

ESFERAS DE DANDELÍN

Carlos Enrique Peralta Santa Cruz

Profesor Universidad Continental de Ciencias e Ingeniería

Huancayo - Perú

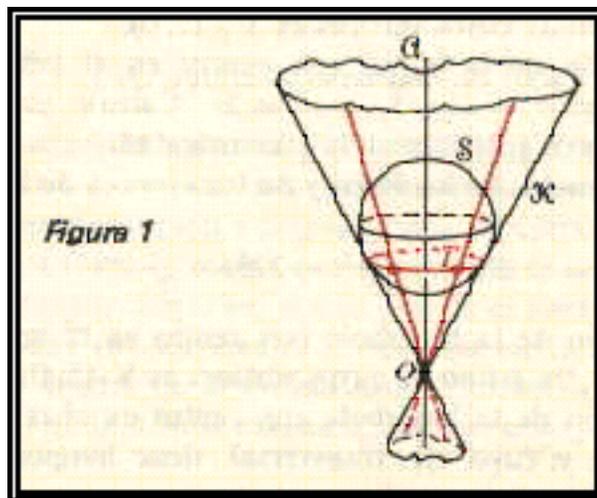
cperalta@continental.edu.pe

Resumen

Las cónicas constituyen uno de los conjuntos de curvas más importantes de la Geometría y que más se utilizan en distintas ramas de la Ciencia y la Ingeniería. Tradicionalmente, el estudio de las cónicas en el bachillerato es un estudio de tipo analítico, destinado a obtener sus ecuaciones en un determinado sistema de referencia, partiendo de unas definiciones y deducir de ellas sus propiedades. Este enfoque práctico, no permite vislumbrar la belleza que esconden estas curvas al estudiar sus propiedades por métodos puramente geométricos; de hecho, ni siquiera sirve para justificar el nombre de cónicas ni permite saber de dónde han salido esas definiciones. En este trabajo se hace una presentación de las cónicas desde un punto de vista totalmente geométrico. Se muestran cada una de estas curvas como intersección de un plano con un cono de revolución y, posteriormente, se demuestran sus propiedades utilizando las demostraciones basadas en las esferas de Dandelin

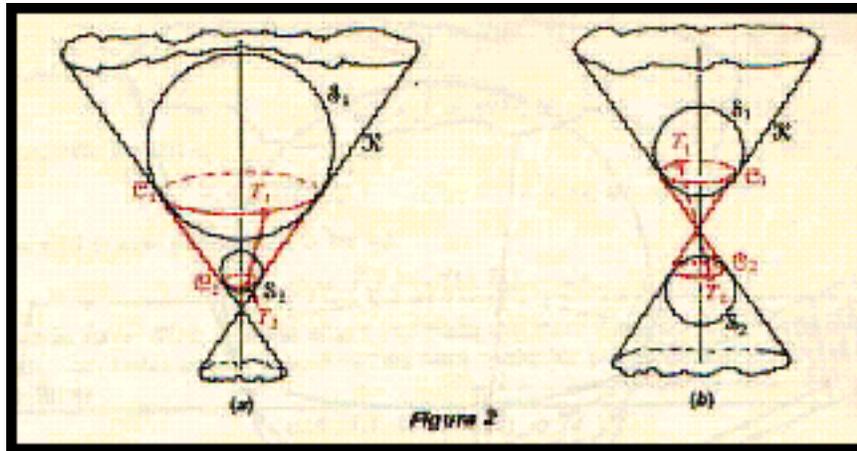
1. Esferas de Dandelin

Como observación preliminar nótese que para un punto 0 (Figura 1) que está fuera de la esfera δ , las rectas que pasan por 0 y son tangentes a δ son las generatrices de un cono



circular recto \mathcal{K} , cuyo vértice es 0 . Nótese también que los puntos de tangencia T forman una circunferencia C en un plano perpendicular al eje a del cono, y que la longitud $d(0, T)$ es la misma para todos los puntos T de C .

Para dos esferas δ_1 y δ_2 (figura 1) tangentes a \mathfrak{K} en las circunferencias C_1 y C_2 una generatriz de \mathfrak{K} toca a C_1 y C_2 en los puntos T_1 y T_2 respectivamente. La parte del cono que está entre dos planos paralelos que lo cortan recibe el nombre de tronco. La distancia $d(T_1, T_2)$ es la misma para todas las generatrices de \mathfrak{K} , ya sea que las esferas δ_1 y δ_2 estén en la misma rama del cono \mathfrak{K} , (Figura 1(a)) o no (Figura 1(b)). Se denotará a esta distancia constante mediante el símbolo $2a$. Entonces $2a$ es la altura inclinada del tronco del cono \mathfrak{K} cuyas bases están acotadas por C_1 y C_2 . Sea ahora \mathfrak{K} (Figura 1) un cono



circular recto con vértice en V y cuyas generatrices forman un ángulo α , con el eje a del cono \mathfrak{K} . Sea \mathfrak{P} un plano

$$0 < m^R(\alpha) < \frac{\pi}{2}$$

construido en tal forma que corte al eje y corte sólo una rama n_1 del cono, formando una curva cerrada como se muestra a continuación. Sea ε la curva formada por la intersección de \mathfrak{P} y \mathfrak{K} . Se demostrará por comparación directa que ε es una elipse.

Sea δ_1 (figura 1) una esfera muy pequeña cuya circunferencia de contacto C_1 esté del mismo lado de \mathfrak{P} que el vértice de \mathfrak{K} , y sea δ_2 , una gran esfera cuya circunferencia de contacto C_2 esté en el lado opuesto de \mathfrak{P} . Imagínese ahora que δ_1 se expande y δ_2 se contrae hasta que tocan a \mathfrak{P} en los puntos F_1 y F_2 , respectivamente. En esta posición final las esferas δ_1 y δ_2 reciben el nombre de **esferas de Dandelin**.

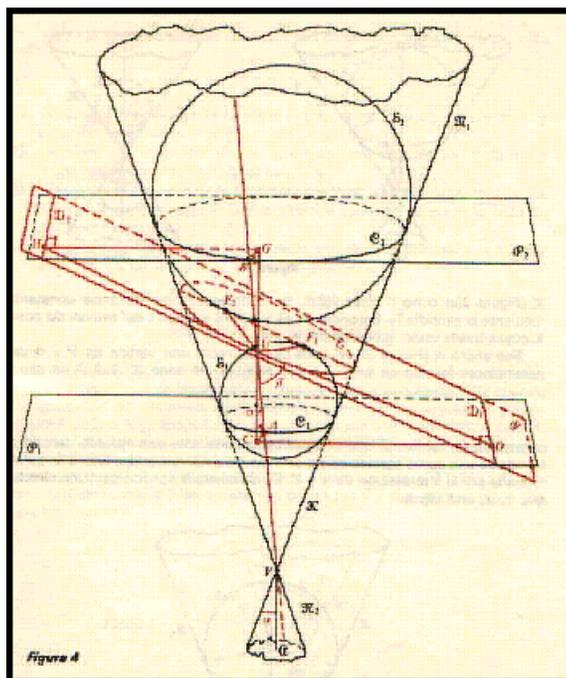
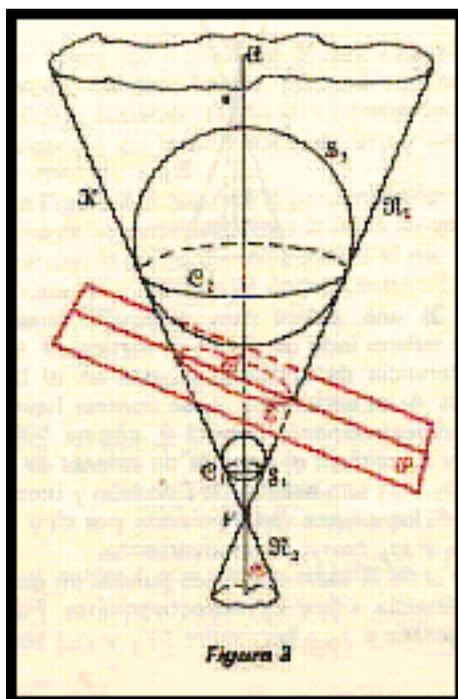
Supóngase que δ_1 y δ_2 son esferas de Dandelin y (como se muestra en la Figura 1) sean \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 los planos determinados por C_1 y C_2 . Sean \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 , con \mathfrak{P} respectivamente.

Para cada punto U de ε , sean A y B los puntos en que la generatriz de \mathfrak{K} que pasa por U intersecciona a C_1 y C_2 respectivamente. Puesto que las rectas UF_1 y UA son tangentes a δ_1 , y las rectas UF_2 y UB son tangentes a δ_2 se tiene:

$$d(U, F_1) = d(UA)$$

o sea:

$$d(U, F_2) = d(U, B)$$



Sumando se obtiene:

$$d(\mathbf{U}, F_1) + d(\mathbf{U}, F_2) = d(\mathbf{U}, A) + d(\mathbf{U}, B) = d(A, B)$$

esto se puede describir en la forma:

$$d(\mathbf{U}, F_1) + d(\mathbf{U}, F_2) = 2a \tag{1}$$

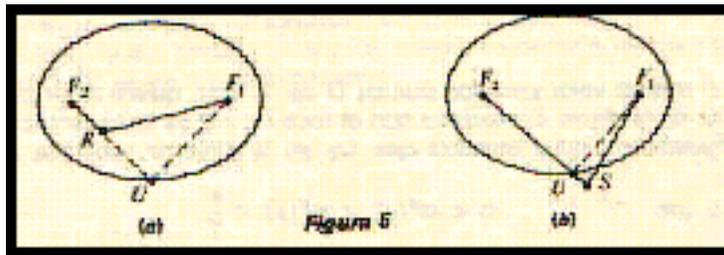
donde $2a = d(A, B)$ es la altura inclinada del tronco del cono \mathfrak{K} , cuyas bases están acotadas por C_1 y C_2 . Además para cualquier punto R de \mathfrak{P} dentro de ε se tiene:

$$d(R, F_1) + d(R, F_2) < 2a$$

y para cualquier punto S de \mathfrak{P} fuera de ε se tiene:

$$d(s, F_1) + d(S, F_2) > 2a$$

como se ve en las figuras 1(a) y 1(b). Por lo tanto ε es el lugar geométrico de todos los puntos de \mathfrak{P} que satisfacen la Ecuación (1). Entonces por definición ε es una elipse con focos F_1 y F_2 . La relación expresada por la Ecuación (1) da una interpretación geométrica de la constante $2a$ que aparece en la definición de una elipse; a saber, $2a$ es la altura inclinada del tronco. Sea el punto C en la Figura 1 la base de la perpendicular al plano



\mathfrak{P}_1 que pasa por U , y sea D la base de la perpendicular a la recta \mathfrak{D}_1 que pasa por C . Puesto que UC es perpendicular al plano \mathfrak{P}_1 , es paralela al eje. Entonces el ángulo entre UC y UA es igual a α , que es el ángulo entre el eje y el cono. Por lo tanto en el triángulo AUC se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, A)}$$

o bien, como $d(\mathbf{U}, A) = d(\mathbf{U}, F_1)$

$$\cos \alpha = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, F_1)}$$

Sea β el ángulo que forma \mathfrak{P} con el eje. Del triángulo UDC se tiene:

$$\cos \beta = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, D)}$$

o bien como $d(\mathbf{U}, D) = d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)$

$$\cos \beta = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{U}, F_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} &= \frac{\frac{d(\mathbf{U}, F_1)}{d(\mathbf{U}, C)}}{\frac{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)}{d(\mathbf{U}, C)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Según esto se tiene

$$d(\mathbf{U}, F_1) = e[d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)]$$

Donde e , definida por

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

tiene el mismo valor para los puntos \mathbf{U} de ε . Esto quiere decir que \mathfrak{D}_1 la directriz de la elipse ε asociada con el foco F_1 , y e es la excentricidad de ε . Un argumento similar muestra que \mathfrak{D}_2 es la directriz asociada al foco F_2 .

$$0 < m^R(\alpha) < m^R(\beta) < \frac{\pi}{2}$$

Puesto que

$$0 < \cos \beta < \cos \alpha < 1$$

Por lo tanto

$$0 < \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$$

Es decir

$$0 < e < 1$$

En la Figura 1 considérese que el cono \mathfrak{K} permanece fijo pero que el plano \mathfrak{P} gira hacia una posición horizontal, de modo que $m^R(\beta)$ se acerque a $\frac{\pi}{2}$ (tomando como eje de rotación a la recta horizontal en \mathfrak{P} que intersecta al eje a del cono). ¿Resulta evidente que a medida que las esferas δ_1 y δ_2 y los planos \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 se ajustan apropiadamente, las directrices \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 se alejan indefinidamente, y que los focos F_1 y F_2 se acercan a un punto común? En la posición límite \mathfrak{P} es paralela a \mathfrak{P}_1 y \mathfrak{P}_2 , y ε se convierte en una circunferencia. La circunferencia no tiene directrices. Puesto que ahora $m^R(\beta)$ y $\cos \frac{\pi}{2}$, para la circunferencia se tiene:

$$e = \frac{0}{\cos \alpha} = 0$$

En la otra dirección considérese que $m^R(\beta)$ se acerca a $m^R(\alpha)$, tomándose el mismo eje de rotación. Entonces δ_2 se aleja cada vez más. En la posición límite δ_2 desaparece F_2 y \mathfrak{D}_2 desaparecen también. Ahora \mathfrak{P} es paralelo a la generatriz de \mathfrak{K} , y la intersección de \mathfrak{P} y el cono es una parábola. Puesto que ahora $m^R(\beta) = m^R(\alpha)$, y $\cos \beta = \cos \alpha$, para la parábola se tiene:

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = 1$$

A medida que \mathfrak{P} gira aún más, con $0 < m^R(\beta) < m^R(\alpha)$, \mathfrak{P} intersecta a la otra rama N_2 , el cono \mathfrak{K} , y un argumento análogo al anterior para el caso de la elipse muestra que la intersección de \mathfrak{P} con \mathfrak{K} es una hipérbola.

Puesto que ahora $0 < m^R(\beta) < m^R(\alpha) < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \cos \alpha < \cos \beta < 1$, para la hipérbola se tiene

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} > 1$$

Como ejercicio se recomienda trazar y discutir figuras análogas a la Figura 1 para la circunferencia, parábola e hipérbola. Pueden considerarse también figuras correspondientes a varias secciones cónicas degeneradas; en particular para el caso de dos **rectas paralelas** se puede mantener a δ_1 fijo y permitir que el vértice \mathfrak{K} se aleje indefinidamente.