Sobre lógicas multivaluadas

Arnold Oostra
Profesor Universidad del Tolima
Becario 2003–2004 de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia
Ibagué, Colombia
oostra@bunde.tolinet.com.co

Resumen

En esta nota, aparte de introducciones muy generales a tres lógicas sin la dualidad verdadero/falso —la lógica intuicionista de Brouwer, las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz y la lógica difusa de Zadeh— se presenta una formalización reciente de la lógica difusa.

En la lógica clásica las proposiciones pueden tomar solo dos valores de verdad, *verdadero* y *falso*. Según C. S. Peirce esta es "la hipótesis más simple"; mucho antes Aristóteles ya había formulado los principios fundamentales de la lógica clásica, el de no contradicción —nada puede ser y no ser al mismo tiempo/un enunciado no puede ser a la vez verdadero y falso— y el principio del tercio excluso —algo es o no es/todo enunciado es verdadero o es falso—.

Sin demeritar en manera alguna los desarrollos portentosos de la lógica y la matemática clásicas, se observa con rapidez que hay muchas situaciones para cuya discusión se requieren más valores de verdad. Los fenómenos cotidianos afectados por la percepción y el comportamiento humanos —como los gustos, la riqueza, el significado de los adjetivos— solo pueden estudiarse con precisión si se consideran gradaciones muy complejas. Aún en modelos matemáticos muy utilizados la lógica bivalente conduce a aparente paradojas, por ejemplo: si la recta real usual se corta en un punto, ¿a cuál de las dos semirrectas pertenece el punto de corte? Por simetía no debería pertenecer a ninguna de las dos o a ambas...

Durante el siglo XX se han propuesto diversas lógicas con más valores de verdad: la lógica *triádica* de Peirce; la lógica *intuicionista* de Brouwer, capturada de manera parcial por el llamado cálculo proposicional intuicionista cuyos modelos algebraicos son las álgebras de Heyting; las lógicas *m-valuadas* de Post que tienen una contraparte algebraica en las llamadas álgebras de Post; las lógicas *multivaluadas* o *polivalentes* introducidas por la escuela polaca de lógica y en especial por Jan Łukasiewicz; la lógica *borrosa* o *difusa* de Zadeh, consistente en sustituir el conjunto $\{0, 1\}$ por el segmento real $[0, 1]$.

A continuación se presentan algunos detalles de tres de estas lógicas multivaluadas que, al final, resultan conectadas en cierta forma: la intuicionista, la de Łukasiewicz y la difusa.

1. La lógica intuicionista de Brouwer

El intuicionismo encuentra su origen en los trabajos del matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881–1966) quien ya desde su tesis doctoral, presentada en 1907, intervino en la entonces candente discusión sobre los fundamentos de la matemática. Entre los precursores de las ideas intuicionistas pueden mencionarse a Kronecker, Poincaré, Borel y Weyl; las grandes corrientes filosóficas antagonistas fueron el formalismo propugnado por Hilbert y el logicismo impulsado por Frege, Whitehead y Russell [7, 15].

El principio básico del intuicionismo es la *constructibilidad*: para el intuicionista los objetos de estudio de la matemática son ciertas intuiciones mentales y las construcciones que pueden hacerse con ellas. La consecuencia inmediata es que la matemática intuicionista solo maneja objetos construidos y solo reconoce las propiedades puestas en ellos por la construcción. En particular, la negación de la imposibilidad de un hecho no es una construcción del mismo luego el principio de doble negación y las demostraciones por reducción al absurdo son inaceptables para el intuicionista. De igual manera, es perfectamente factible que un hecho y su negación sean ambos imposibles de construir luego, en general, en el intuicionismo no vale el principio del tercio excluso.

A finales de la década de los 20 se propuso el problema de formalizar el intuicionismo. Aunque a primera vista eso parezca una tarea contradictoria, lo que se pretendía era construir, dentro de la matemática formalista que ya se estaba imponiendo, una lógica que de alguna manera reflejara los principios intuicionistas.

¿Y qué debe entenderse por *una* lógica? En la matemática actual se maneja una variedad infinita de lógicas, siendo el prototipo la lógica proposicional clásica. En los cursos de matemáticas fundamentales se suele presentar esta lógica de dos maneras: mediante reglas de inferencia y mediante tablas de verdad.

El cálculo proposicional clásico

Las reglas de inferencia representan la versión *sintáctica* de la lógica. En esencia este aspecto de la lógica consiste en deducir de manera formal una conclusión a partir de ciertas premisas dadas, empleando para ello reglas permitidas. Una presentación rigurosa de la sintaxis del cálculo proposicional clásico puede encontrarse en el texto de Xavier Caicedo [3] y es la siguiente, aunque aquí se han omitido los axiomas que definen los conectivos $\wedge$ y $\vee$.

Axiomas

1. $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

Regla

La única es *Modus Ponens*: de α y $\alpha \to \beta$ puede pasarse a β.

Ahora una fórmula φ *se deduce* de un conjunto de fórmulas Γ, hecho que se denota $\Gamma \vdash \varphi$, si existe una sucesión finita de fórmulas, la última de las cuales es φ y cada una de las cuales o bien pertenece a Γ —es una premisa— o bien es un axioma o bien se sigue de fórmulas anteriores de la sucesión por una regla de inferencia. A manera de ejemplo sigue una posible deducción de la fórmula $p \to p$.

1. $(p \to ((q \to p) \to p)) \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to p))$	Ax 2
2. $p \to ((q \to p) \to p)$	Ax 1
3. $(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$	MP/1,2
4. $p \to (q \to p)$	Ax 1
5. $p \to p$	MP/3,4

Aquí es claro que alterando los axiomas y las reglas es posible diseñar muchas lógicas — de hecho, *una* lógica proposicional puede definirse en abstracto como una relación de deducción $\vdash$ que satisface determinadas propiedades [1].

Quizás las fórmulas más importantes de una lógica son las que —como en el ejemplo anterior— pueden deducirse sin premisas, pues son las "verdades" de la lógica. Estas fórmulas reciben el nombre de *teoremas*. Hay otras afirmaciones que, en tanto teoremas matemáticos que afirman hechos sobre determinada lógica, pueden denominarse *metateoremas*. Tal es el caso del llamado *teorema de la deducción* válido también para el cálculo proposicional clásico: Si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Las tablas de verdad representan la versión *semántica* de la lógica. En esencia este aspecto de la lógica consiste en evaluar la veracidad de una fórmula —veracidad relativa a las proposiciones atómicas que intervienen en ella— interpretándola en un contexto matemático. En la lógica clásica lo que se hace es *leer* la fórmula en el conjunto $\{0, 1\}$, en el cual de antemano se ha convenido la interpretación de los conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\to$. Esa interpretación no es más ni menos que las tradicionales tablas de verdad de estos conectivos.

De hecho el conjunto $\{0, 1\}$ con operaciones o tablas de verdad $\neg$, $\wedge$, $\vee$ es una *álgebra booleana*. Una álgebra booleana puede definirse como un retículo —esto es, un conjunto ordenado en el cual cada par de elementos tiene extremo superior y extremo inferior— con máximo 1 y mínimo 0 y dotado de una negación $\neg$. Las condiciones adicionales exigidas son las siguientes.

$$x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge \neg x \approx 0 \qquad x \vee \neg x \approx 1$$

Los subconjuntos de cualquier conjunto, ordenados por la inclusión conjuntista, constituyen una álgebra booleana definiendo la negación como el complemento. En el caso finito, estas son las únicas álgebras booleanas existentes. Si el conjunto universal es infinito se tienen más ejemplos de álgebras booleanas, por ejemplo la colección de subconjuntos que son finitos o cofinitos —con complemento finito—.

La álgebra booleana $\{0, 1\}$ *genera* todas las álgebras booleanas de una manera muy precisa [2]. Así, cuando una fórmula proposicional se lee en esta álgebra y todas sus lecturas son 1, lo mismo sucede en cualquier álgebra booleana. Una fórmula es una *tautología* en álgebras booleanas si todas sus lecturas en cualquier álgebra booleana siempre son 1. De esta manera, el algoritmo de las tablas de verdad permite encontrar las tautologías en álgebras booleanas.

Un hecho fundamental pero quizás poco enfatizado en los cursos de matemáticas fundamentales es que los aspectos sintáctico y semántico —o bien, lógico y algebraico— de la lógica clásica constituyen dos lados o caras *del mismo fenómeno*. Pues existe un profundo teorema de correspondencia entre sintaxis y semántica que establece que las tautologías en álgebras booleanas coinciden exactamente con los teoremas del cálculo proposicional clásico [3, 8, 10]. Es decir, una fórmula es deducible en el cálculo proposicional clásico sin emplear premisas si y solo si su tabla de verdad tiene 1 en todos los renglones. Se aprecia a simple vista que la utilidad de este metateorema es incalculable, razón por la cual se constituye en un modelo o prototipo emulado por otras lógicas propuestas.

El cálculo proposicional intuicionista

En 1930 Arend Heyting, uno de los discípulos de Brouwer, dio un paso decisivo en la formalización del intuicionismo al presentar un cálculo proposicional expresado mediante axiomas y reglas al estilo de Hilbert y que se conoce como *cálculo proposicional intuicionista*. La siguiente es una presentación actual de este cálculo [3, 13].

Axiomas

1. $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
4. $\alpha \to \neg\neg\alpha$
5. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

Regla

La única es Modus Ponens.

Algunos teoremas y deducciones de la lógica clásica también pueden probarse aquí como $\vdash \alpha \to \alpha$ y $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$, al igual que algunos metateoremas como el teorema de la deducción. Incluso es válida una forma débil de reducción al absurdo, a saber, si $\Sigma, \alpha \vdash \beta, \neg\beta$ entonces $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Pero, como podría esperarse, *no* es posible demostrar el tercio excluso $\alpha \vee \neg\alpha$ ni la doble negación $\neg\neg\alpha \to \alpha$. De aquí se sigue que *no* es válida la forma fuerte de reducción al absurdo.

¿Cómo garantizar que es imposible probar cierta fórmula en un cálculo proposicional? Como se observó en el cálculo proposicional clásico, una alternativa consiste en construir una semántica adecuada. El cálculo proposicional intuicionista tiene como contraparte algebraica una estructura que en la actualidad de manera muy adecuada se denomina *álgebra de Heyting*.

Una álgebra de Heyting puede definirse como un retículo con máximo 1 y mínimo 0, dotado de una implicación $\to$ que satisface la siguiente adjunción.

$$x \leq a \to b \qquad \text{si y solo si} \qquad x \wedge a \leq b$$

En una álgebra de Heyting se define la negación como $\neg a = a \to 0$, de manera que ésta se caracteriza mediante la equivalencia

$$x \leq \neg a \qquad \text{si y solo si} \qquad x \wedge a = 0,$$

o en otras palabras, $\neg a$ es el mayor elemento disyunto con a.

Toda álgebra booleana es una álgebra de Heyting haciendo $a \to b = \neg a \vee b$, pero no al revés: por ejemplo, la única álgebra booleana lineal es $\{0, 1\}$ pero todo conjunto ordenado lineal con máximo 1 y mínimo es una álgebra de Heyting haciendo

$$a \to b = \begin{cases} 1 & \text{cuando } a \leq b, \\ b & \text{cuando } a > b. \end{cases}$$

Los abiertos de cualquier espacio topológico, ordenados por la inclusión conjuntista, constituyen una álgebra de Heyting definiendo $U \to V = Ext(U - V)$ donde Ext denota el *exterior* de un subconjunto, esto es, el interior de su complemento.

Puesto que se construyen con el mismo vocabulario, las fórmulas del cálculo proposicional intuicionista pueden leerse en cualquier álgebra de Heyting. Considérese, por ejemplo, la fórmula $x \to x$. Es claro que se tiene $1 \wedge a \leq a$, luego por la adjunción que define la operación $\to$ se sigue $1 \leq a \to a$, es decir, $a \to a = 1$. Una fórmula es una *tautología* en álgebras de Heyting si, como $x \to x$, todas sus lecturas en cualquier álgebra de Heyting siempre son 1.

En este caso el teorema de correspondencia entre sintaxis y semántica consiste en que las tautologías en álgebras de Heyting coinciden exactamente con los teoremas del cálculo proposicional intuicionista [13]. Este importante resultado garantiza, entre otras consecuencias notables, que $x \vee \neg x$ y $\neg\neg x \to x$ *no* son teoremas del cálculo proposicional intuicionista, es decir, que en esta lógica no vale el tercio excluso ni la ley de la doble negación. Pues en una álgebra de Heyting lineal si $0 < a < 1$ entonces $a \vee \neg a = a \vee 0 = a \neq 1$ y $\neg\neg a \to a = 1 \to a = a \neq 1$. De igual manera en la álgebra de Heyting de los abiertos de la recta real con su topología usual, si $U = (-\infty, 0)$ entonces $U \vee \neg U = \mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}$ y si $V = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ entonces $\neg\neg V \to V = (-\infty, 1) \to V = \mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}$.

A continuación se muestran las tablas de las operaciones negación e implicación de la álgebra de Heyting lineal con tres elementos $0 < \frac{1}{2} < 1$. Estas tablas pueden verse como las tablas de verdad de una lógica intuicionista con tres valores de verdad.

x	$\neg x$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

Desde hace varias décadas el estudio y fomento del intuicionismo como tal prácticamente han cesado. La lógica intuicionista, en cambio, se ha seguido estudiando y ha reaparecido recientemente con fuerza en estudios como la lógica de los haces de Caicedo [4] y la lógica de las categorías y topos [9, 11, 12], lógicas potentes cuyo segmento proposicional es precisamente el cálculo proposicional intuicionista.

2. Las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz

Respecto a la negación en la álgebra de Heyting con tres elementos, las asignaciones $0 \mapsto 1$ y $1 \mapsto 0$ resultan perfectamente aceptables pero la asignación $\frac{1}{2} \mapsto 0$ es muy discutible. En algunas situaciones concretas como las que se mencionaron en la introducción, parece más adecuada una asignación simétrica $\frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{2}$. Esa fue la propuesta de Łukasiewicz.

Jan Łukasiewicz (1878–1956) fue uno de los matemáticos polacos más influyentes de su generación. Junto con Leśniewski fundó durante los años 20 del siglo XX una escuela de lógica en Varsovia que en su momento llegó a ser el principal grupo de matemáticas del mundo y entre cuyos miembros se destaca el gran Alfred Tarski.

La idea de Łukasiewicz sobre lógicas multivaluadas consiste en distribuir los valores de verdad de manera uniforme sobre el segmento real $[0,1]$: si se trata de n valores, ellos son $0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1$; si se trata de infinitos, se toma $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. La *negación* se define como

$$\neg x = 1 - x$$

y para las demás conectivos lógicos se introduce la operación $\oplus$ como

$$x \oplus y = min\{1, x+y\}.$$

La constante 1 y las operaciones $\odot$, $\rightarrow$ (*implicación*), $\vee$ (*disyunción*) y $\wedge$ (*conjunción*) se definen en términos de las anteriores como sigue.

$$\begin{aligned} 1 &= \neg 0 & & \\ x \odot y &= \neg(\neg x \oplus \neg y) & &= max\{0, x+y-1\} \\ x \rightarrow y &= \neg x \oplus y & &= min\{1, 1-x+y\} \\ x \vee y &= \neg(\neg x \oplus y) \oplus y & &= max\{x, y\} \\ x \wedge y &= \neg(\neg x \odot y) \odot y & &= min\{x, y\} \end{aligned}$$

Como un caso particular interesante, a continuación se muestran las tablas de negación e implicación de la lógica con tres valores. Al compararlas con las tablas de la álgebra de Heyting con tres elementos se observa que la diferencia es mínima pero esencial.

x	$\neg x$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

En tiempos más recientes —según [5], en 1958 por Chang— se introdujo la noción de *MV-álgebra*. Una MV-álgebra es una estructura $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, $\oplus$ es una operación binaria en A, $\neg$ una operación unaria y 0 una constante, que además satisfacen las siguientes ecuaciones.

1. $x \oplus (y \oplus z) \approx (x \oplus y) \oplus z$
2. $x \oplus y \approx y \oplus x$
3. $x \oplus 0 \approx x$
4. $\neg\neg x \approx x$
5. $x \oplus \neg 0 \approx \neg 0$
6. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

Todo subconjunto del segmento real $[0,1]$ cerrado para las funciones $x \mapsto 1 - x$ y $x, y \mapsto min\{1, x + y\}$ y que contiene a 0 es una MV-álgebra con las operaciones $x \oplus y = min\{1, x+y\}$, $\neg x = 1 - x$ y la constante 0. Toda álgebra booleana es una MV-álgebra definiendo $x \oplus y = x \vee y$, $\neg x = x'$. Si $\mathbf{G}$ es un l-grupo abeliano[1], para cada elemento $u \geq 0$ el segmento $[0, u]$ es una MV-álgebra con las operaciones $x \oplus y = u \wedge (x+y)$, $\neg x = u - x$.

Como característica curiosa puede citarse que en las MV-álgebras *sí* vale el principio de la doble negación $\neg\neg x \to x$ —conviniendo que $x \to y$ significa $\neg x \oplus y$— pero *no* vale el principio del tercio excluso. Por ejemplo en la MV-álgebra con tres elementos se tiene $\frac{1}{2} \vee \neg\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$.

Las MV-álgebras constituyen la *semántica* de la lógica multivaluada de Łukasiewicz. Respecto a la *sintaxis*, el mismo Łukasiewicz propuso cálculos proposicionales sencillos y conjeturó que de ellos podrían deducirse todas las tautologías de sus álgebras. Esta conjetura se demostró por diversos caminos en el transcurso del siglo XX. La siguiente es una presentación de la *lógica de Łukasiewicz con infinitos valores*.

Axiomas

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$
4. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

[1] En los escritos [5, 14] pueden encontrarse la noción de l-grupo y diversos detalles sobre la lógica de Łukasiewicz.

Regla

La única es *Modus Ponens*.

En [5] se prueba que los teoremas de este cálculo proposicional son precisamente las tautologías de las MV-álgebras, esto es, las fórmulas que leídas en cualquier MV-álgebra siempre son 1.

Para cualquier entero $n > 1$ la *lógica de Łukasiewicz con* n *valores* se obtiene de la lógica con infinitos valores añadiendo los axiomas

5. $n.\alpha \to (n-1).\alpha$
6. $(n-1).(j.\alpha \to \neg(\neg\alpha \to \neg(j-1).\alpha))$ para cada j con $1 < j < n$, j no divisor de $n-1$

donde la fórmula $n.\varphi$ se ha definido por recurrencia como sigue: $1.\varphi = \varphi$; $(n+1).\varphi = \neg\varphi \to n.\varphi$. Así, por ejemplo, para $n = 3$ solo se añade el axioma

$$(\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \alpha)) \to (\neg\alpha \to \alpha)$$

a los de la lógica con infinitos valores.

Para un entero n fijo, los teoremas de este cálculo proposicional son las tautologías de la MV-álgebra —llamada *álgebra de Łukasiewicz*—

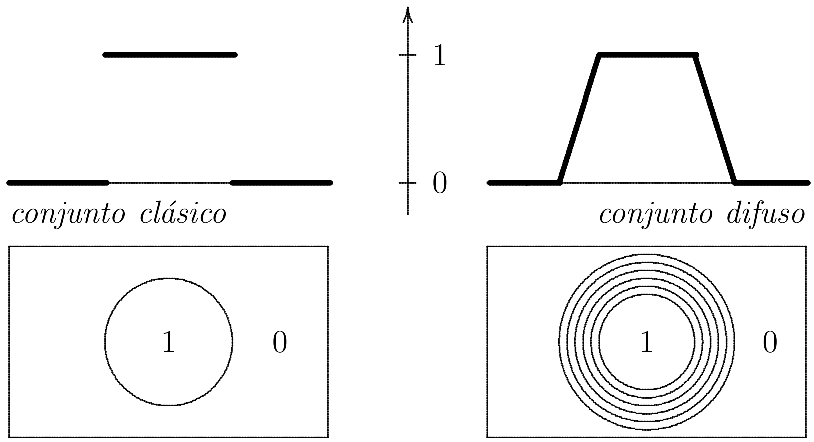
$$Ł_n = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}; \oplus, \neg, 0 \right\rangle$$

donde las operaciones están definidas como $x \oplus y = min\{1, x+y\}$, $\neg x = 1 - x$ [5]. De esta manera, las tablas de operaciones mostradas arriba en esta sección *son* las tablas de verdad de la lógica de Łukasiewicz con tres valores.

3. La lógica difusa de Zadeh

La lógica *difusa* o *borrosa* se origina de manera súbita con el artículo *Fuzzy sets* publicado en 1965 por Lofti A. Zadeh. Nacido en 1921 en Azerbaiyán, Zadeh fue profesor de la Universidad de California en Berkeley desde 1959 hasta 1991. Sus ideas, pronto acrecentadas en la llamada lógica difusa, son sencillas en extremo pero han encontrado un vertiginoso huracán de aplicaciones a áreas tan disímiles como la inteligencia artificial, la lingüística, el análisis de decisiones, los sistemas expertos, las redes neuronales y la teoría del control — de hecho, ya en todo el mundo se venden electrodomésticos "controlados por lógica difusa".

En el pensamiento matemático clásico cualquier subconjunto de un conjunto universal puede identificarse con su *función característica*, una función del universo en el conjunto $\{0, 1\}$ que vale 1 en el subconjunto y 0 en el complemento. En contraste, un *conjunto difuso* es una función del conjunto universal en el intervalo real $[0, 1]$: los puntos donde vale 1 definitivamente pertenecen al conjunto, aquellos donde vale 0 definitivamente no pertenecen, pero hay muchos elementos con mayor o menor grado intermedio de pertenencia.



Las operaciones con conjuntos difusos están sugeridas por los gráficos de sus funciones. Por ejemplo, como la intersección de dos funciones (conjuntos) difusos puede tomarse la función mínima, como la unión la función máxima y como el complemento la diferencia con la constante 1.

$$
\begin{aligned}
f \wedge g &= min\{f, g\} \\
f \vee g &= max\{f, g\} \\
\neg f &= 1 - f
\end{aligned}
$$

La expresión algebraica del complemento difuso sugiere una alternativa para la unión e intersección: es evidente que el producto tiene mejor comportamiento algebraico que la función mínima, pero para el efecto del análisis de los subconjuntos difusos, su desempeño es igual. De esta manera, pueden tomarse también las operaciones siguientes entre conjuntos difusos.

$$
\begin{aligned}
f \wedge g &= fg \\
f \vee g &= f + g - fg \\
\neg f &= 1 - f
\end{aligned}
$$

En ambos "modelos" propuestos vale el principio de la doble negación pues $\neg\neg f = f$, pero en ninguno de los dos vale el principio del tercio excluso ya que en general $f \vee \neg f$ no es la función constante 1 — de hecho, $f \wedge \neg f$ tampoco es la función constante 0. En contraste, en ambos casos sí valen las leyes de De Morgan: $\neg(f \wedge g) = \neg f \vee \neg g$, $\neg(f \vee g) = \neg f \wedge \neg g$.

La lógica difusa es un ejemplo notable de un tema que suscita diferentes *actitudes* en los investigadores, actitudes que quizás constituyen la única distancia real entre las "matemáticas aplicadas" y las "matemáticas puras". Los entusiastas de la lógica difusa prejuzgan a los científicos formales de pretender encasillar el mundo real en modelos matemáticos artificiales muy precisos pero que no proveen libertad para las gradaciones; los matemáticos a su vez no ven en la lógica borrosa más que un conjunto de procedimientos que funcionan pero que no forman parte de ninguna teoría formalizada.

Desde la matemática se han hecho esfuerzos por remediar estas diferencias pues durante los últimos diez años se han buscado formalizaciones para la lógica difusa. Lo que sigue es una panorámica de la propuesta de formalización adelantada por Hájek, Cignoli y otros, tal como está expuesta de manera magistral en el trabajo [6].

Una *t-norma* es una operación binaria continua $*$ en el segmento real $[0,1]$ que satisface las condiciones siguientes.

1. $x * (y * z) \approx (x * y) * z$
2. $x * y \approx y * x$
3. $x * 1 \approx x$
4. $x * 0 \approx 0$
5. $x \leq y$ implica $x * z \leq y * z$

Por la continuidad exigida, la operación $*$ tiene *adjunta*, denotada $\rightarrow$ y caracterizada por la equivalencia

$$x \leq y \rightarrow z \qquad \text{si y solo si} \qquad x * y \leq z$$

—compárese con la adjunción que define las álgebras de Heyting—. Además se define la operación $\neg$ como sigue.

$$\neg x = x \rightarrow 0$$

Algunos ejemplos de t-normas continuas son los siguientes.

$$x * y = min\{x, y\} \qquad x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$x * y = max\{0, x+y-1\} \qquad x \rightarrow y = min\{1, 1-x+y\} \qquad \neg x = 1 - x$$

$$x * y = xy \qquad x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y/x & \text{si } x > y \end{cases} \qquad \neg x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

El primer ejemplo corresponde a considerar el segmento $[0,1]$ como una álgebra de Heyting; el segundo a considerarlo como una MV-álgebra, en particular como una MV-álgebra de Łukasiewicz; la tercera corresponde a una de las operaciones indicadas arriba para los conjuntos difusos. Puede probarse que cualquier t-norma continua es combinación de estas tres.

Una t-norma ya permite la lectura de fórmulas proposicionales, interpretando las letras proposicionales como números reales entre 0 y 1 —"lógica difusa"— y los conectivos conjunción, implicación y negación como $*$, $\rightarrow$, $\neg$ respectivamente. Por ejemplo de $1*p \leq p$ se sigue $1 \leq p \rightarrow p$, esto es, $p \rightarrow p = 1$ para *cualquier* interpretación de p en *cualquier* t-norma.

El siguiente paso en la formalización consiste en introducir una estructura algebraica que incluya las t-normas. Una *BL-álgebra* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A; *, \to, 0\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, $*$, $\to$ son operaciones binarias en A y 0 es una constante. A partir de estas se definen otras cuatro operaciones como sigue.

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x * (x \to y) \\ x \vee y &= ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \\ \neg x &= x \to 0 \\ 1 &= \neg 0 \end{aligned}$$

Esta colección de operaciones debe satisfacer las siguientes condiciones.

1. $\langle A; *, 1\rangle$ es un monoide conmutativo:
   1.1. $x * (y * z) \approx (x * y) * z$
   1.2. $x * y \approx y * x$
   1.3. $x * 1 \approx x$
2. $\langle A; \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo con máximo 1 y mínimo 0:
   2.1. $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$
   2.2. $x \wedge y \approx y \wedge x, \quad x \vee y \approx y \vee x$
   2.3. $x \wedge x \approx x \approx x \vee x$
   2.4. $x \wedge (x \vee y) \approx x \approx x \vee (x \wedge y)$
   2.5. $x \wedge 1 \approx x \approx x \vee 0$
3. Las dos estructuras anteriores son compatibles:
   3.1. $x * (y \vee z) \approx (x * y) \vee (x * z)$
   3.2. $x * (y \wedge z) \approx (x * y) \wedge (x * z)$
4. Además:
   4.1. $(x * y) \to z \approx x \to (y \to z)$
   4.2. $(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$
   4.3. $x \to x \approx 1$

Toda álgebra de Heyting que valida la condición $(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$ es una BL-álgebra si se toma la operación $*$ igual al extremo inferior $\wedge$; al revés, una BL-álgebra en la cual $*$ es igual a $\wedge$ —en otras palabras, una BL-álgebra donde $x * (x \to y) \approx x * y$— es una álgebra de Heyting en la cual $(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$. Las álgebras de Heyting cuyo conjunto ordenado subyacente es lineal, así como todas las álgebras booleanas, son ejemplos de álgebras de Heyting que satisfacen la ecuación $(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$.

Si en una MV-álgebra $\langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ se definen las operaciones $*$, $\to$ como

$$x * y = \neg(\neg x \oplus \neg y) \qquad\qquad x \to y = \neg x \oplus y$$

entonces $\langle A; *, \to, 0\rangle$ es una BL-álgebra. Al revés si $\langle A; *, \to, 0\rangle$ es una BL-álgebra que satisface $\neg\neg x \approx x$ —esto sucede si y solo si $\neg\neg x \to x \approx 1$— y en ella se define la operación $\oplus$ como

$$x \oplus y = \neg(\neg x * \neg y)$$

entonces $\langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra. En otras palabras, toda MV-álgebra es una BL-álgebra, más aún, las MV-álgebras pueden caracterizarse como aquellas BL-álgebras en las cuales vale el principio de la doble negación.

Si $*$ es una t-norma y su adjunta es $\to$ entonces $\langle [0, 1]; *, \to, 0\rangle$ es una BL-álgebra. En cierto modo, entonces, las BL-álgebras abarcan las semánticas de las tres lógicas multivaluadas discutidas en este escrito: ciertas álgebras de Heyting, correspondientes a la lógica intuicionista; las MV-álgebras, correspondientes a las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz; las t-normas, correspondientes a los conjuntos difusos.

¿Existe una sintaxis para esta semántica? En otras palabras, ¿existe una auténtica *lógica* difusa, entendida como sistema deductivo? En 1998 P. Hájek propuso el siguiente cálculo proposicional denominado *lógica difusa básica*.

Axiomas

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
2. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
3. $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$
4. $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to (\beta \wedge (\beta \to \alpha))$
5. $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$, $\quad (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$
6. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (((\beta \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$
7. $\neg(\alpha \to \alpha) \to \beta$

Regla

La única es *Modus Ponens*.

Los teoremas de este cálculo proposicional son precisamente las fórmulas que leídas en cualquier t-norma siempre son 1. En el trabajo [6] se indican las líneas generales de la demostración del siguiente teorema.

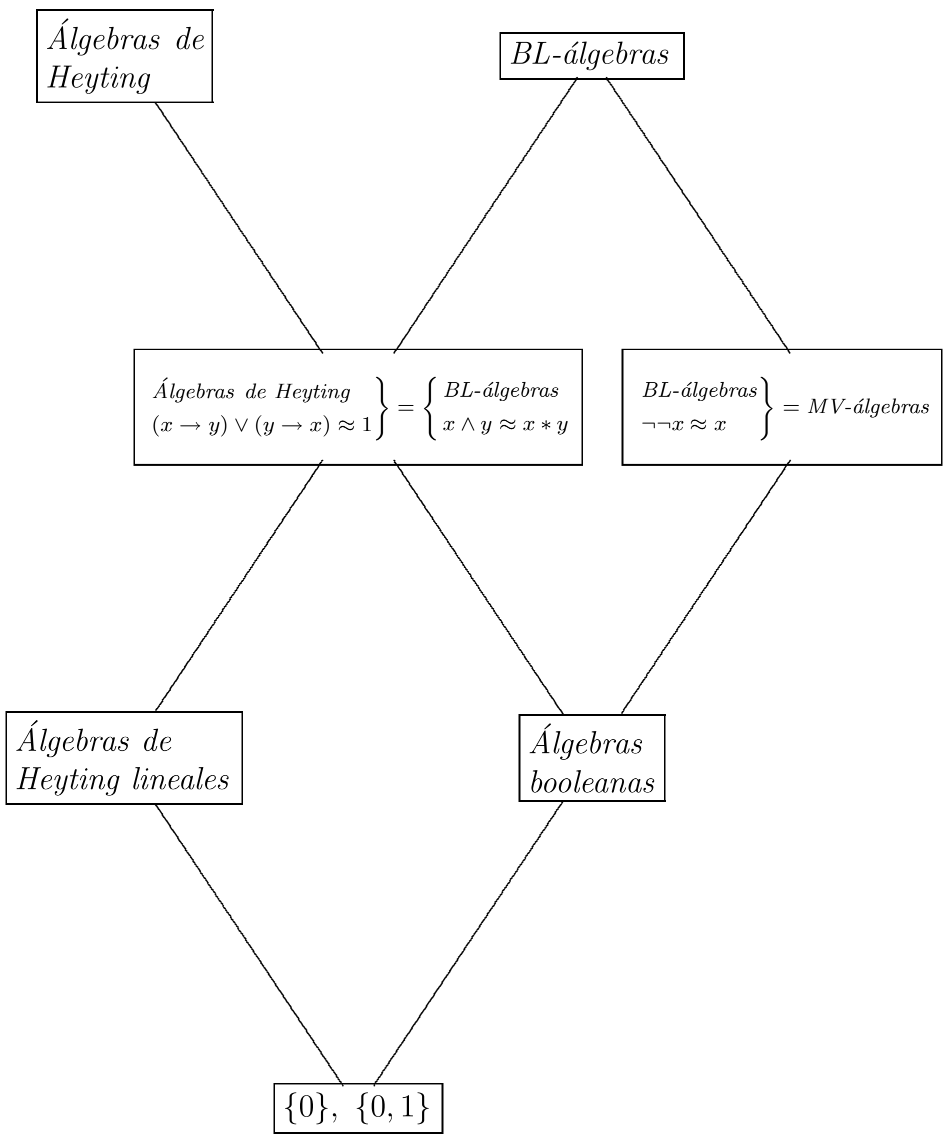
Teorema. *Para una fórmula proposicional φ las siguientes condiciones son equivalentes.*

- *φ es un teorema de la lógica difusa básica;*
- *φ es una tautología de todas las BL-álgebras* lineales*;*

- *φ es una tautología de todas las t-normas.*

Así, con sintaxis y semántica correspondientes, resulta una lógica difusa en el pleno sentido matemático de la palabra.

El diagrama de la página siguiente sintetiza las relaciones de contenencia entre las estructuras algebraicas presentadas. Entre las *lógicas proposicionales* correspondientes a estas *semánticas* subsisten las mismas relaciones.



Bibliografía

[1] BLOK, W.; PIGOZZI, D., *Algebraizable Logics*. Memoirs of the American Mathematical Society 396. AMS, Providence (Rhode Island), 1989.

[2] BURRIS S.; SANKAPPANAVAR, H., *A Course in Universal Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 78. Springer-Verlag, New York, 1981. Disponible en varios sitios de Internet:
http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/ualg.html
http://www.math.sc.edu/∼mcnulty/alglatvar/burrissanka.pdf

[3] CAICEDO, X., *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

[4] CAICEDO, X., *Lógica de los haces de estructuras*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XIX** (1995) 569–585.

[5] CIGNOLI R.; D'OTTAVIANO, M.; MUNDICI, D., *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz*. Coleção CLE 12. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, UNICAMP, Campinas, 1994.

[6] CIGNOLI R., *Verdad y consecuencia en el segmento real: una formalización de la lógica borrosa*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **52** (2000) 9–23.

[7] DOU, A., *Fundamentos de la Matemática*. Labor, Barcelona, 1970.

[8] EBBINGHAUS, H.; FLUM. J.; THOMAS W., *Mathematical Logic* (Second Edition). Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] GOLDBLATT, R., *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[10] JOHNSTONE P., *Notes on Logic and Set Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[11] MAC, S.; MOERDIJK, I., *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[12] OOSTRA, A., *Conectivos en Topos*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1997.

[13] OOSTRA, A., *Álgebras de Heyting*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[14] OOSTRA, A., *Lógicas de Łukasiewicz y sus álgebras*. Memorias del XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2004.

[15] PEREZ, J., *Fundamentos de la Lógica Matemática*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1982.