

EL OCTAEDRO TRUNCADO AFÍN COMO CUERPO NORMADO

Luis Enrique Ruiz Hernández

Profesor Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Duitama, Colombia

leruizh@hotmail.com

Resumen

Se indaga la Geometría del $\{3, 4\}$ -afín truncado (la imagen de un octaedro truncado, ó $\{3, 4\}$ truncado, bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3), considerándolo estratégicamente como una esfera topológica. Se introduce una norma φ sobre \mathbb{R}^3 cuyas esferas son poliedros de este tipo. Recíprocamente, cada $\{3, 4\}$ -afín truncado determina unívocamente una norma φ sobre \mathbb{R}^3 , respecto a la cual es una esfera unitaria. En ambos casos φ es el máximo de cuatro valores absolutos. Esta descripción del $\{3, 4\}$ -afín truncado permite su representación unificada y, en particular, aporta una inequación cartesiana del $\{3, 4\}$ truncado que entraña una caracterización de sus puntos haciendo de él un lugar geométrico específico. Se muestra así cómo obtener el $\{3, 4\}$ truncado de arista a , a partir de los tres diámetros de un $\{3, 4\}$ y un número real dado $a > 0$. Se establece rigurosamente cómo el $\{3, 4\}$ -afín truncado es la intersección de un $\{3, 4\}$ -afín, y un $\{4, 3\}$ -afín, además de hallar su circunelipsoide y volumen.

Introducción

Un modelo del octaedro truncado (ver Figura 2), se obtiene a partir del octaedro regular $\{3, 4\}$: al dividir sus aristas en tres partes iguales, los puntos de división resultantes (dos por arista) son los vértices de un octaedro truncado.

Llamado por Tutton cubo-octaedro (no debe ser confundido con el cuboctaedro), es un zonoedro ([3], pp. 27-30), esto es, un poliedro convexo cuyas caras son paralelogonos ([11], pp. 140 - 153).

Es además, uno de los cinco paraleloedros primarios del famoso cristalógrafo ruso E.S. Fedorov (1.853 - 1919) ([4]): los únicos sólidos convexos centralmente simétricos que tienen la doble propiedad de tener el volumen máximo en un retículo entero y, por desplazamientos paralelos, colocados cara a cara, llenar todo el espacio sin dejar discontinuidades o huecos entre ellos ([6], pp. 51-52; [7], pp. 51-53; [13], pp 12-13, 236-238).

Otras dos propiedades del octaedro truncado fueron halladas por Lord Kelvin (1.824-1.907): 1. Entre los cinco paraleloedros primarios ofrece la menor superficie, para un volumen constante dado 2. Se obtiene directamente del agrupamiento compacto de esferas, cuando cada una es inflada sin mover su centro. Estos hechos hicieron que el octaedro truncado sea ocasionalmente llamado El Sólido de Kelvin.

Los rasgos métricos anteriores son los que frecuentemente describen el octaedro truncado, el cual lo denotaremos en este trabajo por $\{3, 4\}$ truncado, haciendo uso extensivo de la

notación de Schläfli. Aún se desconoce una “buena propiedad” que caracterice sus puntos y haga factible un tratamiento topológico moderno. En general estudiaremos aquí el octaedro truncado afín o $\{3, 4\}$ -afín truncado: la imagen de un $\{3, 4\}$ truncado bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (Definición 1.1).

Estratégicamente lo consideraremos como una esfera topológica. Un primer paso en esta dirección se da al expresar cada vértice de $\{3, 4\}$ truncado (y $\{3, 4\}$ -afín truncado) como una combinación lineal promedio de su centro y tres vértices consecutivos y fijos de una cara exagonal (Lema 1.2), y otro al introducir una norma φ sobre \mathbb{R}^3 (Lema 1.3) cuyas esferas son $\{3, 4\}$ -afín truncados (Teorema 2.1).

Recíprocamente, dado un $\{3, 4\}$ -afín truncado se construye una norma φ sobre \mathbb{R}^3 cuya esfera cerrada unitaria es dicho sólido (Corolario 2.2). En ambos casos φ es el máximo de cuatro valores absolutos.

La norma φ aporta, además de una representación unificada del $\{3, 4\}$ -afín truncado, una inequación cartesiana del $\{3, 4\}$ truncado que entraña una **caracterización** de sus puntos, haciendo de él un lugar geométrico específico. Mostramos así cómo obtenemos el $\{3, 4\}$ truncado de arista a , a partir de los tres diámetros de un $\{3, 4\}$ y un número real $a > 0$ (Corolario 4.1).

También se establece rigurosamente cómo el $\{3, 4\}$ -afín truncado es la intersección de un $\{3, 4\}$ -afín y un $\{4, 3\}$ -afín (Ver observación 3.1 y Corolario 3.2).

Finalmente se halla la ecuación matricial del circunelipsoide del $\{3, 4\}$ -afín truncado la cual permite calcular su volumen a partir de un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 , que aparece de modo natural (Teorema 5.1).

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los vectores (o puntos) en \mathbb{R}^3 .

Los lemas 1.2 y 1.3, Teoremas 2.1 y 5.1, y los Corolarios 2.2, 3.2 y 4.1 (como la Definición 1.1) consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

1. Algunas propiedades lineales del octaedro truncado y una norma sobre \mathbb{R}^3

1.1. Definición

Un octaedro truncado afín, o simplemente $\{3, 4\}$ -afín truncado, es la imagen de un octaedro truncado bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (Ver Figura 3).

De manera similar se define exágono regular afín, o simplemente $\{6\}$ -afín (Ver figura 1).

El exágono regular tiene cada diagonal, a través de su centro, paralela a un par de lados opuestos e igual a su duplo. Dado que las transformaciones afines preservan las combinaciones lineales promedio (la suma de cuyos coeficientes es uno) ([2], pp. 417 - 423) entonces la propiedad anterior es heredada por el exágono regular afín $V_1 \dots V_6$. En otras palabras

$$\begin{aligned} V_4 &= V_1 - 2V_2 + 2V_3 & , & & V_5 &= 2V_1 - 3V_2 + 2V_3 & , & & (1.1.1) \\ V_6 &= 2V_1 - 2V_2 + V_3 & , & & & & & & \text{(Ver Figura 1)} \end{aligned}$$

En el siguiente lema se expresa específicamente cada vértice del $\{3, 4\}$ truncado como

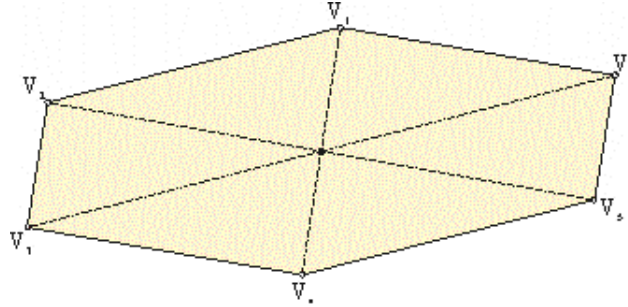


Figura 1. $\overline{V_i V_{i+3}} \parallel \overline{V_{i+1} V_{i+2}}$, $V_i V_{i+3} = 2V_{i+1} V_{i+2}$, $i = 1, 2, 3$ $V_1 \dots V_6$ es un exágono regular afín

una combinación lineal promedio del centro y tres vértices fijos.

1.2. Lema

Sea $V'_1 \dots V'_{24}$ un octaedro truncado de centro

$$G' = \frac{1}{2}(V'_i + V'_{i+12}) \quad i = 1, \dots, 12, \quad (1.2.1)$$

y vértices dispuestos como en la Figura 2. Entonces

$$\begin{aligned} V'_4 &= V'_1 - 2V'_2 + 2V'_3, & V'_5 &= 2V'_1 - 3V'_2 + 2V'_3 \\ V'_6 &= 2V'_1 - 2V'_2 + 2V'_3, & V'_7 &= \frac{5}{3}V'_1 - \frac{4}{3}V'_2 + \frac{2}{3}G' \\ V'_8 &= \frac{2}{3}V'_1 + \frac{2}{3}V'_2 - V'_3 + \frac{2}{3}G', \\ V'_9 &= -\frac{2}{3}V'_1 + \frac{7}{3}V'_2 - 2V'_3 + \frac{4}{3}G', & (1.2.2) \\ V'_{10} &= -\frac{5}{3}V'_1 + \frac{10}{3}V'_2 - 2V'_3 + \frac{4}{3}G', \\ V'_{11} &= -\frac{4}{3}V'_1 + \frac{8}{3}V'_2 - V'_3 + \frac{2}{3}G', \\ V'_{12} &= -\frac{4}{3}V'_1 + \frac{5}{3}V'_2 + \frac{2}{3}G', \end{aligned}$$

Demostración. Las relaciones en (1,1,1) aplicadas al exágono regular $V'_1 \dots V'_6$ nos dan V'_4, V'_4 y V'_6 como en (1,2,2). Aplicadas al exágono $V'_5 V'_6 V'_7 V'_{24} V'_{23} V'_{22}$;

$$\begin{aligned} V'_5 - V'_{24} &= 2(V'_6 - V'_7), \quad \text{esto es} \\ V'_{12} &= 2V'_1 - V'_2 - 2V'_7 + 2G, \end{aligned}$$

y al exágono $V'_3 V'_{12} V'_{19} V'_{20} V'_{21} V'_4$ dan,

$$V'_{12} - V'_{21} = 2(V'_3 - V'_4) \quad \text{y} \quad V'_3 - V'_{20} = 2(V'_4 - V'_{21})$$

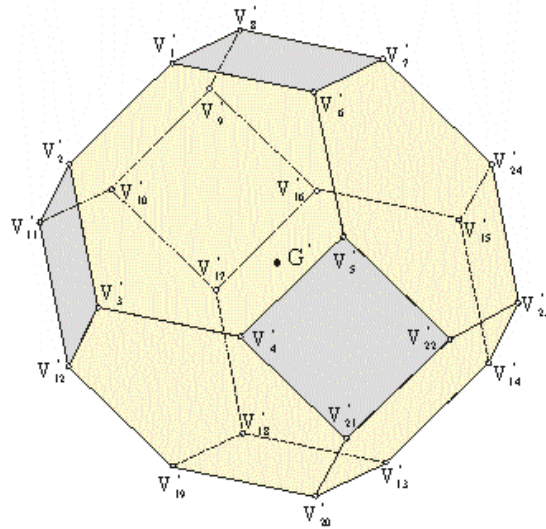


Figura 2. El octaedro truncado

es decir,

$$\begin{aligned} V'_{12} &= -2V'_1 + 4V'_2 - 2V'_3 - V'_9 + 2G' \quad , \quad y \\ V'_8 &= 2V'_1 - 4V'_2 + 3V'_3 + 2V'_9 - 2G' \quad , \end{aligned}$$

teniendo presente las relaciones en (1,2,1). Además, del cuadrado $V'_1 V'_6 V'_7 V'_8$ aparece $V'_8 - V'_7 = V'_1 - V'_6$, o bien

$$V'_8 = -V'_1 + 2V'_2 - V'_3 + V'_7$$

Comparando las dos expresiones anteriores para V'_{12} y para V'_8 , aparecen las ecuaciones vectoriales

$$\begin{cases} 2V'_7 - V'_9 = 4V'_1 - 5V'_2 + 2V'_3 \\ V'_7 - 2V'_9 = 3V'_1 - 6V'_2 + 4V'_3 - 2G' \end{cases}$$

respectivamente. Resolviendo este sistema se consiguen V'_7 y V'_9 , y en consecuencia V'_8 , V'_{12} , como en (1.2.2).

Las correspondientes expresiones para V'_{10} y V'_{11} se obtienen recordando que los lados opuestos en un exágono regular (en este caso $V_1 V_2 V_{11} V_{10} V_9 V_8$) son paralelos.

1.3. Lema

Si A_1, A_2 y A_3 son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , entonces la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representada por

$$\varphi(X) = \frac{3}{2} \max \left\{ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 |A_k X|, |A_1 X|, |A_2 X|, |A_3 X| \right\} \quad , \quad (1.3.1)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

Demostración. $\varphi(X) = 0$ es equivalente al sistema de ecuaciones

$$A_k X = 0 \quad , k = 1, 2, 3$$

Por ser $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, el rango de la matriz de los coeficientes es tres, y el sistema tiene como solución única $X = \mathbf{0}$. La misma representación de φ nos da $\varphi(\lambda X) = |\lambda|\varphi(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; y

$$\begin{aligned} |A_k \cdot (X + Y)| &= |A_k X + A_k Y| \\ &\leq |A_k X| + |A_k Y| \leq \frac{2}{3} \{\varphi(X) + \varphi(Y)\}, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3$, implica

$$\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$$

2. Geometría y topología del $\{3, 4\}$ -afín truncado

2.1. Teorema

Sea φ la norma sobre \mathbb{R}^3 definida en (1.3.1), y hagamos

$$\left\{ \begin{array}{l} V'_1 = G + c(2A_2 x A_3 + A_3 x A_1), \\ V'_2 = G + c(2A_3 x A_1 + A_2 x A_3), \\ V'_3 = G + c(2A_3 x A_1 + A_1 x A_2), \\ V'_4 = G + c(2A_1 x A_2 + A_3 x A_1), \\ V'_5 = G + c(2A_1 x A_2 + A_2 x A_3), \\ V'_6 = G + c(2A_2 x A_3 + A_1 x A_2), \\ V'_7 = G + c(2A_2 x A_3 - A_3 x A_1), \\ V'_8 = G + c(2A_2 x A_3 - A_1 x A_2), \\ V'_9 = G + c(-2A_1 x A_2 + A_2 x A_3), \\ V'_{10} = G + c(-2A_1 x A_2 + A_3 x A_1), \\ V'_{11} = G + c(2A_3 x A_1 - A_1 x A_2), \\ V'_{12} = G + c(2A_3 x A_1 - A_2 x A_3), \\ V_{i+12} = 2G - V_i, \quad i = 1, \dots, 12, \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

donde $G \in \mathbb{R}^3$,

$$c = \frac{r}{3\Delta} \quad , \quad r > 0 \quad \text{y} \quad \Delta = \det(A_1, A_2, A_3)$$

Entonces $S_r[G]$, la esfera cerrada de centro G y radio r , respecto a la norma φ , es un octaedro afín macizo y cerrado, centralmente simétrico en G , de vértices V_1, \dots, V_{24} dados en (2,1,1) y dispuestos como se muestra en la Figura 3.

Además los vectores

$$\begin{cases} N_1 = \frac{3}{2}A_1, & N_2 = \frac{3}{2}A_2, & N_3 = \frac{3}{2}A_3, \\ N_4 = A_1 + A_2 + A_3, & N_5 = A_1 + A_2 - A_3, \\ N_6 = A_1 - A_2 + A_3, & N_7 = A_1 - A_2 - A_3, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

son normales, respectivamente, a las caras (paralelogramos y exágonos regulares afines)

$$\begin{cases} V_1 V_6 V_7 V_8, & V_2 V_{11} V_{12} V_3, & V_5 V_4 V_{21} V_{22}, \\ V_1 \dots V_6, & V_1 V_2 V_{11} V_{10} V_9 V_8, & V_5 V_6 V_7 V_{24} V_{23} V_{22}, \\ V_8 V_7 V_{24} V_{15} V_{16} V_9, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

y a sus respectivas caras opuestas (y paralelas) respecto a G ,

$$\begin{cases} V_{13} V_{18} V_{19} V_{20}, & V_{14} V_{23} V_{24} V_{15}, & V_{17} V_{16} V_9 V_{10}, \\ V_{13} \dots V_{18}, & V_{13} V_{14} V_{23} V_{22} V_{21} V_{20}, \\ V_{17} V_{18} V_{19} V_{12} V_{11} V_{10}, & V_{20} V_{19} V_{12} V_3 V_4 V_{21} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Demostración. A partir de las relaciones en (2,1,1) y de $(AxB)x(CxD) = (AxB \cdot D)C -$

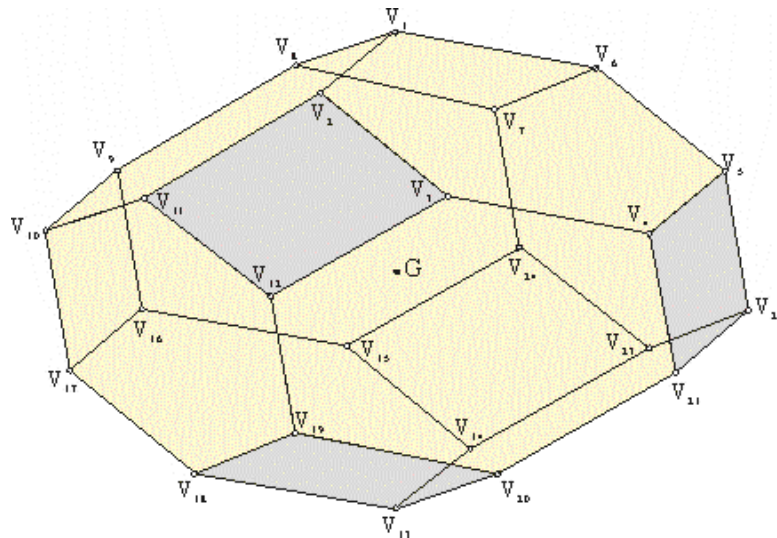


Figura 3. $G + S_r [0]$, es el octaedro truncado afín $V_1 \dots V_{24}$ de centro $G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+12}) \quad i = 1, \dots, 12$

$(AxB \cdot C)D$ hallamos

$$\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = 3c^3 \Delta^2 \neq 0,$$

es decir, G, V_1, V_2 y V_3 son afinmente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo que G', V'_1, V'_2, vt en el octaedro truncado de la Figura 2 (de hecho no degenerado).

Por tanto existe un único automorfismo afín $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(G') = G \quad , \quad f(V'_k) = V_k \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.1.5)$$

([2] , p. 429; [9], p. 8). Puede verificarse pacientemente que los demás puntos V_4, \dots, V_{12} definidos en (2,1,1) son combinaciones lineales promedio de G, V_1, V_2, V_3 análogas a las correspondientes en (1,2,2). Por tanto se sigue de (1,2,1) y (2,1,5) que

$$f(V'_i) = V_i \quad , \quad i = 1, \dots, 24.$$

Concluimos, de acuerdo a la Definición 1.1, que $V_1 \dots V_{24}$ es un $\{3, 4\}$ -afín truncado de centro G y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 3.

Es fácil verificar que todos los puntos en (2,1,1) están en los semiespacios cerrados

$$\begin{cases} -r \leq (X - G) \cdot N_k & \text{y} & (X - G) \cdot N_k \leq r \\ k = 1, \dots, 7 \end{cases} \quad , \quad (2.1.6)$$

cuyas fronteras contienen las caras listadas en (2,1,4) y (2,1,3), respectivamente, donde N_k se ha definido en (2,1,2).

Consideremos ahora el $\{3, 4\}$ -afín truncado $V_1 \dots V_{24}$ como un poliedro macizo cerrado \mathfrak{C} . Entonces

$$\mathfrak{C} = \text{conv}\{V_1, \dots, V_{24}\} \quad ,$$

la envolvente convexa de sus vértices ([9], p. 158, Theorem 17,2; p. 12, Corollary 2.3.1). Siendo cada punto X en \mathfrak{C} una combinación convexa de la forma

$$X = \sum_{j=1}^{24} \lambda_j V_j = G + \sum_{j=1}^{12} (\lambda_j - \lambda_{j+12}) (V_j - G) \quad ,$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{24} = 1 \quad \text{y cada } \lambda_j \leq 0 \quad ,$$

se desprende

$$\begin{cases} (X - G)A_1 = c\Delta \{2(\lambda_1 - \lambda_{12}) + (\lambda_2 - \lambda_{14}) + (\lambda_5 - \lambda_{17}) + 2(\lambda_6 - \lambda_{18}) \\ \quad + 2(\lambda_7 - \lambda_{19}) + 2(\lambda_8 - \lambda_{20}) + (\lambda_9 - \lambda_{21}) + (\lambda_{24} - \lambda_{18})\}, \\ (X - G)A_2 = c\Delta \{(\lambda_1 - \lambda_{13}) + 2(\lambda_2 - \lambda_{14}) + 2(\lambda_3 - \lambda_{15}) + (\lambda_4 - \lambda_{16}) \\ \quad + (\lambda_{19} - \lambda_7) + (\lambda_{10} - \lambda_{22}) + 2(\lambda_{11} - \lambda_{23}) + 2(\lambda_{12} - \lambda_{24})\}, \\ (X - G)A_3 = c\Delta \{(\lambda_3 - \lambda_{15}) + 2(\lambda_4 - \lambda_{16}) + 2(\lambda_5 - \lambda_{17}) + (\lambda_6 - \lambda_{18}) \\ \quad + (\lambda_{20} - \lambda_8) + 2(\lambda_{21} - \lambda_9) + 2(\lambda_{22} - \lambda_{10}) + (\lambda_{23} - \lambda_{11})\}, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
 |(X - G)A_1| &\leq c\Delta\{2|\lambda_1 - \lambda_{13}| + |\lambda_2 - \lambda_{14}| + |\lambda_5 - \lambda_{17}| + 2|\lambda_6 - \lambda_{18}| + 2|\lambda_7 - \lambda_{19}| \\
 &\quad + 2|\lambda_8 - \lambda_{20}| + |\lambda_9 - \lambda_{21}| + |\lambda_{24} - \lambda_{12}|\}, \\
 &\leq 2c\Delta\{2|\lambda_1 - \lambda_{13}| + |\lambda_2 - \lambda_{14}| + |\lambda_5 - \lambda_{17}| + |\lambda_6 - \lambda_{18}| + |\lambda_7 - \lambda_{19}| \\
 &\quad + |\lambda_8 - \lambda_{20}| + |\lambda_9 - \lambda_{21}| + |\lambda_{12} - \lambda_{24}|\}, \\
 &\leq 2c\Delta\{(\lambda_1 + \lambda_{13} + \lambda_2 + \lambda_{14} + \lambda_5 + \lambda_{17} + \lambda_6 + \lambda_{18} + \lambda_7 + \lambda_{19} + \lambda_8 \\
 &\quad + \lambda_{20} + \lambda_9 + \lambda_{21} + \lambda_{12} + \lambda_{24}) \\
 &\leq 2c\Delta \sum_{j=1}^{24} \lambda_j = 2c\Delta = \frac{2r}{3}
 \end{aligned}$$

Análogamente, se prueba en general que

$$|(X - G)A_k| \leq \frac{2r}{3}, \quad k = 1, 2, 3$$

Además

$$\sum_{k=1}^3 |(X - G)A_k| \leq c\Delta \sum_{j=1}^{12} 3|\lambda_j - \lambda_{j+12}| \leq 3c\Delta \sum_{j=1}^{12} (\lambda_j + \lambda_{j+12}) = 3c\Delta = r$$

Estos resultados conducen a la contención $\mathfrak{C} \subseteq S_r[G]$ (la esfera cerrada de centro G y radio r , respecto a la norma φ).

Por ser $\varphi(X - G)$ una función real, convexa, propia y cerrada, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\text{int}(S_r[G]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X - G) < r\} = S_r(G),$$

y

$$F_r(S_r[G]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X - G) = r\}$$

([9], p. 59, Corollary 7.6.1).

Si $X \in \text{conv}\{V_1, \dots, V_6\} \subseteq \mathfrak{C}$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ no negativos, $\lambda_1 + \dots + \lambda_6 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_6 V_6 + oV_7 + \dots + oV_{24},$$

reduciéndose las expresiones en (2,1,7) a

$$\begin{aligned}
 |(X - G) \cdot A_1| &= (X - G) \cdot A_1 = \frac{r}{3}(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5 + 2\lambda_6), \\
 |(X - G) \cdot A_2| &= (X - G) \cdot A_2 = \frac{r}{3}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4), \\
 |(X - G) \cdot A_3| &= (X - G) \cdot A_3 = \frac{r}{3}(\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6),
 \end{aligned}$$

lo que implica

$$|(X - G) \cdot A_k| \leq \frac{2r}{3} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \quad \text{y}$$

$$\sum_{k=1}^3 |(X - G) \cdot A_k| = \frac{r}{3}(3\lambda_1 + \cdots + 3\lambda_6) = r \quad ,$$

esto es,

$$\varphi(X - G) = r \quad \text{y} \quad \text{conv}\{V_1, \dots, V_6\} \subseteq F_r(S_r[G])$$

Así, usando (2,1,7), en general se prueba (con laboriosidad !!) que todas las caras de \mathfrak{C} están contenidas en la frontera de $S_r[G]$. Por tanto

$$\mathfrak{C} \subseteq S_r[G] \quad \text{y} \quad F_r(\mathfrak{C}) \subseteq F_r(S_r[G]) \quad (2.1.8)$$

Si $X \in S_r[G] \sim \mathfrak{C}$ entonces X es un punto interior de $\mathfrak{C}' (= \mathbb{R}^3 \sim \mathfrak{C})$ por ser \mathfrak{C} cerrado, y el segmento $\overline{GX} \subseteq S_r[G]$ corta a $F_r(\mathfrak{C})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathfrak{C} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{int}(S_r[G])$ ([9], p. 45, Theorem 6.1) y además por (2.1.8) $P \in F_r(S_r[G])$ lo cual es imposible. Así que $S_r[G] \subseteq \mathfrak{C}$.

2.2. Corolario

Sea \mathfrak{C} un $\{3, 4\}$ -afín truncado, macizo y cerrado, de vértices V_1, \dots, V_{24} dispuestos como se muestra en la Figura 3, centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+12}) \quad , \quad i = 1, \dots, 12,$$

y hagamos

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{3} \nabla^{-1} \{2(V_2 - G) \times (V_3 - G) + (V_3 - G) \times (V_1 - G)\} , \\ A_2 = \frac{1}{3} \nabla^{-1} \{2(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) + 2(V_3 - G) \times (V_1 - G)\} , \\ A_3 = \frac{1}{3} \nabla^{-1} (V_1 - G) \times (V_2 - G) , \end{cases} \quad (2.2.1)$$

donde

$$\nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G)$$

Entonces, en referencia a dichos vectores, \mathfrak{C} es la esfera cerrada unitaria de centro G , respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 definida en (1,3,1).

Demostración. Por la definición 1,1, \mathfrak{C} es un poliedro no-degenerado y, por tanto, $\nabla \neq 0$. Además teniendo en mente las expresiones en (2,2,1) obtenemos

$$\Delta = \det(A_1, A_2, A_3) = \frac{1}{9} \nabla^{-1} \neq 0$$

En otras palabras, los vectores A_1, A_2, A_3 definidos en (2,2,1) son linealmente independientes bajo los cuales, como en el Teorema 2,1, consideramos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 definida

en (1,3,1). Por tanto su esfera cerrada unitaria $S_1[G]$ es un $\{3, 4\}$ -afín truncado de centro G , de manera tal que volviendo a las expresiones en (2,1,1) se demuestra que V_1 , V_2 y V_3 son también vértices de $S_1[G]$.

Ahora, dado que \mathfrak{C} es la imagen de un $\{3, 4\}$ truncado bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 , entonces sus vértices (y los de $S_1[G]$, según se estableció en la demostración del Teorema 2,1) son combinaciones lineales promedio de G , V_1 , V_2 , V_3 correspondientemente análogas a las listadas en (1,2,2). Se colige que los vértices de $S_1[G]$ son justamente V_1, \dots, V_{24} , es decir $S_1[G] = \mathfrak{C}$.

3. El $\{3, 4\}$ - afín truncado como la intersección de un cubo y un octaedro regular afines

3.1. Observación

En analogía a la definición 1,1, un octaedro regular afín, o $\{3, 4\}$ -afín, es la imagen de un octaedro regular bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 . Así mismo, el paralelepípedo es un cubo afín, o $\{4, 3\}$ -afín.

Los vértices del octaedro truncado afín están sobre las caras de un paralelepípedo (cuatro en cada cara) y son los puntos medios de los segmentos con extremos el centro de cada cara y los puntos medios de los lados de la cara. También resulta de la intersección de dicho paralelepípedo y un octaedro regular afín (concéntricos), de manera tal que, cada una de sus aristas contiene dos vértices del octaedro truncado afín que la dividen en tres segmentos iguales ([5], pp. 54 - 57).

Resultados previamente obtenidos por el autor sobre el $\{3, 4\}$ -afín ([10]) y el $\{4, 3\}$ -afín (Ver [10] y [12]) nos permiten (Corolario 3,2) demostrar rigurosamente cómo el $\{3, 4\}$ -afín truncado es, en efecto, la intersección de dichos sólidos, determinándose explícitamente sus vértices a partir de los del octaedro truncado afín.

3.2. Corolario

Sea \mathfrak{C} un $\{3 - 4\}$ -afín truncado, macizo y cerrado, de vértices V_1, \dots, V_{24} dispuestos como en la Figura 3 y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+12}) \quad , \quad i = 1, \dots, 12$$

Entonces los puntos

$$\begin{cases} U_1 = -V_1 + \frac{3}{2}V_6 + V_7 - \frac{1}{2}V_8 \ , \\ U_2 = -V_1 - \frac{1}{2}V_6 + V_7 + \frac{3}{2}V_8 \ , \\ U_3 = -2V_1 - \frac{1}{2}V_6 + \frac{3}{2}V_8 + 2G \ , \\ U_4 = -V_1 + \frac{1}{2}V_6 + V_7 - \frac{3}{2}V_8 + 2G \ , \\ U_{k+4} = 2G - U_k \quad , \quad k = 1, \dots, 4 \quad , \end{cases} \quad (3.2.1)$$

son los vértices, dispuestos como en la Figura 4, de un paralelepípedo \mathfrak{P} , macizo y cerrado, de centro G ; y los puntos

$$\begin{cases} W_1 = 2V_8 - V_9, & W_2 = 2V_9 - V_8, \\ W_3 = 3V_7 - 4V_8 + 2V_9, \\ W_{k+3} = 2G - W_k, & k = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

son los vértices (como en la Figura 4) de un octaedro regular afín, macizo y cerrado \mathfrak{U} de centro G , tales que

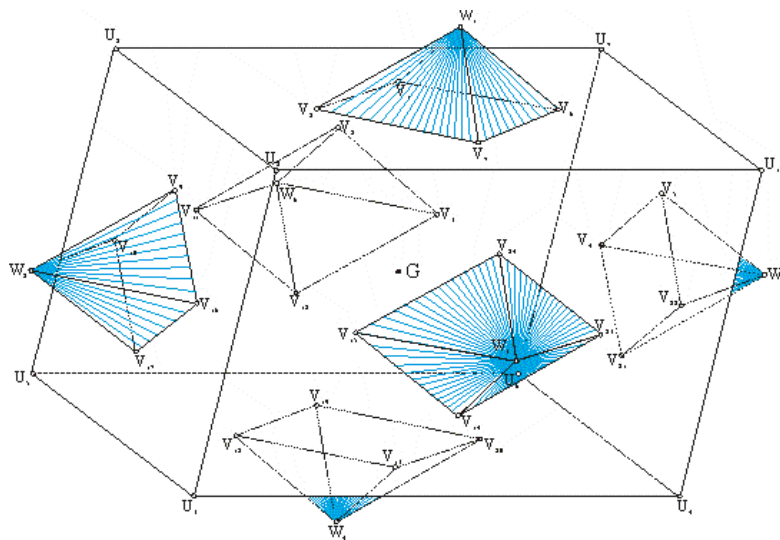


Figura 4. El $\{3,4\}$ -afín truncado $V_1 \dots V_{24}$ de centro $G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+12})$, $i = 1, \dots, 12$, como la intersección del paralelepípedo $U_1 \dots U_8$ y el octaedro regular afín $W_1 \dots W_6$ de centro común $G = \frac{1}{2}(U_j + U_{j+4}) = \frac{1}{2}(W_k + W_{k+3})$ $j = 1, \dots, 4$, $k = 1, \dots, 3$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{U},$$

donde los vértices de \mathfrak{C} están sobre las caras de \mathfrak{P} (cuatro en cada cara) y son los puntos medios de los segmentos con extremos el centro de cada cara \mathfrak{P} y los puntos medios de los lados de la cara. A la vez, cada arista de \mathfrak{U} contiene dos vértices de \mathfrak{C} que la dividen en tres segmentos iguales (Ver Figura 4).

Demostración. De acuerdo al Corolario 2,2 existen vectores A_1, A_2 y A_3 , linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , según los cuales, \mathfrak{C} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ introducida en (1,3,1).

Aludiendo al Teorema 2,1 (con $r = 1$), de las relaciones en (3,2,1), (3,2,2) y (2,1,1)

obtenemos

$$\begin{aligned}
 W_1 - G &= \frac{3}{4}(U_2 - U_3) = 3c A_2 \times A_3 , \\
 -(W_2 - G) &= \frac{3}{4}(U_4 - U_3) = 3c A_1 \times A_2 , \\
 -(W_3 - G) &= \frac{3}{4}(U_5 - U_3) = 3c A_3 \times A_1 , \\
 (U_4 - U_3) \times (U_5 - U_3) &= -\frac{32}{9}c N_1 , \\
 (U_5 - U_3) \times (U_2 - U_3) &= -\frac{32}{9}c N_3 , \\
 (U_2 - U_3) \times (U_4 - U_3) &= -\frac{32}{9}c N_2 , \\
 \det(W_1 - G, W_2 - G, W_3 - G) \\
 &= \frac{27}{64} \det(U_2 - U_3, U_4 - U_3, U_5 - U_3) = -3c \neq 0 ,
 \end{aligned}$$

donde N_1, N_2 y N_3 se han definido como en (2,1,2).

Entonces,

$$\mathfrak{P} = \{U_3 + \lambda_1(U_2 - U_3) + \lambda_2(U_4 - U_3) + \lambda_3(U_5 - U_3) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\} ,$$

es un paralelepípedo de centro G , y vértices

$$U_3 + \lambda_1(U_2 - U_3) + \lambda_2(U_4 - U_3) + \lambda_3(U_5 - U_3) ,$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{0, 1\}^3 , ,$$

([8], pp. 337 - 338), esto es (usando (3,2,1)), U_1, \dots, U_8 .

Así,

$$X \in \mathfrak{P} \quad \text{si y solo si} \quad |N_k \cdot (X - G)| \leq 1, \quad k = 1, 2, 3$$

([12], p. 110 Teorema 1).

Además los puntos W_1, \dots, W_6 son, en efecto, los vértices de un octaedro regular afín \mathfrak{U} , sólido, cerrado y de centro G ([10], p. 53. Corolario 1; p. 41 Observación 1) e inecuación

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} &\leq \sum_{k=1}^3 |N_k \cdot (X - G)| \\
 &= \max_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{0, 1\}^3} \left| (X - G) \cdot \sum_{k=1}^3 (-1)^{\lambda_k} N_k \right| \\
 &= \frac{3}{2} \max_{4 \leq k \leq 7} |N_k \cdot (X - G)| ,
 \end{aligned}$$

expresión equivalente a

$$|N_k \cdot (X - G)| \leq 1 \quad , \quad k = 4, \dots, 7$$

Puesto que \mathfrak{C} es convexo y cerrado, entonces \mathfrak{C} es la intersección de todos sus semi-espacios cerrados tangentes ([9], p. 169 Theorem 18.8) consignados en (2.1.6). Esto es,

$$X \in \mathfrak{C} \quad \text{si y solo si} \quad |N_k \cdot (X - G)| \leq 1 \quad , k = 1, \dots, 7 \quad ,$$

si y solo si

$$\begin{aligned} & (|N_1 \cdot (X - G)| \leq 1 \wedge |N_2 \cdot (X - G)| \leq 1 \wedge |N_3 \cdot (X - G)| \leq 1) \\ & \wedge (|N_4 \cdot (X - G)| \leq 1 \wedge \dots \wedge |N_7 \cdot (X - G)| \leq 1) \quad , \end{aligned}$$

si y solo si $X \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$. Es decir,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{U}$$

Observando las expresiones en (3,2,1) y (3,2,2) (como la Figura 4) el lector puede verificar la última parte del Corolario 3.2, sobre cómo se obtienen los vértices de \mathfrak{C} a partir de \mathfrak{P} y \mathfrak{U} .

3.3. Ilustración

Consideremos el octaedro regular de Edmund Hess ([3], p. 52). Los puntos que dividen cada una de sus aristas en tres segmentos iguales determinan los siguientes vértices

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}(1, 0, 2), & V_2 &= \frac{1}{3}(2, 0, 1), \\ V_3 &= \frac{1}{3}(2, 1, 0), & V_4 &= \frac{1}{3}(1, 2, 0), \\ V_5 &= \frac{1}{3}(0, 2, 1), & V_6 &= \frac{1}{3}(0, 1, 2), \\ V_7 &= \frac{1}{3}(-1, 0, 2), & V_8 &= \frac{1}{3}(0, -1, 2), \\ V_9 &= \frac{1}{3}(0, -2, 1), & V_{10} &= \frac{1}{3}(1, -2, 0), \\ V_{11} &= \frac{1}{3}(2, -1, 0), & V_{12} &= \frac{1}{3}(2, 0, -1), \\ V_{i+12} &= -V_i, & & i = 1, \dots, 12, \end{aligned}$$

de un octaedro truncado de centro el origen y arista $\frac{\sqrt{2}}{3}$, dispuestos como en la Figura 3.

En este caso, $\nabla = \det(V_1, V_2, V_3) = \frac{1}{9}$, $V_1 \times V_2 = \frac{1}{3}(0, 1, 0)$, $V_2 \times V_3 = \frac{1}{9}(-1, 2, 2)$, $V_3 \times V_1 = \frac{1}{9}(2, -4, -1)$, y las expresiones en (2,2,1) se reducen a $A_1 = (0, 0, 1)$, $A_2 = (1, 0, 0)$ y $A_3 = (0, 1, 0)$.

Concluimos del Corolario 2,2 que (x_1, x_2, x_3) en \mathbb{R}^3 es un punto de este poliedro, como sólido macizo y cerrado, si y solo si satisface su inecuación

$$\text{máx} \left\{ \frac{2}{3} (|x_1| + |x_2| + |x_3|), |x_1|, |x_2|, |x_3| \right\} \leq \frac{2}{3}$$

Ahora, según el Corolario 3,2, las relaciones en (3,2,1) nos dan los vértices de un cubo de centro el origen tales que $\pm 3U_k$, $k = 1, \dots, 4$ son precisamente los vértices del cubo de Hess ([3], p. 52). Y de la manera como obtuvimos nuestro octaedro truncado, los puntos en (3,2,2) son justamente los vértices del octaedro regular de Hess.

4. Una caracterización de los puntos y una representación del octaedro truncado

La observación 3,1 muestra que los centros de las caras cuadradas de un octaedro truncado lo son también de las caras de un cubo. Por tanto, dichos centros son los vértices de un octaedro regular. Esta propiedad nos permite **caracterizar**, a continuación, los puntos del octaedro truncado.

4.1. Corolario

Sea \mathfrak{C} un octaedro truncado macizo cerrado, de centro G y arista a . Si C_1, C_2, C_3 son los centros de tres caras cuadradas no opuestas de \mathfrak{C} , entonces

i) La inecuación de \mathfrak{C} es

$$\text{máx} \left\{ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 |(C_k - G)(X - G)|, |(C_1 - G)(X - G)|, |(C_2 - G)(X - G)|, |(C_3 - G)(X - G)| \right\} \leq 2a^2, \quad (4.1.1)$$

donde la igualdad ocurre en la frontera de \mathfrak{C}

ii) Si L_k es la recta a través de G y C_k , $k = 1, 2, 3$ entonces

$$\mathfrak{C} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} \text{máx} \left\{ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } L_k, \right. \\ \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } L_1, \dots, \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } L_3 \\ \left. \geq \sqrt{2}a \right\} \end{array} \right. \right\}$$

(Ver Figura 5).

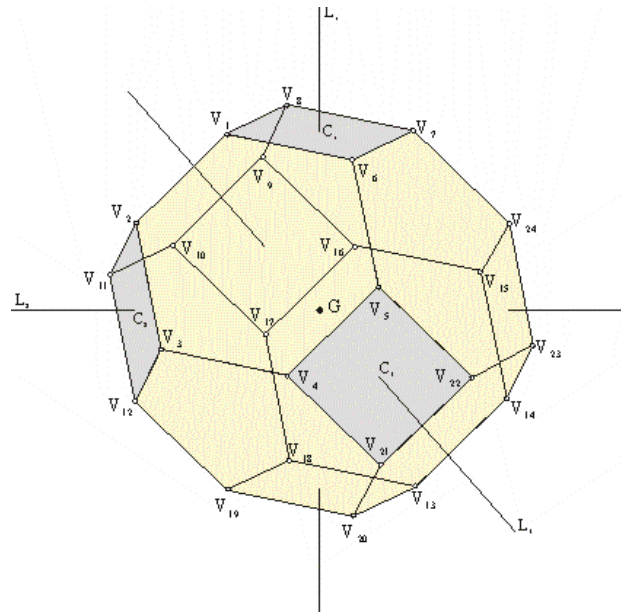


Figura 5.

Demostración. Sean V_1, \dots, V_{24} los vértices de \mathfrak{C} dispuestos como en la Figura 5, de centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+12}) , \quad i = 1, \dots, 12.$$

Por el corolario 2,2, \mathfrak{C} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 definida en (1,3,1) bajo las condiciones en (2,2,1).

Si C_1, C_2, C_3 son los centros de los cuadrados (no opuestos) $V_1 V_6 V_7 V_8, V_2 V_{11} V_{12} V_3$ y $V_5 V_4 V_{21} V_{22}$, entonces $C_1 - G, C_2 - G$ y $C_3 - G$ son vectores normales a estas caras, respectivamente (Las caras cuadradas de \mathfrak{C} son tangentes (en su centro) a la insfera de un cubo de centro G , cuyas caras y las cuadradas de \mathfrak{C} , tienen centro común (Corolario 3,2)).

Siendo en este caso, regular, el octaedro \mathfrak{U} del Corolario 3.2, entonces la arista de \mathfrak{U} es 3 a. Si R_1 es el radio de la esfera media de \mathfrak{U} entonces $R_1 = \frac{3a}{2}$ ([3], p. 292, Table I). De este modo, si R es el circunradio de \mathfrak{C} , el Teorema de Pitágoras nos da

$$R^2 = R_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}a^2 ,$$

dado que el radio medio es perpendicular a la arista de \mathfrak{U} en el punto de tangencia (o punto medio de la arista). Por tanto la pirámide de ápice G y base el cuadrado $V_1 V_6 V_7 V_8$ (Ver Figura 5) tiene altura

$$h = \|C_k - G\| = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{2} a , \quad k = 1, 2, 3$$

De acuerdo a la última parte del Teorema 2,1 y a las relaciones en (2,1,6), existen escalares t_k tales que $A_k = t_k(C_k - G)$ y

$$t_k(C_k - G)(V_{2k-1} - G) = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, 3$$

Siendo h la distancia de G a los planos de los cuadrados de centro C_1, C_2, C_3 entonces

$$\sqrt{2} a = \frac{|(C_k - G)(V_{2k-1} - G)|}{\|C_k - G\|} \quad \text{y}$$

$$|t_k| = \frac{1}{3a^2}, \quad k = 1, 2, 3,$$

reduciéndose $\varphi(X - G) \leq 1$ a la expresión (4,1,1); o bien

$$\max \left\{ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \|X - G\| |\cos \theta_k|, \|X - G\| |\cos \theta_1|, \right. \\ \left. \|X - G\| |\cos \theta_2|, \|X - G\| |\cos \theta_3| \right\} \leq \sqrt{2} a,$$

siendo θ_k el ángulo entre $X - G \neq \mathbf{0}$ y $C_k - G$, $k = 1, 2, 3$.

5. Estereometría del $\{3, 4\}$ -afín truncado

5.1. Teorema

Sea \mathfrak{C} un octaedro truncado afín de vértices V_1, \dots, V_{24} dispuestos como se muestra en la Figura 3, y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+12}), \quad i = 1, \dots, 12$$

Hagamos

$$\begin{cases} W_1 = 2(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - 2(V_1 - G) \times (V_3 - G), \\ W_2 = (V_1 - G) \times (V_2 - G), \\ W_3 = 2(V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_1 - G) \times (V_3 - G), \end{cases} \quad (5.1.1)$$

y sea \mathfrak{L} la matriz cuadrada no singular de orden tres, cuya i -ésima columna es W_i^t . Entonces,

i) La ecuación del circunelipsoide de \mathfrak{C} (el elipsoide donde está inscrito \mathfrak{C}) es

$$(X - G)\mathfrak{L}\mathfrak{L}^T(X - G)^T = 5\nabla^2, \quad (5.1.2)$$

donde \mathfrak{L}^T (y similares) es la transpuesta de \mathfrak{L} , y

$$\nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G)$$

ii) Si f es el automorfismo afín de \mathbb{R}^3 representado por

$$f(X) = \frac{1}{3} \nabla^{-1} (X - G) \mathfrak{L} , \quad X \in \mathbb{R}^3 , \quad (5.1.3)$$

entonces $f(\mathfrak{C})$ es (¡justamente!) el octaedro truncado de la ilustración 3,3. Sus vértices $f(V_1), \dots, f(V_{24})$ son los correspondientes puntos listados en dicha ilustración.

iii) El volumen de \mathfrak{C} es $\frac{32}{3} |\nabla|$

Demostración. Dado que

$$\det \mathfrak{L} = \det \mathfrak{L}^T = \det(W_1, W_2, W_3) = 3 \nabla^2 \neq 0 ,$$

entonces \mathfrak{L} es no - singular y $\mathfrak{L}\mathfrak{L}^T$ es una matriz simétrica positivamente definida y la ecuación (5,1,2) es, en efecto, la de un elipsoide de centro G ([14], pp. 282 - 285).

Las expresiones

$$(X - G)\mathfrak{L}\mathfrak{L}^T(X - G)^T = \|(X - G)\mathfrak{L}\|^2 ,$$

$$(X - G)\mathfrak{L} = ((X - G) \cdot W_1, (X - G) \cdot W_2, (X - G) \cdot W_3) ,$$

y las dadas en (5,1,1) ayudan a verificar (5,1,2) para V_1, V_2 y V_3 . Para demostrar que los otros vértices V_4, \dots, V_{24} también satisfacen (5,1,2) acudimos a las correspondientes relaciones en (1,2,2).

Procediendo así también se demuestra que $f(V_1), \dots, f(V_{24})$ son los correspondientes puntos listados en la ilustración 3,3, donde f es como en (5,1,3).

Consideremos un octaedro truncado de arista a , centro el origen $\mathbf{0}$ y vértices dispuestos como en la Figura 5. Se estableció en la demostración del Corolario 4,1, que $R = \sqrt{\frac{5}{2}} a$ es su circunradio y que, $\sqrt{2} a$ es la altura de las pirámides basadas sobre las caras cuadradas de ápice $\mathbf{0}$, por lo que su volumen es $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$.

El exágono regular tiene lado y circunradio iguales, por tanto las pirámides basadas en las caras exagonales y de ápice $\mathbf{0}$ tienen altura cuyo cuadrado, por el Teorema de Pitágoras, es $R^2 - a^2 = \frac{3}{2} a^2$, siendo así su volumen

$$\frac{1}{3} \left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} a \right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} a^3 ,$$

donde $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ es el área del triángulo equilátero de lado a .

Se sigue que en particular, el volumen del octaedro truncado de la ilustración 3,3

$\left(a = \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, es

$$\left\{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} + 8 \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}$$

Por tanto se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{32}{27} &= v \cdot \left| \det \left(\frac{1}{3} \nabla^{-1} \mathfrak{L} \right) \right| \\ &= \frac{|\nabla|^{-1}}{9} v \quad , \end{aligned}$$

donde v es el volumen de \mathfrak{C} ([1], p. 243, Corollary).

Bibliografía

- [1] BIRKHOFF, G., *A brief survey of Modern Algebra*. Second edition, The Macmillan Company, 1965.
- [2] —————, *Algebra*. Fourth printing, 1970.
- [3] COXETER, H., *Regular Polytopes*. Third edition, New York: Dover Publications, 1973.
- [4] FEDOROV, E., *Elemente der Gestaltenlehre*. Mineralogisches obshchestvo, Leningrad (=Verhandlungen der Russisch-Kaiserlichen Mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg) (2), 21 (1.885), pp. 1 - 279 (especially pp. 193 - 198). Abstract in *Zeitschrift für Krystallographic und Mineralogie*, 21 (1.893), pp. 688 - 689.
- [5] GHYKA, M., *The Geometry of Art and Life*. First edition, New York: Dover Publications, 1.977.
- [6] LYUSTERNIK, L., *Convex Figures and Polyhedra*. First edition, New York: Dover Publications, 1963.
- [7] MIYAZAKI, K., *An Adventure in Multidimensional Space*. John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [8] MOSTOW, S., *Fundamental Structures of Algebra*. New York: Mc Graw- Hill, 1963.
- [9] ROCKAFELLAR, R., *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1972.
- [10] RUIZ, E., *Esferas hiper-octaédricas centralmente simétricas*. En: *Revista Integración*. Bucaramanga: Departamento de Matemáticas, UIS. Vol. 9, No. 1(1991).

- [11] _____, *Los paralelogonos como esferas respecto a normas sobre \mathbb{R}^2* . En: Memorias del III Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. (Junio 15 - 17 1.992).
- [12] _____, *Geometría de las esferas paralelepípedicas*. En: Revista Integración, Bucaramanga: Departamento de Matemáticas U.I.S. Vol. 11, No. 2, (1993).
- [13] STEVENS, P., *Patrones y Pautas en la Naturaleza*. Vol. 55. Barcelona: Salvat Editores S.A, Biblioteca Científica, 1987.
- [14] STRANG, G., *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1982.