\sqrt{3}}{2}LL = 2L^2$$

de donde

$$k = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

3. El concepto general de medida

Maurice Fréchet (1915) generalizó la teoría de la medida en un intento para describir de manera precisa nuestra idea intuitiva de tamaño, para que éste tuviera significado, incluso en ambientes tan generales como la teoría de conjuntos.

Inicialmente debe escoger las condiciones para que un conjunto se pueda medir, esto lleva al concepto de *σ-álgebras de conjuntos* de un espacio abstracto, esto es una familia de subconjuntos de un espacio base con un buen comportamiento de las operaciones usuales de la teoría de conjuntos incluidos los procesos infinitos numerables.

A cada miembro de la familia se le asigna un número real no negativo (o infinito), esta aplicación se llama *medida*, es aditiva y en algunos casos invariante con respecto a algún tipo de transformaciones en el espacio base.

3.1. σ- álgebras

Sea X un conjunto, una σ-álgebra de X es una familia Λ de subconjuntos de X que verifica:

a) $X \in \Lambda$

b) Si $E_k \in \Lambda$ para $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Lambda$$

c) Si $P \in \Lambda$ y $Q \in \Lambda$, entonces $P - Q \in \Lambda$.

La condición *c*) puede cambiarse por *c'*) Si $P \in \Lambda$ entonces $P^c \in \Lambda$, puesto que $P - Q = P \cap Q^c$. El par (X, Λ) se llama un *espacio medible*.

Una consecuencia inmediata es que la intersección enumerable de elementos de Λ pertenece también a Λ. Además la intersección de cualquier familia de σ-álgebras de X es una σ-álgebra de X.

Ejemplos:

1. Para cada conjunto X cualquiera, existen dos σ-álgebras triviales:

$$\{\varnothing, X\} \quad \text{y} \quad \wp(X).$$

2. Una σ-álgebra del conjunto $\{a, b, c, d\}$ es:

$$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

Si ε una familia de subconjuntos de X. La intersección de todas las σ-álgebras de X que contiene a ε se llama *la σ-álgebra engendrada por ε.*

La σ-álgebra de R^n engendrada por la familia de los conjuntos abiertos se llama σ-álgebra de Borel, y sus elementos, conjuntos de Borel, ella es la más pequeña de las σ-álgebras que contiene a los intervalos reales $(a, b]$, donde se define la medida de Lebesgue- Stieltjes que sirve de base para la integral del mismo nombre.

3.2. Medidas

Sea (X, Λ) un espacio medible y $\mu : \Lambda \to [0, \infty]$ una aplicación con las propiedades:

a) $\mu(\varnothing) = 0$.

b) μ es *contablemente aditiva*, es decir, para cada sucesión $\{E_k\}$ de elementos de Λ tal que $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$, se verifica

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

La aplicación μ se llama *medida*, la tripla (X, Λ, μ) un espacio de medida, y a los elementos de Λ se les denomina *conjuntos medibles*, el valor de $\mu(E)$ es la *medida* de E.

Una medida μ se llama *finita* si $\mu(X) < \infty$, *σ-finita* si X es la unión de una familia numerable de conjuntos de μ-medida finita, y *completa* si es μ-medible cada subconjunto de un conjunto de μ-medida cero.

Una propiedad relativa a los elementos de X se verifica para *μ-casi todo x* de X, significa que el conjunto de los elementos de X que no tienen tal propiedad tiene μ-medida cero.

Ejemplos:

1. Sea X un conjunto, y $\Lambda = \wp(X)$.

$$\mu : \wp(X) \to [0, \infty]$$
$$E \to \mu(E) = \begin{cases} \#E & \text{si } E \text{ es infinito} \\ \infty & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}$$

($\#E$ es el cardinal de E) se llama la medida discreta en X. Es σ-finita si, y solamente si, X es numerable.

Cuando $\mu(X) = 1$, el espacio de medida se llama *espacio de probabilidad*. Sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$ se puede construir un espacio de probabilidad $(X, \wp(X), \mu)$ definiendo

$$\mu(E) = \frac{1}{3}\#E.$$

No tenemos como propósito profundizar sobre la teoría de la medida, sino solamente mostrar como conceptos que inicialmente manejamos de forma intuitiva dan lugar a generalizaciones que permiten precisar nuestras intuiciones y expresarlas matemáticamente. Insistimos en la necesidad de estudiar y comprender estas generalizaciones para que nuestras transposiciones a las aulas de clase en educación media y secundaria, no impliquen obstáculos conceptuales y epistemológicos en nuestros estudiantes.

Veamos ahora, la forma en que aparece el concepto de área, en algunos textos de circulación nacional.

4. El concepto de área en los textos

Reconociendo que muchas de las ideas que poseemos sobre cualquier concepto, se basan, por lo general en las concepciones inducidas por los textos, consideramos pertinente revisar la presentación que hacen algunos libros, tanto escolares (de la primaria y la secundaria) como universitarios, del concepto de área, sin pretender hacer un análisis exhaustivo, interpretamos la idea de área que presentan los autores y las posibles consecuencias que conllevan tales presentaciones.

En el siguiente cuadro listamos los textos estudiados. Enfatizamos en que el criterio para la selección de los libros analizados fue la facilidad de acceso de los mismos en nuestras bibliotecas (personales y del Departamento de Matemáticas) y que obviamente, trataran el tema en cuestión.

ESCOLARES	70′s	1. MOISE, E. et al (1972) *Serie matemática moderna Geometría*. Cali. Norma. 2. GÓMEZ, R. et al (1976) *Matemática moderna estructurada 2*. Bogotá. Norma. 3. NIÑO, H. (1978) *Delta 9*. Bogotá. Editorial Universitaria de América Ltda.
	80′s	4. LONDOÑO, N. et al (1983) *Serie Matemática progresiva Aritmética y Geometría 7*. Bogotá. Primera edición. Norma.
	90′s	5. VILLEGAS, M. et al (1991) *Matemática 2000*. Santafé de Bogotá. Voluntad. 6. CARO, V. et al (1993) *Matemática 7 Aritmética y geometría transformacional*. Santafé de Bogotá. Migema. 7. CASTELLANOS, M. (1994) *Matemática constructiva 2*.

	Actuales	8. CAMARGO, L. et al. (2004) *Espiral 2, 3 y 4*. Bogotá, D.C. Norma. 9. PALACIOS, R. et al. (2003) *Herramientas de matemáticas 3*. Bogotá, D.C. Santillana. 10. TRIVIÑO, O. et al. (2006) *Amigos de las matemáticas 2*. Bogotá, D.C. Santillana.
UNIVERSITARIOS	60′s	11. MOISE, E. et al. (1968) *Elementos de Geometría Superior*. México D.F. Compañía editorial continental. 12. MOISE, E. et al. (1970) *Geometría moderna*. Wilmington, Delaware. Addison-Wesley.
	80′s	13. CLEMENS, S. et al (1989) *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Wilmington. Adisson-Wesley Iberoamericana.
	90′s	14. CASTILLO, H. (1997) *Geometría plana y del espacio*. Santafé de Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.
	Actuales	15. GUERRERO, B. (2002) *Notas de clase Geometría en el plano y en el espacio*. Bogotá, D.C. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. 16. ISAACS, M. (2002) *Geometría universitaria*. México. Thomson Learning. 17. MARIÑO, R. (2004) *La geometría en el arte y el diseño*. Bogotá. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.

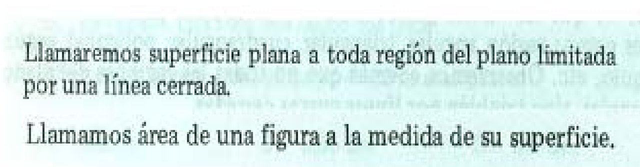
Después de leer e interpretar lo expuesto en cada libro acerca del área, encontramos que, según el nivel al que va dirigido el texto, se hacen presentaciones del área que van desde lo intuitivo hasta la ubicación del área dentro de una teoría matemática propiamente dicha pasando por definiciones de área, uso de una única unidad de medida para calcular áreas, determinación de áreas para figuras usuales, asignación de solamente números naturales a áreas de figuras, que pueden inducir a errores en el aprendizaje del concepto en cuestión. Los aspectos que establecimos a partir de nuestras observaciones son los siguientes:

1. Presentación intuitiva del área.
2. Definición del área como medida de una superficie.
3. Utilización de diversas unidades de medida.
4. Cálculo de áreas de figuras no poligonales.
5. Consideración de los números naturales como única medida de área.
6. Determinación de fórmulas para el área de figuras usuales.
7. Presentación del área dentro de una teoría matemática:
   - 7.1. El área es un número real positivo.
   - 7.2. El área asociada una función del conjunto de las figuras poligonales a los números reales.
   - 7.3. El área es una clase de equivalencia de la partición inducida por la relación de equidescomponibilidad.

Para cada uno de estos aspectos seleccionamos algunas partes extraídas de los textos listados para ejemplificar lo que queremos exponer, también presentamos algunas observaciones.

1. Presentación intuitiva del área.

Mostramos una parte del texto numerado 7. en la tabla[10], en el cual aparece dentro del contenido el tema Área en la sección dedicada a la geometría; allí se expone, después de una actividad relacionada con el recubrimiento que "*El plano cubierto por los cuadernos o por los cuadritos, se llama superficie. La medida de una superficie es el área*". En otro texto para el mismo nivel, el numerado con 8(2)[11] en la tabla, muestra algunas ideas alrededor del concepto; inicia con un problema (ver figura) que induce a la definición de área que da enseguida (presente en el siguiente aspecto).



Llamaremos superficie plana a toda región del plano limitada por una línea cerrada.

Llamamos área de una figura a la medida de su superficie.

[10]En adelante nos referiremos a cada uno de los textos de acuerdo a la numeración presente en la tabla.

[11]El número en el paréntesis indica el grado, debido a que en el numeral 8 inscribimos los libros Espiral 2, Espiral 3 y Espiral 4.

Rafael y Claudia tienen cada uno un juego de lotería. Las fichas de Rafael son rectangulares y las fichas de claudia son cuadradas.

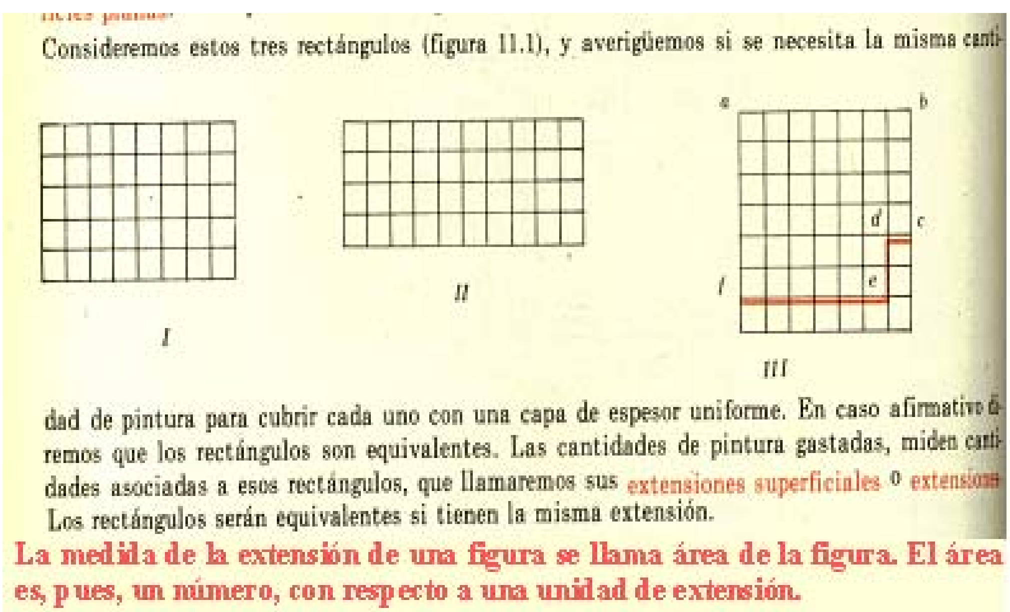
- ¿Cuántas fichas pueden colocarse en el cartón que tiene Rafael para recubrirlo totalmente? ________.
- ¿Cuántas fichas pueden colocarse en el cartón que tiene Claudia? ________.

Las fichas y son **unidades de superficie**.

Rafael y Claudia han medido la superficie de sus cartones de lotería con unidades rectangulares y cuadradas.

2. Definición del área como medida de una superficie.

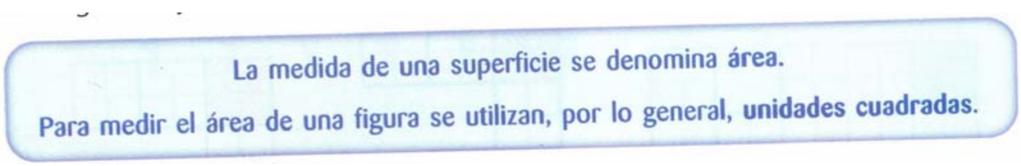
En varios libros, de distintos niveles y épocas, se define el área como la medida de una superficie, mostramos abajo algunos fragmentos de los textos 2, 4 y 8(2), respectivamente. Esta idea sobre el área es la que prevalece, los estudiantes la repiten, muchas veces sin comprensión, "*el área es la medida de una superficie*"; se asocia el área a un número, resultante de la teselación de una figura plana a partir de una unidad de medida. Sin embargo, resaltamos que una cosa es el área y otra, la medida de ésta y aunque son ideas relacionadas, no deben confundirse; recordemos que Euclides presenta en sus Elementos áreas y no establece medidas.



Consideremos estos tres rectángulos (figura 11.1), y averigüemos si se necesita la misma canti-

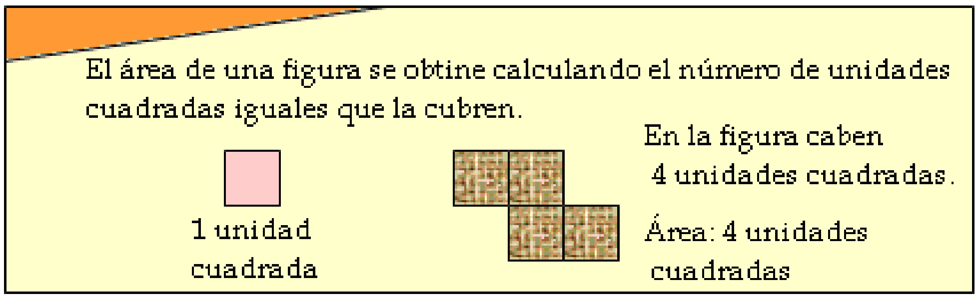
dad de pintura para cubrir cada uno con una capa de espesor uniforme. En caso afirmativo di- remos que los rectángulos son equivalentes. Las cantidades de pintura gastadas, miden canti- dades asociadas a esos rectángulos, que llamaremos sus extensiones superficiales o extensiones. Los rectángulos serán equivalentes si tienen la misma extensión.

La medida de la extensión de una figura se llama área de la figura. El área es, pues, un número, con respecto a una unidad de extensión.


La medida de una superficie se denomina área.
Para medir el área de una figura se utilizan, por lo general, **unidades cuadradas.**

3. Utilización de diversas unidades de medida.

Son muy pocos los libros donde se presentan distintas unidades de medida para calcular áreas, de hecho, hay textos que inducen a pensar en que hay una única unidad de medida; por ejemplo, en el libro 9, se afirma que:


El área de una figura se obtine calculando el número de unidades cuadradas iguales que la cubren.

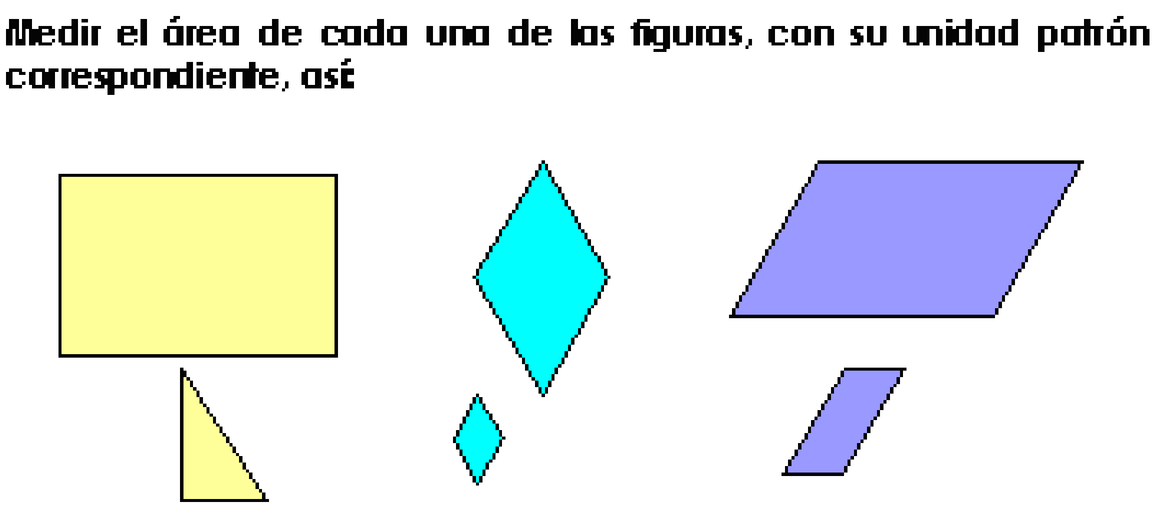
En la figura caben 4 unidades cuadradas.

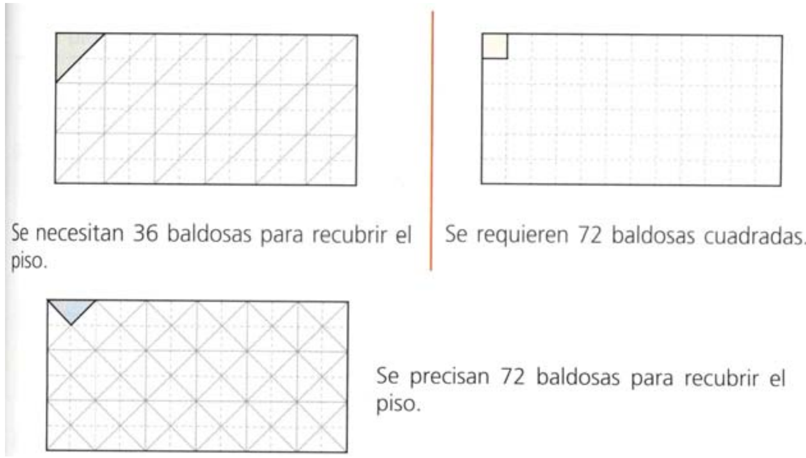
1 unidad cuadrada

Área: 4 unidades cuadradas

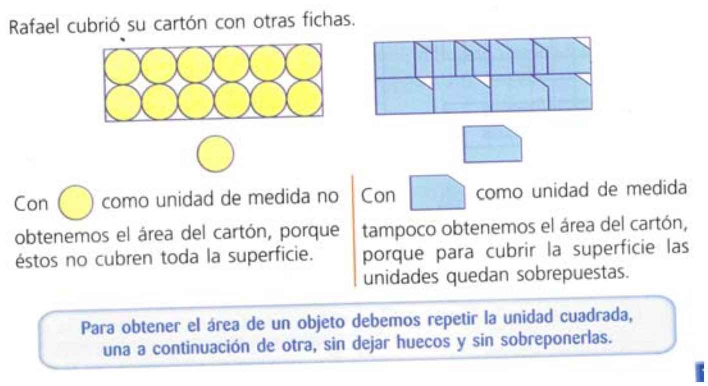
Esta presentación induce a pensar en el cuadrado como única unidad de medida posible, principalmente por el uso de la frase "*el área de una figura se obtiene...,*", en vez de decir "*el área de una figura se puede obtener...*" aún más cuando en los ejercicios y en los ejemplos propuestos sólo hacen mención a esta unidad de medida.

En varios libros se enfatiza en que el área depende de la unidad de medida elegida; sin embargo, de entre los libros revisados sólo el 5, el 8(3) y el 10 presentan actividades o ejemplos para que los estudiantes exploren con unidades de medida distintas; presentamos dos partes de los libros 5 y 8 (3), respectivamente:


Medir el área de cada una de las figuras, con su unidad patrón correspondiente, así



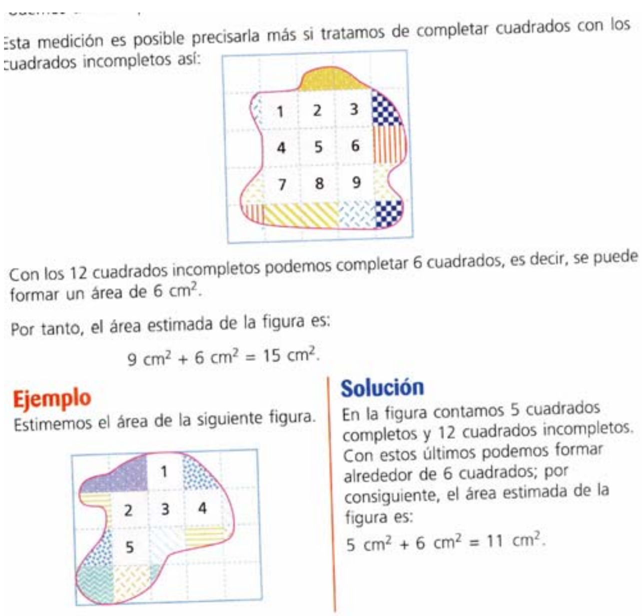
Por otro lado, una cuestión que encontramos en relación con el uso de la unidad de medida es la siguiente, tomada de 8(2):



De acuerdo con la información presentada en la figura, consideramos que ésta puede inducir errores, pues sugiere que la circunferencia y el pentágono no son unidades de medida adecuadas para medir el área de una región rectangular, pero esto no es así, la dificultad para calcular el área del cartón con la circunferencia no tiene que ver con ésta sino con el uso que se hace de la misma; de manera similar sucede con el pentágono, la sobreposición de la figura unidad no está relacionada con su elección.

4. Cálculo de áreas de figuras no poligonales.

Aunque el cálculo del área no es propio de figuras poligonales (definidas en el libro de Moise (1970, p. 291) como *un número finito de regiones triangulares en un plano, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento*), de hecho, calculamos áreas de círculos o áreas de segmentos parabólicos, como lo hizo Arquímedes vario siglos atrás; en la mayoría de los libros observados prevalece el estudio del área de figuras poligonales y de círculos (aunque el área de éste se halla en una sección independiente); sólo en uno de los libros consideran la determinación de áreas de figuras no usuales, éste es el 8(2):



Esta medición es posible precisarla más si tratamos de completar cuadrados con los cuadrados incompletos así:

Con los 12 cuadrados incompletos podemos completar 6 cuadrados, es decir, se puede formar un área de 6 cm^2.

Por tanto, el área estimada de la figura es:

$$9\ cm^2 + 6\ cm^2 = 15\ cm^2.$$

Ejemplo

Estimemos el área de la siguiente figura.

Solución

En la figura contamos 5 cuadrados completos y 12 cuadrados incompletos. Con estos últimos podemos formar alrededor de 6 cuadrados; por consiguiente, el área estimada de la figura es:

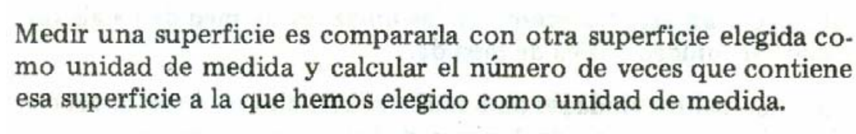
$5\ cm^2 + 6\ cm^2 = 11\ cm^2.$

5. Consideración de los números naturales como única medida de área.

Algunos de los textos observados asignan solamente números naturales al área de una figura, inicialmente interpretamos que esto se debía al grado al que iba dirigido el tópico; por ejemplo, es comprensible que no se utilicen números fraccionarios o irracionales para calcular áreas en 2º de primaria; sin embargo, en textos dirigidos a niños de 7º grado, quienes están en capacidad de utilizar, al menos, números fraccionarios, tampoco los utilizan en el cálculo de áreas y sí enfatizan en que el área está asociada a un número natural; por otro lado, llama la atención que si la teoría matemática que sustenta una presentación en un texto está basada en *el área de una región poligonal como el número real que le corresponde a una región poligonal*, al trabajar sólo con números naturales y no volver a tratar el tópico en otros cursos más avanzados, como se observa en 8, queda restringida la idea de área. No obstante, consideramos que, debido a que el concepto de número real es verdaderamente inaccesible a la gran mayoría de los escolares, debería ser otra la teoría matemática en la que se basaran los textos.

Mostramos dos ejemplos de textos en los cuales, esta idea se explicita:

Este es un aparte del libro 4:



Medir una superficie es compararla con otra superficie elegida como unidad de medida y calcular el número de veces que contiene esa superficie a la que hemos elegido como unidad de medida.

En el libro 6 aparece lo siguiente:

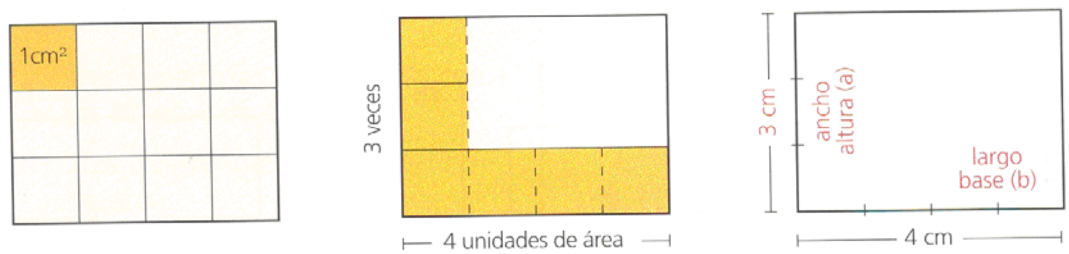
> "*Para encontrar el área de una región se puede pensar en dividirla en regiones cuadradas unitarias y luego contar el número de estas unidades...*"

6. Determinación de fórmulas para el área de figuras usuales.

El propósito de la mayoría de textos -diez de los diecisiete (1, 2, 4, 5, 6, 8,11, 12, 13 y 15) es precisar las fórmulas usuales para el área de figuras geométricas, tales como: triángulo, rectángulo, paralelogramo, trapecio, rombo, polígonos regulares y circunferencia (el mayor número de veces, en este orden). Algunos de los libros inducen al lector a encontrar las fórmulas para el área de algunas figuras, presentando ejemplos o descomponiendo las figuras en otras, cuyas partes se puedan relacionar con fórmulas ya conocidas; sin embargo, en todos los casos, se toma como unidad de medida el cuadrado como base, no se explora, por ejemplo, el uso de otra unidad distinta que permita el hallazgo de fórmulas alternativas.

Algunas evidencias de lo anterior son:

De 8:



En el rectángulo contamos 12 cm^2.

3 veces (4 cm^2) = 12 cm^2

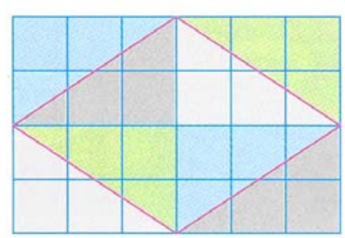
4 cm × 3 cm = 12 cm^2

b × a = 12 cm^2

El área de un rectángulo se halla multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

Área = base × altura

A = b × a



Teníamos un rectángulo y ahora tenemos dos rombos de la misma área. Significa que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo.

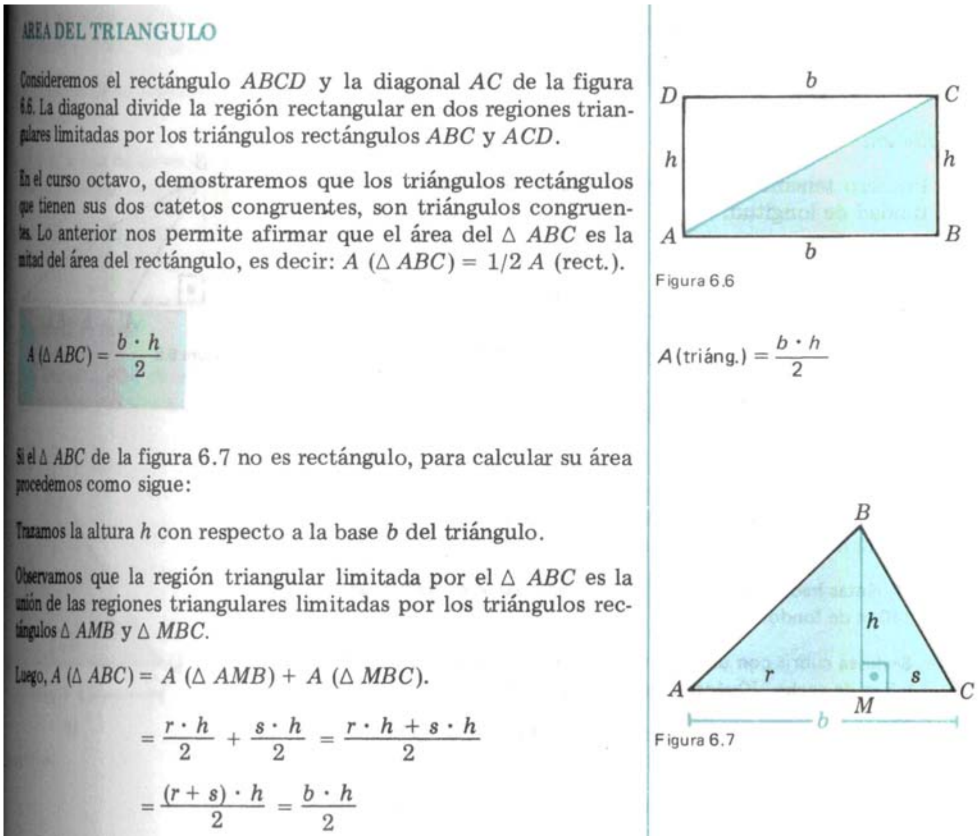
$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Como la base y la altura del rectángulo corresponden a las diagonales del rombo, entonces:

$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2} = \frac{D \times d}{2}$$

En la primera imagen del texto se puede observar que a partir de un ejemplo se establece una fórmula para determinar el área del rectángulo. En la segunda imagen se ve una descomposición del rombo en triángulos, para a partir del área de éstos, establecer el área del rombo.

De 4:



ÁREA DEL TRIANGULO

Consideremos el rectángulo $ABCD$ y la diagonal AC de la figura 6.6. La diagonal divide la región rectangular en dos regiones triangulares limitadas por los triángulos rectángulos ABC y ACD.

En el curso octavo, demostraremos que los triángulos rectángulos que tienen sus dos catetos congruentes, son triángulos congruentes. Lo anterior nos permite afirmar que el área del $\triangle\, ABC$ es la mitad del área del rectángulo, es decir: $A\,(\triangle\, ABC) = 1/2\; A$ (rect.).

$$A\,(\triangle\, ABC) = \frac{b \cdot h}{2}$$

Figura 6.6

$$A\,(\text{triáng.}) = \frac{b \cdot h}{2}$$

Si el $\triangle\, ABC$ de la figura 6.7 no es rectángulo, para calcular su área procedemos como sigue:

Trazamos la altura h con respecto a la base b del triángulo.

Observamos que la región triangular limitada por el $\triangle\, ABC$ es la unión de las regiones triangulares limitadas por los triángulos rectángulos $\triangle\, AMB$ y $\triangle\, MBC$.

Luego, $A\,(\triangle\, ABC) = A\,(\triangle\, AMB) + A\,(\triangle\, MBC)$.

$$= \frac{r \cdot h}{2} + \frac{s \cdot h}{2} = \frac{r \cdot h + s \cdot h}{2}$$

$$= \frac{(r+s) \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Figura 6.7

Aquí, se presenta una demostración del área del triángulo basada en el área de otros triángulos.

7. Presentación del área dentro de una teoría matemática:

Teniendo como base que cualquier propuesta didáctica, incluidos los libros de texto, debe estar sustentada en una teoría matemática, específicamente cada concepto tratado debe responder al conocimiento matemático propiamente dicho, observamos en cada libro de texto los sustentos matemáticos correspondientes a la idea de área; como ya hemos presentado, en los aspectos anteriores, no son muchos los textos que se fundamentan en una teoría matemática, por lo menos consistente.

Algunas de las teorías halladas son:

a. El área es un número real positivo.

Tanto en 1, como en 12 y 13, encontramos que los autores establecen la idea de área a partir de postulados y se explicita el área como un número real positivo, como puede apreciarse en la siguiente imagen, tomada de 1.

POSTULADO 19. El postulado del área

A toda región poligonal le corresponde un número positivo único.

Definición

El *área* de una región poligonal es el número que se le asigna según el postulado 19. El área de la región R se denota por aR. Esto se lee *área de R*.

POSTULADO 20. El postulado de la congruencia

Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares determinadas por ellos tienen la misma área.

POSTULADO 21. El postulado de adición de áreas

Supongamos que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2. Supongamos que R_1 y R_2 se intersecan a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos. Entonces, $aR = aR_1 + aR_2$.

POSTULADO 22. El postulado de la unidad

El área de una región cuadrada es el cuadrado de la longitud de su lado.

b. El área asociada una función del conjunto de las figuras poligonales a los números reales.

En otros textos, los señalados en la tabla con 3, 11 y 15, se establece que el área se halla asociada a una función cuyo dominio es el conjunto de las figuras poligonales y recorrido, los números reales, podríamos decir que es una visión más general del aspecto 7.a. Algunas de las evidencias, de cada libro, respectivamente son:

> *"Asignaremos a cada superficie poligonal un número y solamente uno de R_+, estableciendo una aplicación:*
>
> $$S : P \to R_+^*$$
>
> *Si $P \in P$ entonces la imagen de P según la aplicación s, es un número real estrictamente positivo; este número se llama: Area, de la superficie poligonal y se anota:*
>
> $$s(P) = n, \ n \in R_+^{*\prime}$$
>
> *Posterior a esto se establecen algunas condiciones:*
>
> - *"Si dos superficies poligonales son congruentes, sus áreas resultan iguales.*
> - *Dadas dos superficies planas, puede ocurrir,*
>
> $$a) \quad P_1 \cap P_2 = [ab]$$

$$b) \quad P_1 \cap P_2 = \varnothing$$
$$P_1 \cap P_3 = \{c\}$$
$$c) \quad P_1 \cap P_2 = P_4$$

a) La intersección es un ***segmento*** *o un* ***punto****. b) La intersección es* ***vacía****. c) La intersección* ***no es*** *vacía, ni es un punto ni un segmento. La intersección es otra superficie poligonal.”*

“La teoría del área es más fácil de manejar para el caso donde las figuras con las que tratamos son regiones poligonales. Y el modo más fácil de formar la teoría es suponer que se da una función área, bajo la cual a cada región poligonal corresponde un número positivo llamado su área. Así pues, sea R el conjunto de todas las regiones poligonales y sumemos a nuestra estructura la función

$$\alpha : R \to R$$

Por lo tanto, la estructura total en nuestra geometría es ahora $[S, L, P, d, m, \alpha]$ ***(S: Puntos, L: líneas, P: planos, d y m son funciones con valores reales, definidas para pares de puntos y de ángulos, respectivamente)...*** *A-1. α es una función $\boldsymbol{R} \to R$, donde $\boldsymbol{R}$ es el conjunto de todas las regiones poligonales y R es el conjunto de todos los números reales...”*

En 15, la autora hace una presentación de la geometría del plano y del espacio desde el punto de vista de Hilbert; expone los axiomas y los elementos no definidos con base en los cuales desarrolla los conceptos, los teoremas y elementos principales de la geometría elemental moderna. Guerrero supone el conocimiento sobre los números reales y sus operaciones al presentar la geometría, dado que el mismo Hilbert, en sus Fundamentos, supuso el conocimiento de la aritmética y *la existencia de los números reales como un conjunto de números cuyos elementos se podían ordenar según su magnitud* (Hilbert, citado por Guerrero, p. 10) para la elaboración de los fundamentos de la geometría.

Antes de hablar sobre áreas, se desarrolla un capítulo llamado Medida en el plano, allí se enuncia que “*Los segmentos, ángulos y regiones poligonales tiene una medida dada por una magnitud que puede ser su longitud, su amplitud o su área. Estas cantidades se conocen con el nombre de magnitudes geométricas y están dadas por números reales. Sin embargo no debemos olvidar que las mediciones geométricas descansan sobre el principio de la congruencia.*”

La continuidad de las magnitudes geométricas, es decir el poder dividir una cantidad en un número cualquiera de partes iguales nos permite establecer el concepto de medida rigurosamente”; además, se presentan los axiomas de continuidad (a saber, el axioma de Arquímedes, el axioma de Cantor), la medida de segmentos y ángulos y un estudio sobre proporciones.

En el capítulo 6 del libro (titulado Semejanza) se halla una sección dedicada al área de polígonos, iniciando con el Área de triángulos, allí se señala que, debido a que uno de los teoremas de la sección anterior citaba que: "*En cualquier triángulo el producto el producto de una base por la altura correspondiente es independiente de la elección de la base*"(p. 135), se tiene que "*el semiproducto de un lado por su altura correspondiente es para cada triángulo ΔABC un número positivo s, constante. Ese número positivo recibe el nombre de área del triángulo $\Delta ABC \ldots$*" (p. 138); a partir de esto se establece el área del triángulo, la cual satisface que:

- *"triángulos congruentes tienen igual área.*
- *"Si un ΔABC se divide en un número finito de triángulos sin puntos interiores comunes, el área del ΔABC es igual a la suma de las áreas de cada uno de los triángulos"*

Después de esto se establecen como teoremas los siguientes:

1. *El área de un triángulo rectángulo es igual al semi-producto de sus catetos.*
2. *Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón de sus áreas es el cuadrado de dos lados cualesquiera correspondientes. (pp. 139-140)*

Posterior a estos teoremas están las siguientes definiciones, correspondiente al área de los polígonos:

> *"El área $A(P)$ de un polígono simple es la suma de las áreas de todos los triángulos en que queda dividido el polígono por una determinada descomposición"*
> *"Entonces dados los polígonos en el plano podemos definir una correspondencia tal que a cada polígono P le asigna un número positivo llamado el área de P que satisface las siguientes condiciones:*
>
> 1. *A cada polígono le corresponde un único número positivo.*
> 2. *A polígonos congruentes corresponden números iguales.*
> 3. *Si un polígono es dividido en un número finito de polígonos con a lo sumo un lado en común, entonces el área del polígono es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman"(pp. 140-141)*

c. El área es una clase de equivalencia de la partición inducida por la relación de equidescomponibilidad.

Empero, en el texto 2 después de establecer algunas fórmulas para hallar el área de algunos polígonos, trata el área de figuras equicompuestas (aquellas que *se componen, o son unión, del mismo número de polígonos dos a dos congruentes y sin puntos interiores comunes)*, lo cual es usado para deducir las fórmulas del área del paralelogramo, triángulo, trapecio, rombo y polígonos regulares; se concluye el capítulo con el estudio del círculo y la fórmula del área del círculo, la cual se deduce haciéndose una analogía con la proposición 2 del libro XII de Euclides.

Como se señaló, en 14, se establece qué es la equidescomponibilidad y se sustenta el área bajo esta relación de equivalencia como se muestra en las siguientes imágenes, correspondientes a algunos apartes del texto en cuestión.

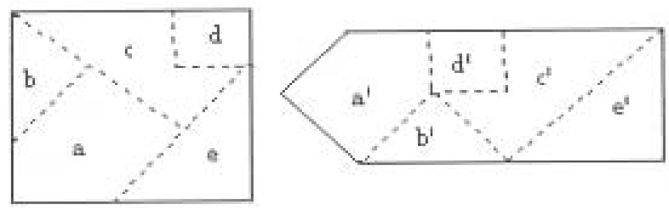


Figura 80

que son igualmente extensas, mas no congruentes. Pero si dos regiones se pueden descomponer en sub-regiones respectivamente congruentes, pero no necesariamente dispuestas de la misma manera, entonces, es intuitivamente claro que dichas regiones son de la misma área. Por ejemplo, las dos regiones de la Figura 80 son de la misma área; las sub-regiones distinguidas con la misma letra son congruentes. Dos regiones como las de la Figura 80 se dicen *equidescomponibles*.

[definición 64] Se dice que las regiones planas R, S son equidescomponibles, ssi, cada una de ellas se puede descomponer en el mismo número de sub-regiones, respectivamente congruentes y tales que dos a dos solamente pueden tener en común puntos de frontera.

Cuando se dice "respectivamente" congruentes, se quiere significar que entre las sub-regiones de R y las de S se puede establecer una correspondencia biyectiva tal que las sub-regiones homólogas son congruentes.

[teorema 83] La relación de equidescomponibilidad entre regiones planas es una equivalencia.

[definición 65] Las clases de equivalencia de la partición inducida por la equidescomponibilidad, en el conjunto de las regiones planas se llaman áreas.

La definición anterior, análoga a la de longitud, dada antes, establece que el área de una región plana es la propiedad común a todas las regiones planas que son equidescomponibles con ella.

En resumen, hay dos teorías matemáticas para el tratamiento del concepto Área, una la euclidiana, que no contiene la idea de número, es de carácter geométrico, a partir de la equidescomponibilidad y otra, la hilbertiana, para la cual se supone la existencia del conjunto de los número reales. Consideramos que, es más viable y pertinente el tratamiento del área, para los primeros niveles de escolaridad, el punto de vista euclidiano pues permite el juego geométrico principalmente, a partir de plegados, dibujos, cortes que desarrollan las habilidades geométricas.

Bibliografía

[1] ALFONSO, H., *Tópicos de Geometría*. Universidad Pedagógica Nacional.

[2] ASH, R., *Measure, integration and functional analysis*, Academic Press, New York, (1972).

[3] BARTLE, R., *The elements of integration*, John Wiley & Sons, Inc, New York, (1966).

[4] BEHRENDS, E., *Mass und integrationstheorie*, Springer Verlag, Berlin, (1980).

[5] CAMARGO, L., et al. (2004) *Espiral 2, 3 y 4*. Bogotá, D.C. Norma

[6] CAMPOS, A., *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. 1994. Bogotá.

[7] ______, *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. 1994. Bogotá.

[8] CARO, V., et al (1993) *Matemática 7 Aritmética y geometría transformacional*. Santafé de Bogotá. Migema.

[9] CASTELLANOS, M., (1994) *Matemática constructiva 2*. Bogotá. Libros y libres.

[10] CASTILLO, H., (1997) *Geometría plana y del espacio*. Santafé de Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

[11] CLEMENS, S., et al (1989) *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Wilmington. Adisson-Wesley Iberoamericana.

[12] EUCLID., *The thirteen books of THE ELEMENTS*. Translated from the Text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. HEATH. (1908). 1956. New York. Dover Publications. Volume 1. Books I and II., Volume 2. Books III-IX., Volume 3. Books X-XIII.

[13] EUCLIDES., *Elementos*. Libros I- XIII. Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. 1991. Madrid. Editorial Gredos.

[14] GÓMEZ, R., et al (1976) *Matemática moderna estructurada* 2. Bogotá. Norma.

[15] GUERRERO, B., (2002) *Notas de clase Geometría en el plano yen el espacio*. Bogotá, D.C. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.

[16] HILBERT, D., *Fundamentos de la Geometría*. 1899. Traducción española de la séptima edición alemana, 1930, publicada en 1953 en Madrid por el Instituto Jorge Juan y reimpresa, 1996, en Madrid por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas con una introducción de José Manuel Sánchez Ron.

[17] _______________, *Grundlagen der Geometrie*. Primera edición, Berlín: Teubner, 1899. Séptima edición (última revisada por Hilbert), Berlín: Teubner, 1930. Décima edición (con suplementos de Bernays), Berlín: Teubner, 1968. Son excelentes traducciones, de esta última edición, la francesa (*Les fondements de la géométrie*, Paris: Dunod, 1971) y la italiana (*Fondamenti della geometría*, Milano: Feltrinelli, 1970).

[18] ISAACS, M., (2002) *Geometría universitaria*. México. Thomson Learning.

[19] JOYCE, D., *Euclid's Elements*. En: http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/elements.html

[20] LONDOÑO, N., et al (1983) *Serie Matemática progresiva Aritmética y Geometría 7*. Bogotá. Primera edición. Norma.

[21] MANCOSU P., (ed.), *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, New York: Oxford University Press, 1998.

[22] MARIÑO, R., (2004) *La geometría en el arte y el diseño*. Bogotá. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.

[23] MOISE, E., et al. (1968) *Elementos de Geometría Superior*. México D.F. Compañía editorial continental.

[24] _______________ (1970) *Geometría moderna*. Wilmington, Delaware. Addison-Wesley.

[25] _______________ (1972) *Serie matemática moderna Geometría*. Cali. Norma.

[26] NIÑO, H., (1978) *Delta 9*. Bogotá. Editorial Universitaria de América Ltda.

[27] OOSTRA, A., *El teorema de Pascal en los Fundamentos de la Geometría, de Hilbert*. XI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional. (2000).p.p. 23-46.

[28] PALACIOS, R., et al. (2003) *Herramientas de matemáticas 3*. Bogotá, D.C. Santillana.

[29] TRIVIÑO, O., et al. (2006) *Amigos de las matemáticas 2*. Bogotá, D.C. Santillana.

[30] VILLEGAS, M., et al (1991) *Matemática 2000*. Santafé de Bogotá. Voluntad.

[31] WEYL, H., "*David Hilbert and his Mathematical Work*", Bulletin of the American Mathematical Society 50 (1944), 612-654.