¿Cuál es la dimensión de la hoja de papel?

Claudia Patricia Orjuela Osorio
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
cporjuela@pedagogica.edu.co.

Clara Emilse Rojas Morales
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
crojas@pedagogica.edu.co.

Jorge Edgar Páez Ortegón
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jopaez@pedagogica.edu.co.

Resumen

Alrededor del objeto matemático dimensión se muestra su estudio desde su interpretación intuitiva hasta llegar a realizar un acercamiento de tipo matemático en diferentes dominios como el algebra lineal, la topología, la geometría, entre otros. El documento muestra esta estructura para concluir con la relación entre la dimensión de la hoja de papel y otros objetos de dimensión no entera.

Introducción

Usualmente se ha dicho que los objetos tiene dimensión 1, 2, 3, o n, sin embargo, en la naturaleza los objetos que nos rodean no tienen dimensión geométrica entera. Para hacer explicita, la afirmación anterior, se realizará un breve recuento acerca de lo que es dimensión.

De manera informal, se dice que la dimensión es la manera como se pueden ver las cosas, o el punto de vista como se presenta un determinado fenómeno en un contexto. Si se toma de referencia las enciclopedias se tendría el concepto como una de las propiedades del espacio. El espacio, tal y como lo conocemos, es tridimensional. Para definir un volumen se necesitan tres medidas (dimensiones): longitud, ancho y alto. En matemáticas y en física se usa un concepto de dimensión más abstracto; a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones[1].

En algunos libros se encuentran la definición "*una figura es unidimensional, si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si su frontera está compuesta de curvas y tridimensional, si su frontera está compuesta de superficies.*"En otros textos se refieren a la dimensión como el grado de libertad de un objeto en un espacio determinado. Un punto tiene dimensión cero, ya que un punto es estático, no tiene tamaño; una línea tiene dimensión uno, pues un punto se puede mover hacia la izquierda o hacia la derecha, tiene solamente longitud; una superficie no tiene alto, por lo que tiene dimensión dos. Una línea cualquiera es unidimensional, ya que basta un número real para identificar cualquier

[1]Enciclopedia Encarta 2004 © 1993-2003 Microsoft Corporation.

punto. Sin embargo, hay una diferencia entre un espacio compuesto por un conjunto finito de puntos y el de una línea recta, para el primer caso el espacio finito de puntos es "cero dimensional" mientras que para el segundo es de unidimensional.

En el espacio que se conoce se cuenta con tres direcciones por eso se dice que es tridimensional, un cuerpo sólido como un cubo tiene dimensión tres. De hecho, en la geometría euclidiana las únicas dimensiones posibles son las que corresponden a los números enteros: 0, 1, 2 y 3. A partir del surgimiento de la geometría fractal se ha reconocido la existencia de figuras con dimensiones distintas de 1, 2 o 3, a lo que se llama *dimensión no entera*, es decir, objetos geométricos que podían habitar entre la línea y el plano; o entre el plano y el espacio. La dimensión en general, ha sido entendida como un número que nos indica en que espacio habita un objeto geométrico.

Otra forma de definir la dimensión, es con la cantidad de coordenadas necesarias para determinar un objeto en el espacio, así mismo, se define como el número de direcciones ortogonales diferentes que se puedan tomar, es decir, es la cantidad de vectores independientes que se necesitan para generar o describir un espacio.

En álgebra lineal, se usa un concepto de dimensión más abstracto; a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones. Estos espacios no tienen sentido en el mundo real, pero son herramientas muy útiles y resultan esenciales en ciertas disciplinas, como la física cuántica.

La topología estudia las propiedades de las figuras geométricas o los espacios que no se ven alterados por transformaciones continuas, biyectivas y de inversa continua, Es decir, en topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer los objetos pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido (*la transformación debe ser continua*) ni pegar lo que estaba separado (*la inversa también debe ser continua*). Por ejemplo, en topología un triángulo es lo mismo que un cuadrado, ya que podemos transformar uno en otro de forma continua, sin romper ni pegar. Una propiedad interesante en topología es la conservación del valor de la dimensión cuando se deforma un objeto.

Como se ha visto hasta el momento, el concepto de dimensión tiene un significado matemático muy amplio, y por lo tanto consta de una pluralidad de definiciones. La medición de formas fractales ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido. Cuando se quiere medir una curva con una unidad, o con un instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escaparán a la sensibilidad de la regla o el instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la longitud de la curva.

Concepto de dimensión

Dimensión topológica y dimensión fractal:

Desde un punto de vista topológico se sabe que la circunferencia y un segmento rectilíneo son la misma curva y encierran el mismo tipo de superficie (pues es posible transformar una en la otra mediante una deformación continua, es decir, sin que sea preciso someter a ninguna de las dos a manipulaciones “no topológicas”). Sin embargo, desde el punto de vista métrico no son la misma curva, ya que la circunferencia y el área que encierra, el círculo, son finitos, y, en cambio, el segmento, aunque es finito, no encierra con su borde un área finita.

La dimensión topológica, es un término que introdujo Henri Poincaré, definida de la siguiente manera:

- El conjunto vacío tiene dimensión -1.
- Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios $(n-1)$ dimensionales, decimos que el espacio que consideramos es n dimensional.

Algunos ejemplos:

Objeto	**Dimensión topológica**
Conjunto vacío	-1
Punto	0
Segmento	1
Cuadrado	2
Cubo	3

Tabla 1.

Para estos objetos, aunque la dimensión topológica es más general, ésta coincide con la dimensión euclídea. La dimensión topológica nos habla de la conectividad de los puntos del objeto de medida.

Dimensión de autosemejanza

La dimensión de un objeto autosemejante se obtiene al dividir en n partes del mismo tamaño, semejantes a la figura original total con un factor escalar r, mediante la siguiente relación:

$$n\, r^D = 1$$

es decir,

$$\ln(n) + D\ln(r) = 0$$

de donde

$$D = \frac{-\ln n}{\ln r} = \frac{\ln n}{-\ln r} = \frac{\ln n}{\ln r^{-1}}$$

Por lo tanto

$$D = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{r}}$$

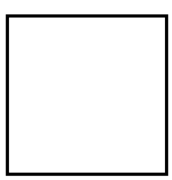
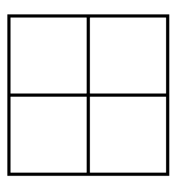
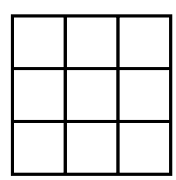
Veamos algunos ejemplos

Se tiene un segmento partido en segmentos congruentes; la escala a la que se encuentra cada uno de estos nuevos segmentos con relación al segmento inicial y la dimensión del segmento original es 1. En este caso se cumple la relación según la cual el número de segmentos en los cuales es partido el segmento original es igual el recíproco de la escala elevado a la dimensión. (Tabla 2)

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	$r = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$
$1 = 1^D$	$2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\right]^D$	$3 = \left[\frac{1}{\frac{1}{3}}\right]^D$
$D = 1$		

Tabla 2.

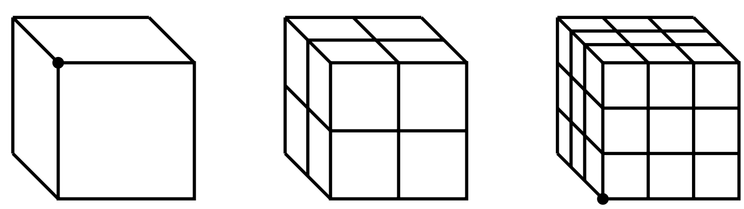
Se realiza el mismo procedimiento, para cada uno de los siguientes casos: Partiendo del cuadrado de lado 1, dividiendo en n partes autosemejantes al original con una relación de escala r . (Tabla 3)

		
$n = 1$	$n = 4$	$n = 9$
$r = 1$	$r = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$
$1 = 1^D$	$4 = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\right]^D$	$9 = \left[\frac{1}{\frac{1}{3}}\right]^D$

$D = 2$

Tabla 3.

Partiendo del cubo de lado 1, dividiendo en n partes autosemejantes al original con una relación de escala r. (Tabla 4)



$n = 1$	$n = 8$	$n = 27$
$r = 1$	$r = \dfrac{1}{2}$	$r = \dfrac{1}{3}$
$1 = 1^D$	$8 = \left[\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\right]^D$	$27 = \left[\dfrac{1}{\frac{1}{3}}\right]^D$
$D = 3$		

Tabla 4.

Dimensiones no enteras - Fractales Clásicos

En su primera iteración para construir cada fractal, se obtienen los siguientes valores

Fractal	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{r}$	$D = \dfrac{\ln n}{\ln \frac{1}{r}}$
Conjunto de Cantor	2	$\dfrac{1}{3}$	0,6309
Curva de Koch	4	$\dfrac{1}{3}$	1,2681

y en su n-ésima iteración para construir el fractal, se obtienen los siguientes valores.

Fractal	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{r}$	$D = \dfrac{\ln n}{\ln \frac{1}{r}}$
Conjunto de Cantor	2^n	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$	0,6309
Curva de Koch	4^n	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$	1,2681

Observamos que la dimensión de los fractales es independiente de la escala ya que al llevar el proceso de construcción al infinito para obtener el fractal, el valor de la dimensión no cambia. En conclusión, la dimensión de autosemejanza se refiere a como el objeto geométrico llena el espacio en el que está inmerso.

Un ejemplo de Dimensión: ¿Cuál es la dimensión de una hoja de papel?

Después de realizar este pequeño recuento, volvamos sobre la pregunta que nos inquieta. Si se considera la hoja de papel y se pregunta ¿Cuál es su dimensión? en primera instancia se le considera que es bidimensional, es decir, una figura geométrica que tiene dos dimensiones: largo y ancho. Sin embargo, luego de hacer otro análisis un poco más exhaustivo, se reconoce que tiene espesor, muy pequeño por cierto pero no por ello despreciable, es posible que cambie el juicio anterior y se afirme que se trata de un objeto sólido, algo que tiene largo, ancho y grosor, es decir, tridimensional. Desde luego, tras un examen más minucioso se puede llegar a que la hoja es porosa y, por lo mismo, no se trata de un objeto realmente sólido, lo cual contradice lo aprendido durante muchos años de escolaridad.

Sucede exactamente lo mismo con un colador. ¿Cómo clasificar un objeto hecho de finos hilos entretejidos que permite separar substancias de acuerdo a su tamaño? Si lo observa desde la suficiente distancia, el colador es indudablemente un objeto tridimensional. Así mismo, si se mira con mayor precisión acercándose cada vez más, comenzará a notar que la malla no es sólida sino porosa, esto le mostrará una rejilla de líneas que se entrecruzan entre sí y hasta podría asegurarse que se trata de un plano.

Si realizamos un análisis similar acerca de la dimensión de una esponja, se podrá llegar a la conclusión que es un objeto cuya dimensión es mayor que dos pero menor de tres, pues dependiendo del grado de observación (acercamientos que se realicen) nos enfrentamos a un objeto entre un sólido y un plano.

El que un objeto cambie su dimensionalidad dependiendo de la escala en la que se le observa, produce cierta incertidumbre y cuestiona la objetividad de lo que en realidad se está observando.

A manera de conclusión

Este documento ha presentado el estudio matemático de la dimensión de autosemejanza, partiendo de objetos geométricos como el segmento, cuadrado, cubo y de fractales clásicos los cuales mantienen la relación de autosemejanza y al calcular la dimensión se obtuvo un número, que en particular para objetos de la geometría Euclidiana se refiere específicamente a la "cantidad"de espacio que ocupa cualquier objeto, estableciendo una restricción, que sea cero o un número natural; mientras que para los fractales, la dimensión puede ser expresada mediante números reales no negativos.

Esta diferencia en la expresión numérica permite por ejemplo, clasificar dos objetos como una hoja de papel y una hoja de esponja, cuyas respectivas dimensiones se encuentra entre dos y tres. Sin embargo, la porosidad del objeto haría que la hoja de papel se encontrara más cerca de tres que la esponja: esto es, el primer objeto llena el espacio más compactamente que el segundo.

Al realizar un análisis similar al de la hoja de papel, lo mismo sucedería con la mayoría de los objetos que supuestamente consideramos como "tridimensionales"como por ejemplo un automóvil, al igual que en los casos anteriores no es sólido, también es poroso; es decir, con una dimensión mayor a dos pero menor que tres, y finalmente se puede afirmar que no existen objetos con dimensión entera en la naturaleza.

Bibliografía

[1] BARNSLEY, M., *Fractals Everywhere.* Ed. Academic Press, Inc., 1988, Londres.

[2] GALINDO, F., *El Continuo Dimensional: Un Universo Fractal.* Conferencia en el Congreso Nacional de Egresados de Física y Matemáticas, 1989, La Trinidad Tlaxcala.

[3] OTTO, H.; JURGENS, H., (1991). *Fractals for the class room, strategic activities.* Vol. 1 . New York: Springer Verlag.

[4] VERA, S., *Geometría Fractal y Geometría Euclidiana.* En: Educación y pedagogía. No.35. Vol.XV. (enero-abril), 2003.pp.85-91.