CONTRACCIÓN DEL k-HAZ PARALELO RESPECTO AL POLÍGONO DADO

(UNA PROPUESTA PARA LA GEOMETRÍA DINÁMICA)[1]

Gustavo Yanes

Profesor U.E. Boris Bossio Vivas

San Antonio de Los Altos, Venezuela

gustavo_yanes@hotmail.com

1. Introducción

La idea de utilizar el movimiento en la Geometría, data desde hace bastante tiempo. La traslación, la rotación y la homotecia son buenos ejemplos que se encuentran contemplados en los programas de Educación Básica; en los casos citados se realizan aplicaciones que consisten en desplazar la totalidad de los vértices de una figura dada y, con ello, toda la figura. Cuando se trabaja con triángulos, se suele ubicar la base de uno sobre una recta y trazar una paralela por el vértice opuesto a la base y desplazar este vértice, sobre la recta, para hacer notar que existen infinitos triángulos con igual área y que, además, pueden ser de cualquier tipo, siempre que la base y la distancia entre las recta no varíe. Algunos matemáticos han ido más lejos al incorporar la velocidad en la resolución de problemas geométricos (véase bibliografía al final de la ponencia). La GEOMETRÍA DINÁMICA, como se suele llamar, toma impulso en la década de los 90's con el desarrollo de software CABRI aplicado a Geometría y de otros posteriores que se encuentran ampliamente difundidos en la red[2].

Antes de 1998, cuando aparece el software CABRI, la Geometría Dinámica ofrecía presentaciones estáticas, lo que exigía grandes dosis de imaginación; luego de ese año, las presentaciones también se hicieron dinámicas, por lo que la manipulación y la observación pasaron a jugar el rol preponderante. La intuición es importante ambos tipos de presentación; no obstante, la dinámica hace que fluya de una forma más ágil y precisa.

Este trabajo recoge viejas ideas referentes a la transformación de figuras. Mediante la aplicación que denominaremos **Contracción del Haz Paralelo Respecto al Polígono Dado (o Figura Dada)**, complementada con la Fórmula General del Area del Polígono presentada en el XIV Encuentro de Geometría y III de Aritmética[3], observaremos la facilidad con que se puede llegar a conclusiones. Aunque la aplicación puede ser utilizada en infinidad de situaciones, se mencionan solamente la semejanza de polígonos y se realiza un estudio de la elipse, considerándola como transformada del círculo; aspecto éste que se desarrolla con más amplitud, puesto que se introducen puntos de vista algo diferentes

[1]Ponencia presentada en el XV encuentro de geometría y III de aritmética.

[2]Un demo de el sofware GEUP, en español, puede ser descargado gratis en la red Internet.

[3]Véase en las Memorias la primera parte de la ponencia: ACERCA DE LA VALIDEZ DE LA FÓRMULA PARA CALCULAR EL AREA DE UN POLIGONO REGULAR; o el artículo AREA DEL POLIGNO- enfoque para el cálculo en monografías.com.

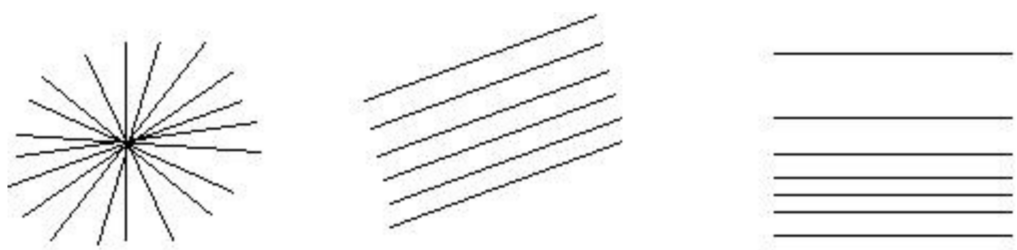
que se desprenden de la contracción. Ambos a manera de ejemplos, para demostrar que se puede llegar a conclusiones utilizando sencillos procedimientos algebraicos que acompañan al geométrico.

De su lectura se desprenderán otras transformaciones que pueden estudiadas en Geometría Dinámica, bien sea con presentaciones estáticas o asistidas por computador.

2. Haz de rectas paralelas

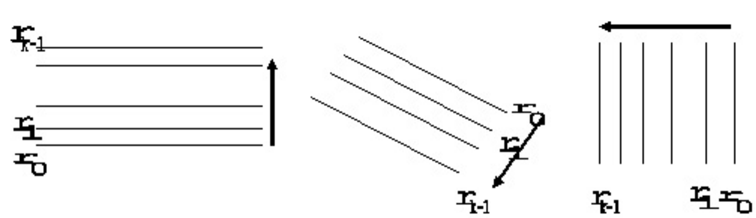
2.1. Definición

Un conjunto de rectas el plano que pasan por un mismo punto se denomina **haz central** y el punto común es el centro del haz. Un conjunto de rectas paralelas pertenecientes a un plano se denomina haz de rectas paralelas, o **haz paralelo**. Un haz paralelo es finito si consta de un número finito de rectas; si k es el número de rectas del haz paralelo se denominará **k-haz.**



Haz central　　　　Haces Paralelos

Dos **rectas de un haz paralelo** son **consecutivas** si entre ellas no se encuentra ninguna otra perteneciente al haz dado. Un haz paralelo es regular si las rectas consecutivas se encuentran a una distancia constante, de lo contrario es irregular.

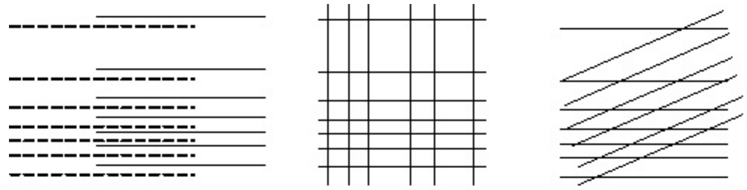


Si definimos un sentido perpendicular al k-haz (en la ilustración anterior indicado con la flecha) tendremos un **haz paralelo ordenado.** Las rectas se enumeran: $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$; en forma prelativa y en el sentido dado. Las rectas r_0 y r_{k-1} se denominan extremos del k-haz.

La distancia entre dos rectas consecutivas de un haz paralelo se denota:$d(r_i\ r_{i+1})$.

Se puede ordenar un haz paralelo infinito, tomando una recta como r_0 y a partir de ésta, en el sentido seleccionado las enumeraremos consecutivamente: $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$; en el sentido contrario las enumeraremos: $r_0, r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}, \ldots$.

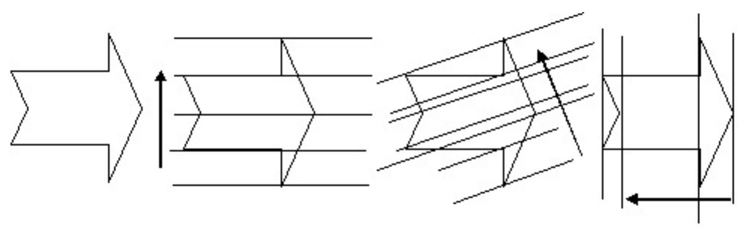
Dados dos **haces paralelos**: son **paralelos, perpendiculares** u **oblicuos entre sí**, si tomado una recta de cada haz, éstas son paralelas, perpendiculares u oblicuas entre sí, respectivamente.



En la ilustración de arriba observamos haces paralelos, perpendiculares y oblicuos entre sí.

2.2. Haz paralelo respecto a un polígono dado

Todo haz paralelo finito, cuyas rectas pasen por vértices de un polígono dado se denomina: k-haz del polígono dado. Es evidente que podemos trazar infinitos haces paralelos de una figura; cuando nos refiramos al k-haz de un polígono dado, entenderemos que es cualquiera de los infinitos k-haces paralelos que se pueden trazar.

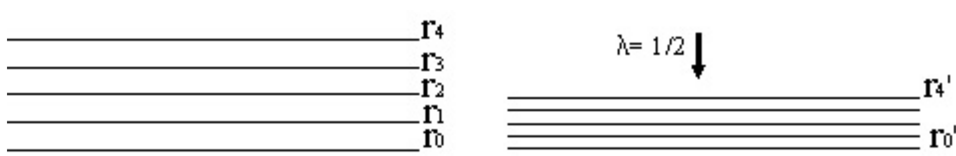


En la ilustración podemos observar un octágono y algunos de sus k-haces. Las flechas indican un sentido de su posible ordenación, aunque también puede tomarse el contrario.

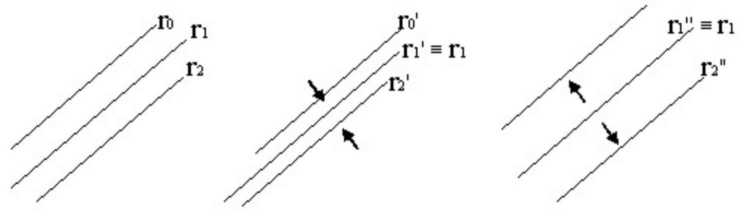
2.3. Contracción del haz paralelo

Llamaremos **contracción de un haz paralelo** a una aplicación que convierte al haz dado en otro haz cuyas distancias entre rectas consecutivas se han multiplicado por un factor constante. Si el factor es menor que uno: las rectas se juntan; si es mayor que uno: las rectas se separan. Si es uno, el haz permanece sin cambios. Denotando como $r_i^{'}$ y $r_{i+1}^{'}$ a las nuevas rectas y al factor constante, será: $d(r_i^{'}\, r_{i+1}^{'}) = \lambda d(r_i\, r_{i+1})$.

La contracción puede hacerse con respecto a una recta del haz, en cuyo caso la recta dada permanece inmóvil y el resto de las rectas del haz paralelo se acercarán o alejarán de ella en función de la constante λ. Si no se especifica nada, se tomará como fija la recta r_0.



En la ilustración arriba se puede observar un 5-haz y un nuevo 5-haz obtenido al aplicarle un factor de contracción $\lambda = 1/2$, respecto a la recta situada en la parte inferior.



Dejando fija r_1 podemos observar una contracción del primer haz con factor $\lambda < 1$ y otra con factor $\lambda > 1$.

Nota.

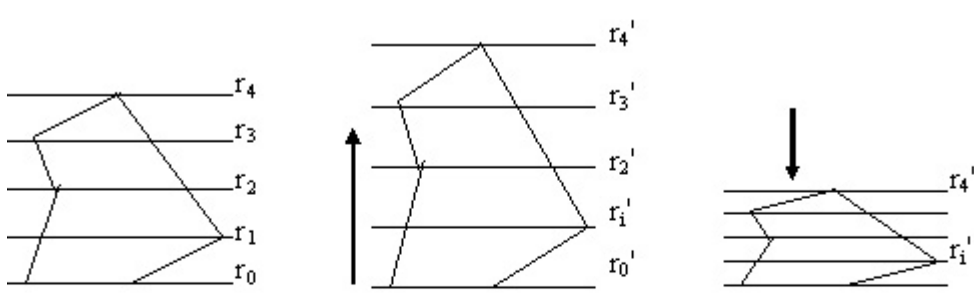
- La contracción con factor $\lambda = 1$ .equivale a dejar invariable el haz de rectas.
- La contracción con factor $\lambda = 0$ convertirá al haz en una recta.
- Puede definirse la contracción con factor $\lambda < 0$, que convertirá al haz en otro paralelo cuyas rectas son $r_0, r_{-1}, r_{-2}, \ldots, r_{-k}$ y se ubicarán, simétricamente, en el semiplano opuesto al del haz dado.

2.4. Contracción del haz con aplicación al polígono.

La contracción de un polígono dado, se obtiene mediante la contracción de un k-haz trazado respecto a éste.

Cuando realizamos la contracción de un polígono, su área aumenta o disminuye en la proporción indicada por el factor de contracción λ. En efecto: si A es el área de la figura original, $A = \sum S(r_i\, r_{i+1})\, d(r_i r_{i+1})$, como $S(r_i\, r_{i+1})$ no varía con la contracción, área de la figura resultante será:

$$\begin{aligned} A' &= \sum S(r_i{}'\, r'_{i+1})\, d(r'_i\, r'_{i+1}) = \sum S(r_i\, r_{i+1})\, \lambda d(r_i\, r_{i+1}) \\ &= \lambda \sum S(r_i\, r_{i+1})\, d(r_i, r_{i+1}) = \lambda A \end{aligned}$$



Si realizamos una contracción λ', sobre la nueva figura, se tendrá:

$$A'' = \lambda' A' = \lambda' \lambda A.$$

En particular, si la contracción es de igual factor λ, se tendrá:

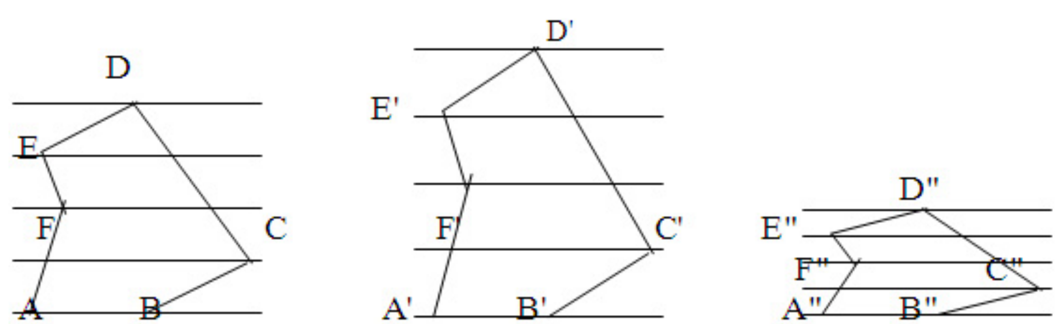
$$A'' = \lambda A' = \lambda\lambda A = \lambda^2 A$$

Si las contracciones consecutivas se realizan de tal forma que cada una, a partir de la segunda, se ejecuta sobre el k-haz resultante de la contracción anterior (haces paralelos); la última figura que obtiene puede generarse con una única contracción cuyo factor sea igual al producto de los factores de las contracciones aplicadas consecutivamente.

La figura que se obtiene después de aplicar la contracción se denomina transformada y en cualquier caso el área de la transformada será igual al producto del área original por el factor de contracción aplicado, o por el producto de los factores de las contracciones aplicadas separadamente, si este fuera el caso.

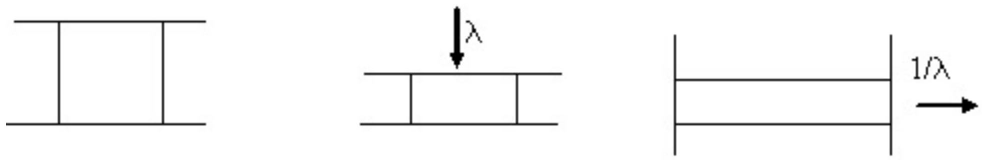
Podemos deducir que dos contracciones consecutivas e inversas aplicadas a una figura dada, la transforman en otra figura que tiene el área equivalente al de la dada. En efecto el área se multiplicará por el factor λ en la primera contracción resultando λA y esta por (en la segunda contracción resultando $\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) A = A$. Si la segunda contracción se aplica paralelamente a la primera, se obtendrá la figura dada.

Los vértices, lados y los ángulos de la figura resultante se corresponden con los de la figura original.



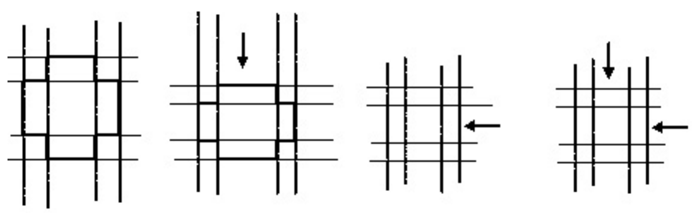
En la ilustración anterior son correspondientes los vértices A, A' y A''; B, B' y B'', C, C' y C'', D, D' y D'', E, E' y E'', F, F' y F''; respectivamente. Son correspondientes, a su vez, los lados, los diagonales y los ángulos definidos por vértices correspondientes.

Dos contracciones aplicadas perpendicularmente sobre una misma figura, con factores inversos entre sí, transformarán a la figura originaria en otra con igual número de lados y ángulos y, además, con la misma área.



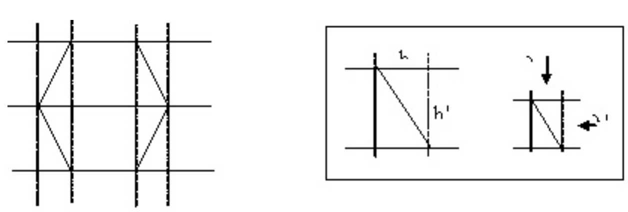
Es fácil observar que los lados de la figura, perpendiculares al k-haz, varían sus dimensiones en la misma proporción indicada por el factor de contracción λ; así mismo, los lados que forman parte del k-haz no sufren alteraciones durante la contracción[4].

Al aplicar contracciones sobre k-haces perpendiculares entre sí, respecto a la misma figura, los lados mencionados anteriormente intercambian sus posiciones relativas respecto a cada k-haz; luego, los lados que variaron sus dimensiones durante la primera contracción no las variarán durante la segunda y los que se mantuvieron constantes en la primera contracción serán los que varíen durante la segunda.



Además de comprobar lo dicho para los lados, obsérvese también que los ángulos rectos no varían, si sus los lados se posan, alternativamente, sobre las rectas de los k-haces perpendiculares, así mismo, obsérvese que las contracciones pueden ser realizadas en cualquier orden, o a un mismo tiempo, para obtener el mismo resultado.

Los lados de la figura que son oblicuos a dos k-haces perpendiculares variarán con cada contracción, por ubicarse en retículas formadas por pares de rectas consecutivas de cada k-haz.



[4]Si $F' = T\lambda^2 F\perp$ (F' es la transformada resultante de dos contracciones con factor λ, perpendicularmente aplicadas a la figura F), se tendrá que $F = T(\frac{1}{\lambda})^2 F'$ (F es la transformada resultante de dos contracciones con factor $1/\lambda$, perpendicularmente aplicadas la figura F'). ¿Cómo se deben seleccionar los haces paralelos?. Como usted lo desee, la única condición es que sean perpendiculares entre sí.

En el recuadro, donde se muestra una retícula ampliada, observamos las transformaciones que sufre un lado situado en forma oblicua entre dos pares de rectas de k-haces perpendiculares. El lado es el diagonal de un rectángulo formado por dos pares de rectas consecutivas de cada k-haz.

Sean l longitud del diagonal; h y h' las distancias entre las dos rectas consecutivas de cada k-haz; λ y λ' los factores de contracción y, por último, l_T la longitud del diagonal después de haber aplicado las dos contracciones.

Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

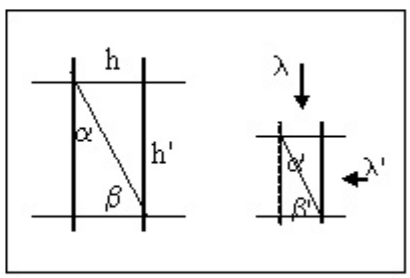
$$l = (h^2 + (h')^2)^{1/2} \quad y \quad l_T = (\lambda^2 h^2 + (\lambda')^2 (h')^2)^{1/2}.$$

Si $\lambda' = \lambda$ se tendrá:

$$l_T = (\lambda^2 h^2 + \lambda^2 (h')^2)^{1/2} = [\lambda^2 (h^2 + (h')^2)]^{1/2} = \lambda (h^2 + (h')^2)^{1/2} = \lambda l.$$

De lo visto podemos concluir que la relación entre los lados correspondientes de una figura dada y su transformada respecto a dos contracciones perpendiculares entre sí, con factor constante, es proporcional a este factor.

Observemos los mismos rectángulos y veamos lo que sucede a los ángulos α y β del rectángulo original.



Partimos de: $\tan \beta = \frac{h'}{h}$ y $\tan \alpha = \frac{h'}{h}$

En la transformada: $\tan \alpha' = \frac{\lambda h'}{\lambda h}$ y $\tan \alpha' = \frac{\lambda h}{\lambda h'}$. Si $\lambda' = \lambda$ se tiene

$\tan \beta = \frac{\lambda h'}{\lambda h} = \frac{h'}{h} = \tan \beta'$ y $\tan \alpha = \frac{\lambda h'}{\lambda h} = \frac{h'}{h} = \tan \alpha'$. De donde $\beta' = \beta$ y $\alpha' = \alpha$.

Por lo que podemos concluir en lo siguiente: dos contracciones con el mismo factor y perpendiculares entre sí, aplicadas a una misma figura, no alteran las medidas de los ángulos internos (recuérdese lo mencionado para los ángulos rectos cuyos lados se posan alternativamente sobre los k-haces paralelos).

Las contracciones sobre una figura son tales que:

1. Si λ y λ' son dos factores diferentes: $T\lambda F \Diamond T\lambda' F$.

2. Existe un factor de contracción $\lambda = 1$ que devuelve la figura en ella misma: $F' = T\lambda F = F$, factor de contracción neutro.

3. Si λ, λ' y λ'' son tres factores cualesquiera:

$$T\lambda\lambda'\lambda''F = T(\alpha\alpha')\alpha'')F = T\alpha(\alpha'\alpha'')F, \text{ asociatividad.}$$

4. Si α y α' son dos factores cualesquiera: $T\lambda\lambda'F = T\lambda'\lambda F$, conmutatividad.
5. Para cada contracción con factor λ existe una contracción paralela con factor $\frac{1}{\lambda}$ tal que $T\lambda(\frac{1}{\lambda})F = T1F = F$, existencia de inversas.
6. Si $F' = T\lambda F$, se tiene que: $AF' = \lambda AF$.
7. Si F es una figura cualquiera y $\lambda = 0 : T\lambda F$ es un segmento de recta, cuya longitud es igual al ancho de la figura respecto a un k-haz perpendicular al que ha sido objeto de contracción.

Nota. $T\lambda F$ significa transformada de la figura F mediante una contracción con factor λ; AF significa área de la figura F. Las contracciones estarán siempre asociadas a un haz determinado para cada una. El ancho de una figura respecto a un k-haz es $d(r_0\ r_{k-1})$.

Visto lo anterior, se puede abordar el tema de las figuras semejantes sin dejar dudas en referencia a las relaciones que existen entre sus áreas como entre sus lados correspondientes. Realizaremos algunas observaciones puntuales de-bido a que el basamento está suficientemente desarrollado.

Dadas las figuras F y F', diremos que son semejantes si F' es la transformada de F mediante la aplicación de dos contracciones paralelas, perpendiculares entre sí, con factor común λ(notación: $F' = T\lambda^2 2F\perp$).

Una figura cualquiera y su transformada, después de haber aplicado dos contracciones perpendiculares de un mismo factor, se denominan **Figuras Semejantes**.

Sean F y F' dos figuras semejantes; A, l y θ el área, la longitud de un lado dado y θ la medida un ángulo dado de la figura F; A' el área de F', l' la longitud del lado correspondiente al dado y θ' la medida del ángulo correspondiente al dado. Entonces se cumple: $A' = \lambda^2 A$; $l' = \lambda l$ y $\theta' = \theta$, donde es el factor de las contracciones perpendiculares entre sí, que aplicadas a la figura F dan como resultado la figura F'.

Si los lados de las figuras semejantes, F y F', son $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ y $l'_1, l'_2, l'_3, \ldots, l'_n$, respectivamente; llamando p y p' a sus perímetros y λ al factor de contracción tendremos:

$$p' = l'_1, l'_2, l'_3, \ldots, l'_n = \lambda l_1, \lambda l_2, \lambda l_3, \ldots, \lambda l_n = \lambda(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n) = \lambda p$$

de donde $p'/p = \lambda$; luego: $A' = (p'/p)^2 A$.[5].

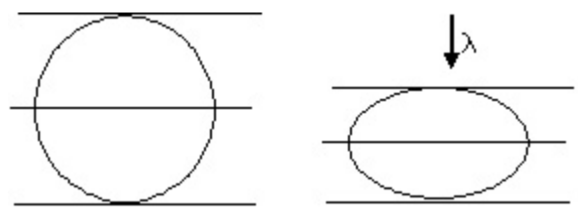
[5]No deben confundirse las relaciones entre las áreas de las figuras y sus transformadas con las de los lados correspondientes de las figuras semejantes; pues el área de la transformada sólo depende del valor de los factores de contracción y las medidas de los lados dependen, además, del sentido en que se apliquen las contracciones.
Si $F' \equiv T\lambda^2 F\|$ (F' es la transformada resultante de dos contracciones con factor λ, paralelamente

Para que dos figuras de igual número de lados sean semejantes es necesario y suficiente que se cumpla que sus ángulos, tomando uno de cada figura, sean iguales dos a dos y sus lados, tomados en forma análoga a los ángulos, estén relacionados por un factor común.

Toda figura es semejante a ella misma, puesto que se obtiene de aplicar dos contracciones perpendiculares y consecutivas con factor $\lambda = 1$. Por supuesto que dos figuras iguales son semejantes entre sí.

3. Contracción del círculo, elipses

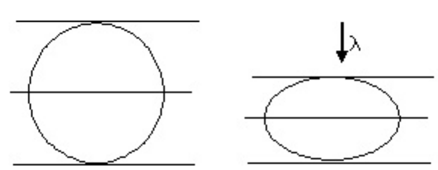
Estudiemos ahora las contracciones del haz paralelo respecto al círculo. Para ello no trazaremos las infinitas rectas del haz, sino sólo tres rectas, de manera que una de ellas pase por el centro del círculo y las otras dos sean tangentes a la figura; por supuesto, imaginaremos el movimiento de todos los puntos tal como si estuvieran trazadas las infinitas rectas del haz.



La transformada que se obtiene al aplicar una contracción paralela al círculo se puede observar en la ilustración de la izquierda. La circunferencia, por su parte, se transforma en otra curva que se denomina elipse.

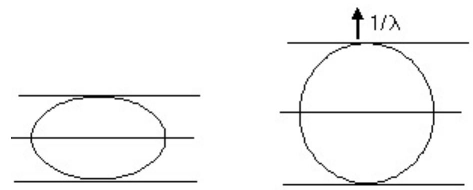
Si denominamos r al radio del círculo, el área de la región limitada por la elipse será $\pi r^2 \lambda$. Si aplicamos una contracción a la transformada, paralela a la anterior, con factor $1/\lambda$, obtendremos el círculo original. Si aplicamos una contracción perpendicular con el mismo factor obtendremos un nuevo círculo de área $\pi r^2 \lambda^2$.

Si, por el contrario, aplicamos una contracción perpendicular con factor $\frac{1}{\lambda}$, obtendremos una nueva elipse que limita un área equivalente a la del círculo.

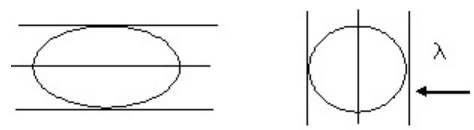


aplicadas a la figura F), donde A y $A^{'}$ son las áreas de las figuras anteriores, respectivamente; se tendrá que $A^{'} = \lambda^2 A$ y sin embargo no es cierto que $l^{'} = \lambda l$ para cualquier lado de longitud l de la figura F y su correspondiente de la figura $F^{'}$ con longitud $l^{'}$. Pues si tomamos un haz paralelo que contenga algún lado de F, este lado no variará; si tomamos un haz que contenga un lado perpendicular a éste con longitud l, al aplicar las contracciones será $l^{'} = \lambda^2 l$

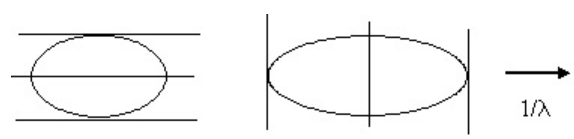
La contracción paralela a la anterior, con el mismo factor, aplicada a la transformada del círculo, devuelve el círculo original.



Una contracción perpendicular a la anterior aplicada sobre la transformada del círculo, con el mismo factor, devuelve un círculo con área igual a λ^2 veces la del círculo original.

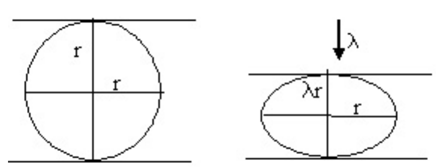


Una contracción perpendicular con factor $\frac{1}{\lambda}$ devuelve una elipse que encierra un área equivalente a la del círculo original.



3.1. Área de la región limitada por la elipse

Para estudiar las propiedades de la elipse, sustituiremos la recta intermedia del haz por el diámetro, en la circunferencia original; igualmente trazaremos el diámetro perpendicular al anterior. Denominaremos r al radio de la circunferencia.



Al aplicar la contracción con factor λ, el diámetro que se encuentra sobre el haz no varía, por lo que su mitad seguirá siendo r. El diámetro perpendicular al anterior se multiplicará por λ y el radio se convertirá en λr.

Los segmentos correspondientes a los diámetros de la circunferencia, obtenidos después de la contracción se denominan ejes de la elipse. Denotaremos D al mayor y d al menor de ellos. Los segmentos r y $r\lambda$ se denominan semiejes y se denotan con las letras a y b

respectivamente, por lo que $2a$ y $2b$ serán las medidas de cada eje. Como $\frac{b}{a} = \lambda$ ó $\frac{a}{b} = \lambda$, dependiendo de que λ sea menor o mayor que 1.

$$Ae = \lambda Ac = \lambda(\pi a^2) = \frac{b}{a}\left(\pi a^2\right) = \pi ab \text{ ó } Ae = \lambda Ac = \lambda(\pi b^2) = \frac{a}{b}\left(\pi b^2\right) = \pi ab$$

y en referencia a los ejes:

$$Ae = \pi ab = \pi(D/2)(d/2) = \pi Dd/4$$

3.2. Excentricidad

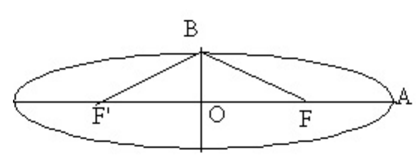
Por cuanto la elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de las distancias a dos puntos fijos del mismo plano (denominados focos) son constantes; vamos a ubicar los focos de la elipse resultante de la contracción del círculo.

La elipse de semiejes a, b (siendo a el semieje mayor) se puede obtener, aplicando una sola contracción, de las formas:

1. Aplicando la contracción con factor $\lambda = b/a$ al círculo de radio a.
2. Aplicando la contracción con factor $\lambda = a/b$ al círculo de radio b.

En el primer caso: $\lambda > 1$; en el segundo: $\lambda < 1$.

Del procedimiento para el trazado de la elipse (del hilo), observamos que los focos se sitúan sobre el eje mayor D, a distancias iguales del centro de la figura (O). Denominemos los focos con F y $F^{'}$.



La suma de las distancias desde el punto A hasta ambos focos es: $AF + AF^{'} = AF + AF + FF^{'} = D$. La suma de las distancias desde B hasta ambos focos es: $BF + BF^{'} = D$, por definición de elipse.

Pero $BF = BF^{'}$ puesto que B es un extremo de d, perpendicular a D en su punto medio y por lo tanto mediatriz del segmento $FF^{'}$. En virtud de ello $BF + BF^{'} = 2BF = D$ y $BF = \frac{D}{2} = a$.

Como debemos calcular OF, aplicaremos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo BOF, donde $BO = b$:

$$(OF)^2 = (a^2 - b^2), \text{ de donde : } OF = (a^2 - b^2)^{1/2}$$

Si la elipse se obtuvo por la contracción del circulo de radio a, entonces $OA = r = a$ y $OB = b = a\lambda$ $(\lambda < 1)$, por lo que nuestra fórmula quedará:

$$OF = (a^2 - a^2\lambda^2)^{1/2} = [a^2(1-\lambda^2)]^{1/2} = a(1-\lambda^2)^{1/2} = r(1-\lambda^2)^{1/2}$$

Si se obtuvo la misma elipse aplicando la contracción del círculo de radio b, entonces $b = r$ y $OA = a = b$ $(\lambda > 1)$, de donde:

$$OF = (b^2\lambda^2 - b^2)^{1/2} = [b^2(\lambda^2 - 1)]^{1/2} = b(\lambda 2 - 1)^{1/2} = r(\lambda^2 - 1)^{1/2}$$

Como $1 - \lambda^2 = -(\lambda^2 - 1)$ y la cantidad subradical es siempre positiva, nuestra fórmula puede expresarse así: $OF = r|\lambda^2 - 1|^{1/2}$.

Luego los focos de la elipse: se ubicarán sobre el eje mayor, a una distancia del centro equivalente al producto del radio del círculo que la originó, por la raíz cuadrada del valor absoluto de: el cuadrado del factor de contracción aplicado, disminuido en 1.

Si establecemos que la elipse siempre está generada por la contracción del círculo de diámetro $2a$, siendo ésta la longitud del eje mayor, tendremos que $\lambda \leq 1$ en todos los casos. Luego:

$$\begin{aligned} OF &= a(1-\lambda^2)^{1/2}, \text{ de donde} \\ \frac{OF}{a} &= (1-\lambda^2)^{1/2} \end{aligned}$$

La razón $\frac{OF}{a}$ se denomina excentricidad de la elipse y se denota e, de lo que concluimos:

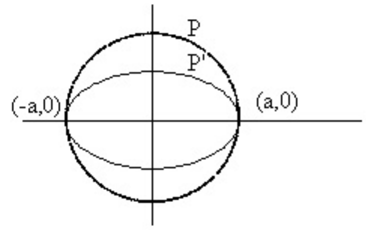
$$e = (1-\lambda^2)^{1/2}$$

Obsérvese que si $\lambda = 1$ se ha aplicado la contracción Ck_0F, donde $\lambda = k_0 = 1$ siendo $e = 0$ y $OF = 0$ por lo que los focos F y $F^{'}$ coinciden con el centro del círculo y la suma de las distancias de cualquier punto de la circunferencia a los dos focos será $2r = D$ (diámetro de la circunferencia). Por supuesto, que en el círculo el eje mayor y el menor coinciden.

Dos elipses $FyF^{'}$, con semieje mayor y menor: a, b y $a^{'}, b^{'}$, respectivamente, son semejantes si se cumple que $\frac{a}{b} = \frac{a^{'}}{b^{'}}$ y en consecuencia: $e = e^{'}$.

3.3. Ecuación

Si se sitúa la elipse en el plano cartesiano de tal forma que el centro coincida con el origen de coordenadas, podemos deducir la ecuación que la define: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Partiendo de la ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$.



El punto P de la circunferencia se transforma en el punto P' de la elipse, después de la contracción. Las coordenadas de P' son (x, y) y las de P : $(x, \frac{y}{\lambda})$. El radio del círculo coincide con a.

En el círculo se tiene: $x^2 + \left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 = a^2$. O bien: $x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} = a^2$

Dividiendo por a^2 ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\lambda^2} = 1$$

De donde:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\lambda)^2} = 1$$

Y por último

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

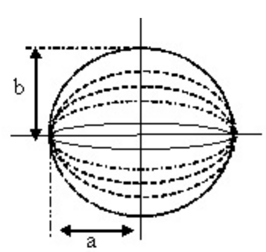
Por ser (x, y) las coordenadas del punto P' de la elipse y a, b la mitad de sus ejes mayor y menor, se concluye que la última ecuación está referida a ésta y se denomina: **ecuación canónica de la elipse**.

3.4. Longitud

Edwards y Penney en la obra **Cálculo con Geometría Analítica** (p.664), proponen una fórmula para el cálculo aproximado del perímetro de la elipse:

$$p \approx \pi(A + R) \text{ donde } A = \frac{a+b}{2} \; y \; R = \left[\frac{a^2+b^2}{2}\right]^{1/2}$$

Esta aproximación falla por lo siguiente:



Si observamos la ilustración a la izquierda podemos darnos cuenta que cuando a y b tienen valores muy próximos, la longitud del perímetro tiende a $2\pi a$, es decir tiende a la circunferencia que origina la elipse; por otra parte, cuando b se aproxima a cero, el perímetro se aproxima al valor $4a$, por exceso En este sentido, la fórmula citada cumple la primera condición; mas, no la segunda.
Se trata de demostrar que $\lim_{b\to 0} \pi(A+R)\Diamond 4a^{+}$, por reducción al absurdo:
Suponemos válida la fórmula $p \approx \pi(A+R)$
Sustituyendo b por 0 en A y R tendremos: $A = \frac{a}{2}$ y $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Luego: $\lim_{b\to 0} \pi(A+R) = \pi(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}) = a(\frac{\pi a}{2} + \frac{\pi a\sqrt{2}}{2})$. De donde:
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 4$; como $3,15 > \pi$ y $1,42 > \sqrt{2}$ se tendrá que $\frac{3,15}{2} + \frac{3,15(1,42)}{2} > 4$ por lo que $3,15 + 3,15(1,42) > 8$ y $3,15 + 4,473 > 8$; por último $7,623 > 8$ lo que es absurdo; con lo que queda demostrado lo enunciado en un principio.
La fórmula que se propone para calcular la longitud de la elipse L_e es:

$$L_e = 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda}, \text{ que equivale a } L_e = 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{b}{a}}.$$

Como podrá observarse:
$\lim_{b\to a} L_e = \lim_{b\to a} 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{b}{a}} = 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{a}{a}} = 2\pi a\ y$
$\lim_{b\to 0} L_e = \lim_{b\to 0} 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{b}{a}} = 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{0}{a}} = 4a$
En la tabla siguiente se presenta el resultado de la aplicación de las dos fórmulas señaladas, partiendo de una circunferencia de radio 1 (a). Se ha disminuido progresivamente el valor de b; el coincide en todos los casos con $\lambda = \frac{b}{a}$

a	b	$\pi(A+B)$	$4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda}$	diferencias
1	1,00000000	6,28318531	6,28318531	0,00000000
1	0,75000000	5,52569541	5,61241658	0,08672117
1	0,56250000	5,00313454	5,15676597	0,15363143
1	0,42187500	4,64451128	4,83947292	0,19496165
1	0,31640625	4,39779315	4,61438202	0,21658887
1	0,23730469	4,22668709	4,45246134	0,22577425
1	0,17797852	4,10671508	4,33476059	0,22804551
1	0,13348389	4,02161718	4,24853142	0,22691425
1	0,10011292	3,96059935	4,18498710	0,22438776
1	0,07508469	3,91643367	4,13795335	0,22151969
1	0,05631351	3,88421440	4,10302526	0,21881086
1	0,04223514	3,86056102	4,07702281	0,21646179
1	0,03167635	3,84310910	4,05762917	0,21452006
1	0,02375726	3,83018243	4,04314450	0,21296207
1	0,01781795	3,82057877	4,03231494	0,21173618
1	0,01336346	3,81342742	4,02421181	0,21078440

1	0,01002260	3,80809282	4,01814516	0,21005233
1	0,00751695	3,80410815	4,01360116	0,20949302
1	0,00563771	3,80112879	4,01019654	0,20906775

Obsérvese que a partir de los valores señalados por la flecha, $\pi(A+B)$ arroja resultados inferiores a 4.

Si continuamos disminuyendo el valor de b el resultado se aproximaría al valor $3,79223780$.

La fórmula $4a\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda}$ mantiene los resultados por encima del valor 4. Si el valor de b se continúa disminuyendo el resultado se aproximaría cada vez más a 4.

3.5. Relaciones entre elipses

Sean e y $e^{'}$ dos elipses con semiejes mayor y menor iguales a a, b y $a^{'}, b^{'}$ respectivamente. Sus áreas serán:

$$Ae = \pi ab \;\; y \;\; Ae^{'} = \pi a^{'}b^{'}; \text{ de donde}$$

$$\frac{Ae}{Ae^{'}} = \frac{ab}{a^{'}b^{'}} = \frac{a}{a^{'}}\frac{b}{b^{'}}$$

Sus longitudes serán:

$$Le = 2^{2-\lambda}\pi^{\lambda}a$$

y

$$Le^{'} = 2^{2-\lambda^{'}}\pi^{\lambda^{'}}a^{'}; \text{ de donde}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Le}{Le^{'}} &= \frac{2^{2-\lambda}\pi^{\lambda}a}{2^{2-\lambda^{'}}\pi^{\lambda^{'}}a^{'}} \\
&= \frac{a}{a^{'}}2^{2-\lambda-(2-\lambda^{'})}\pi^{\lambda-\lambda^{'}} \\
&= \frac{a}{a^{'}}2^{\lambda^{'}-\lambda}\pi^{\lambda-\lambda^{'}} \\
&= \frac{a}{a^{'}}\left(\frac{\pi^{\lambda-\lambda^{'}}}{2^{\lambda-\lambda^{'}}}\right) \\
&= \frac{a}{a^{'}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda-\lambda^{'}}
\end{aligned}$$

Decimos que dos elipses, de semiejes a, b y $a^{'}, b^{'}$, son semejantes si $\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}}$. De allí tendremos que $\frac{a}{b} = \frac{a^{'}}{b^{'}}$, o $k = k^{'}$. Siendo k y $k^{'}$ los factores de contracción aplicados a las circunferencias que las originan.

Como $b = ak$ y $b^{'} = a^{'}k^{'}$ se tendrá:

$$\frac{Ae}{Ae'} = \frac{ab}{a'b'} = \frac{aak}{a'a'k'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2$$

De lo anterior y de

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

se tiene:

$$\frac{Ae}{Ae'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2$$

Y como a y $a^{'}$, o b y $b^{'}$, son los radios de las circunferencias que generan las elipses, tendremos que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{r}{r'}$$

De donde:

$$\frac{Ae}{Ae'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

De donde concluimos que la razón entre las áreas de elipses semejantes es igual al cuadrado de la razón entre los respectivos radios de los círculos que las generan.

Pero, como cualquiera de las elipses semejantes se puede obtener a partir de la otra mediante la aplicación de dos contracciones perpendiculares entre sí, con factor común λ; considerando originaria a la de semieje a, se tiene que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{1}{\lambda}$$

Siendo λ el factor de contracción aplicado a la elipse originaria.
Luego: $\frac{Ae}{Ae'} = \frac{1}{\lambda^2}$ y $Ae^{'} = \lambda^2 Ae$.

Por otra parte tenemos: $\frac{Le}{Le'} = \left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lambda^{'}-\lambda} = \left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{0} = \frac{a}{a'}$; de donde $\frac{Le}{Le'} = \left(\frac{Le}{Le'}\right)^2$. De donde concluimos que la razón entre las áreas de dos elipses semejantes es igual al cuadrado de la razón entre sus respectivas longitudes.

De $\frac{Le^{'}}{Le} = \left(\frac{a}{a'}\right)$ y de $\frac{a}{a'} = 1$ se tiene $\frac{Le}{Le'} = \frac{1}{\lambda}$ ó $\lambda = \frac{Le^{'}}{Le}$ y por último:

$$Ae^{'} = (\tfrac{Le^{'}}{Le})^2 Ae$$

Por lo que la semejanza en las elipses cumple con las condiciones estudiadas para la semejanza de las figuras en general.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una utilidad más de la Fórmula General del Area del Polígono; integrándola al estudio de las transformaciones de figuras mediante la Contracción del Haz Paralelo Respecto al Polígono Dado, es posible abordar con mayor claridad una serie de aspectos en Geometría Dinámica. Incluso, en el estudio de figuras semejantes, esta propuesta puede sustituir a la Homotecia, también llamada Contracción al Punto, debido a que las relaciones de semejanza son más evidentes. Tal como puede observarse en el caso de la elipse, también es posible evidenciar otros aspectos que permanecen ocultos en las figuras cuando se tratan con métodos, o procedimientos, tradicionales. A través de la utilización de computadora y software especializado las presentaciones podrán ser manipuladas por profesionales y estudiantes, por lo que el aprendizaje de los contenidos se vería facilitado, se incrementaría el interés y se abrirían nuevos caminos en la Geometría Euclidiana.

Bibliografía

[1] ARGUNOV, B.; SKORNIAKOC L., *Teoremas de configuración.* Lecciones Populares de Matemáticas. MIR, Moscú. 1980.

[2] BALDOR, J., *Geometría plana y del espacio con introducción a la trigonometría.* Cultural Centroamericana S.A. Madrid 1981.

[3] BESKIN, N., *División de un segmento en la razón dada.* Lecciones Populares de Matemáticas. MIR, Moscú. 1976.

[4] BOLTIANSKI, V.; GOJBERG I., *División de figuras en partes menores.* Lecciones Populares de Matemáticas. MIR, Moscú. 1978.

[5] DOROFEREV, G., Y OTROS., *Temas selectos de matematicas elementales.* MIR, Moscú 1973.

[6] EDWARDS, Ch.; PENNEY, E., *Cálculo con geometría analítica.* Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México 1994.

[7] KYUBICH, Y., Y L.A. *Shor método cinemático en problemas geométricos*, Lecciones Populares de Matemáticas. MIR, Moscú. 1978.

[8] MASANI, P., Y OTROS., *Cálculo diferencial e integral.* Publicaciones Cultural S.A. México 1989.

[9] MOISH, E.; Foyd D., *Geometría.* Serie Matemática Moderna IV. NORMA. Cali 1972.

[10] NEWMAN, J., *El mundo de las matemáticas.* Ediciones Grijalbo. Barcelona 1979.

[11] NAVARRO, E., *Curso propedéutico de matemática.* E. NAVARRO Caracas s/f.

[12] NICHOLS, E., Y OTROS., *Geometría moderna.* Editorial Continental, México 1971.

[13] POROGLEVOV, A., *Geometría elemental.* MIR, Moscú 1974.

[14] SHERVÁTOV, V., *Funciones hiperbólicas.* Lecciones populares de matemáticas. MIR. Moscú, 1975.

[15] SUVOROV, I., *Curso de matemáticas superiores.* MIR. Moscú 1973.

[16] TSIPKIN, A., *Manual de matemáticas para la enseñanza media.* MIR. Moscú 1985.

[17] VASILIEV , N., y V.L., *Gutenmájer rectas y curvas.* MIR. Moscú 1980.

[18] YANES, G., *Enfoque para la enseñanza del cálculo del área de las figuras planas en el séptimo año de educación básica.* Monografía presentada al IUMPM. 1984.