

# ESFERAS DE DANDELÍN

Carlos Enrique Peralta Santa Cruz

*Profesor Universidad Continental de Ciencias e Ingeniería*

*Huancayo - Perú*

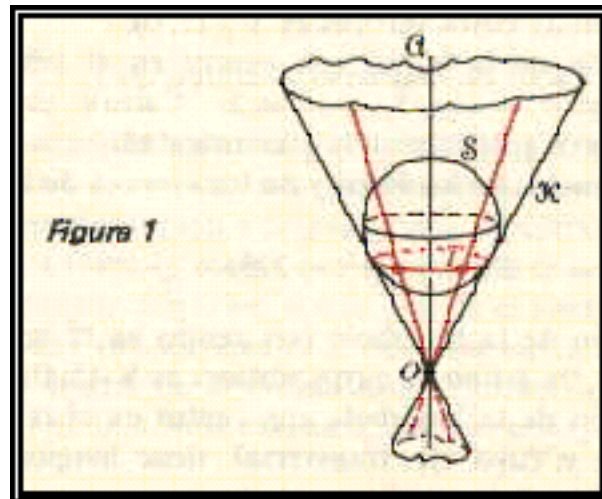
[cperalta@continental.edu.pe](mailto:cperalta@continental.edu.pe)

## Resumen

Las cónicas constituyen uno de los conjuntos de curvas más importantes de la Geometría y que más se utilizan en distintas ramas de la Ciencia y la Ingeniería. Tradicionalmente, el estudio de las cónicas en el bachillerato es un estudio de tipo analítico, destinado a obtener sus ecuaciones en un determinado sistema de referencia, partiendo de unas definiciones y deducir de ellas sus propiedades. Este enfoque práctico, no permite vislumbrar la belleza que esconden estas curvas al estudiar sus propiedades por métodos puramente geométricos; de hecho, ni siquiera sirve para justificar el nombre de cónicas ni permite saber de dónde han salido esas definiciones. En este trabajo se hace una presentación de las cónicas desde un punto de vista totalmente geométrico. Se muestran cada una de estas curvas como intersección de un plano con un cono de revolución y, posteriormente, se demuestran sus propiedades utilizando las demostraciones basadas en las esferas de Dandelin

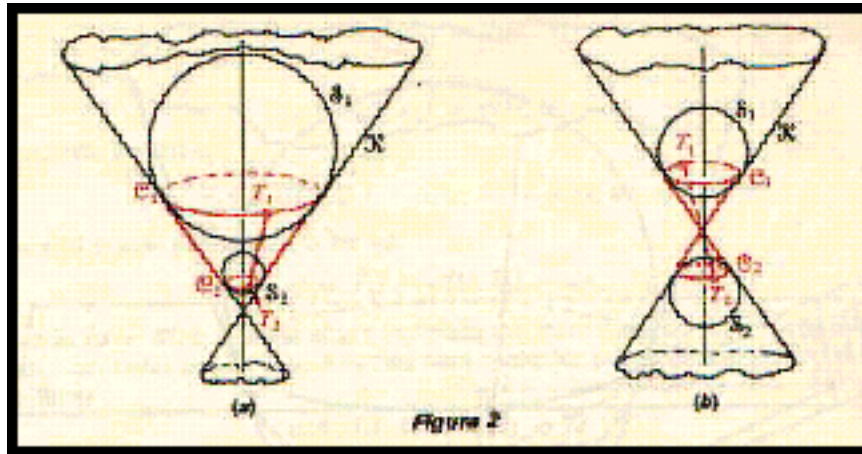
## 1. Esferas de Dandelin

Como observación preliminar nótese que para un punto  $0$  (Figura 1) que está fuera de la esfera  $\delta$ , las rectas que pasan por  $0$  y son tangentes a  $\delta$  son las generatrices de un cono



circular recto  $\mathcal{K}$ , cuyo vértice es  $0$ . Nótese también que los puntos de tangencia  $\mathbf{T}$  forman una circunferencia  $\mathcal{C}$  en un plano perpendicular al eje  $a$  del cono, y que la longitud  $d(0, \mathbf{T})$  es la misma para todos los puntos  $\mathbf{T}$  de  $\mathcal{C}$ .

Para dos esferas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  (figura 1) tangentes a  $\mathfrak{K}$  en las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  una generatriz de  $\mathfrak{K}$  toca a  $C_1$  y  $C_2$  en los puntos  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. La parte del cono que está entre dos planos paralelos que lo cortan recibe el nombre de tronco. La distancia  $d(T_1, T_2)$  es la misma para todas las generatrices de  $\mathfrak{K}$ , ya sea que las esferas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  estén en la misma rama del cono  $\mathfrak{K}$ , (Figura 1(a)) o no (Figura 1(b)). Se denotará a esta distancia constante mediante el símbolo  $2a$ . Entonces  $2a$  es la altura inclinada del tronco del cono  $\mathfrak{K}$  cuyas bases están acotadas por  $C_1$  y  $C_2$ . Sea ahora  $\mathfrak{K}$  (Figura 1) un cono



circular recto con vértice en  $V$  y cuyas generatrices forman un ángulo  $\alpha$ , con el eje  $a$  del cono  $\mathfrak{K}$ . Sea  $\mathfrak{P}$  un plano

$$0 < m^R(\alpha) < \frac{\pi}{2}$$

construido en tal forma que corte al eje y corte sólo una rama  $n_1$  del cono, formando una curva cerrada como se muestra a continuación. Sea  $\varepsilon$  la curva formada por la intersección de  $\mathfrak{P}$  y  $\mathfrak{K}$ . Se demostrará por comparación directa que  $\varepsilon$  es una elipse.

Sea  $\delta_1$  (figura 1) una esfera muy pequeña cuya circunferencia de contacto  $C_1$  esté del mismo lado de  $\mathfrak{P}$  que el vértice de  $\mathfrak{K}$ , y sea  $\delta_2$ , una gran esfera cuya circunferencia de contacto  $C_2$  esté en el lado opuesto de  $\mathfrak{P}$ . Imagínese ahora que  $\delta_1$  se expande y  $\delta_2$  se contrae hasta que tocan a  $\mathfrak{P}$  en los puntos  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente. En esta posición final las esferas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  reciben el nombre de **esferas de Dandelin**.

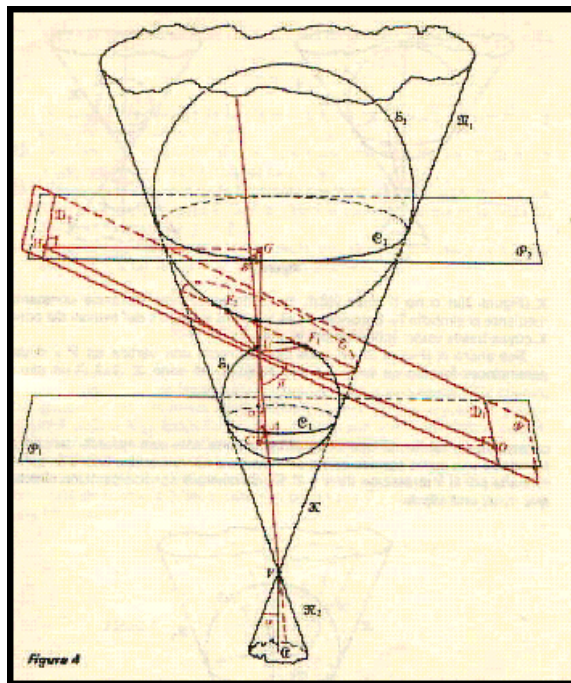
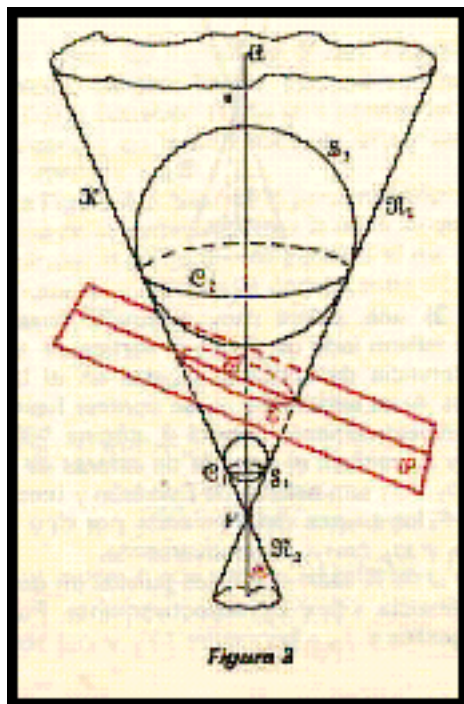
Supóngase que  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son esferas de Dandelin y (como se muestra en la Figura 1) sean  $\mathfrak{P}_1$  y  $\mathfrak{P}_2$  los planos determinados por  $C_1$  y  $C_2$ . Sean  $\mathfrak{D}_1$  y  $\mathfrak{D}_2$ , con  $\mathfrak{P}$  respectivamente.

Para cada punto  $U$  de  $\varepsilon$ , sean  $A$  y  $B$  los puntos en que la generatriz de  $\mathfrak{K}$  que pasa por  $U$  intersecciona a  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Puesto que las rectas  $UF_1$  y  $UA$  son tangentes a  $\delta_1$ , y las rectas  $UF_2$  y  $UB$  son tangentes a  $\delta_2$  se tiene:

$$d(U, F_1) = d(UA)$$

o sea:

$$d(U, F_2) = d(U, B)$$



Sumando se obtiene:

$$d(\mathbf{U}, F_1) + d(\mathbf{U}, F_2) = d(\mathbf{U}, A) + d(\mathbf{U}, B) = d(A, B)$$

esto se puede describir en la forma:

$$d(\mathbf{U}, F_1) + d(\mathbf{U}, F_2) = 2a \tag{1}$$

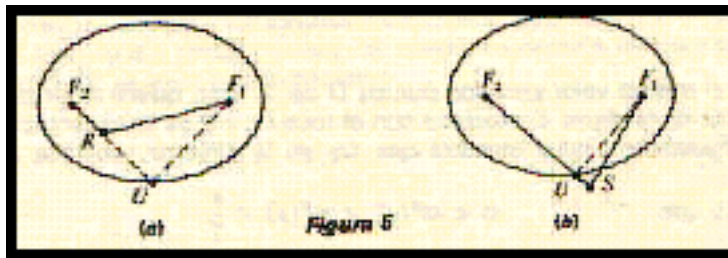
donde  $2a = d(A, B)$  es la altura inclinada del tronco del cono  $\mathfrak{K}$ , cuyas bases están acotadas por  $C_1$  y  $C_2$ . Además para cualquier punto  $R$  de  $\mathfrak{P}$  dentro de  $\varepsilon$  se tiene:

$$d(R, F_1) + d(R, F_2) < 2a$$

y para cualquier punto  $S$  de  $\mathfrak{P}$  fuera de  $\varepsilon$  se tiene:

$$d(s, F_1) + d(S, F_2) > 2a$$

como se ve en las figuras 1(a) y 1(b). Por lo tanto  $\varepsilon$  es el lugar geométrico de todos los puntos de  $\mathfrak{P}$  que satisfacen la Ecuación (1). Entonces por definición  $\varepsilon$  es una elipse con focos  $F_1$  y  $F_2$ . La relación expresada por la Ecuación (1) da una interpretación geométrica de la constante  $2a$  que aparece en la definición de una elipse; a saber,  $2a$  es la altura inclinada del tronco. Sea el punto  $C$  en la Figura 1 la base de la perpendicular al plano



$\mathfrak{P}_1$  que pasa por  $U$ , y sea  $D$  la base de la perpendicular a la recta  $\mathfrak{D}_1$  que pasa por  $C$ . Puesto que  $UC$  es perpendicular al plano  $\mathfrak{P}_1$ , es paralela al eje. Entonces el ángulo entre  $UC$  y  $UA$  es igual a  $\alpha$ , que es el ángulo entre el eje y el cono. Por lo tanto en el triángulo  $AUC$  se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, A)}$$

o bien, como  $d(\mathbf{U}, A) = d(\mathbf{U}, F_1)$

$$\cos \alpha = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, F_1)}$$

Sea  $\beta$  el ángulo que forma  $\mathfrak{P}$  con el eje. Del triángulo  $UDC$  se tiene:

$$\cos \beta = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, D)}$$

o bien como  $d(\mathbf{U}, D) = d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)$

$$\cos \beta = \frac{d(\mathbf{U}, C)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{U}, F_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} &= \frac{\frac{d(\mathbf{U}, F_1)}{d(\mathbf{U}, C)}}{\frac{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)}{d(\mathbf{U}, C)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Según esto se tiene

$$d(\mathbf{U}, F_1) = e[d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)]$$

Donde  $e$ , definida por

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

tiene el mismo valor para los puntos  $\mathbf{U}$  de  $\varepsilon$ . Esto quiere decir que  $\mathfrak{D}_1$  la directriz de la elipse  $\varepsilon$  asociada con el foco  $F_1$ , y  $e$  es la excentricidad de  $\varepsilon$ . Un argumento similar muestra que  $\mathfrak{D}_2$  es la directriz asociada al foco  $F_2$ .

$$0 < m^R(\alpha) < m^R(\beta) < \frac{\pi}{2}$$

Puesto que

$$0 < \cos \beta < \cos \alpha < 1$$

Por lo tanto

$$0 < \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$$

Es decir

$$0 < e < 1$$

En la Figura 1 considérese que el cono  $\mathfrak{K}$  permanece fijo pero que el plano  $\mathfrak{P}$  gira hacia una posición horizontal, de modo que  $m^R(\beta)$  se acerque a  $\frac{\pi}{2}$  (tomando como eje de rotación a la recta horizontal en  $\mathfrak{P}$  que intersecta al eje  $a$  del cono). ¿Resulta evidente que a medida que las esferas  $\delta_1$  y  $\delta_2$  y los planos  $\mathfrak{P}_1$  y  $\mathfrak{P}_2$  se ajustan apropiadamente, las directrices  $\mathfrak{D}_1$  y  $\mathfrak{D}_2$  se alejan indefinidamente, y que los focos  $F_1$  y  $F_2$  se acercan a un punto común? En la posición límite  $\mathfrak{P}$  es paralela a  $\mathfrak{P}_1$  y  $\mathfrak{P}_2$ , y  $\varepsilon$  se convierte en una circunferencia. La circunferencia no tiene directrices. Puesto que ahora  $m^R(\beta)$  y  $\cos \frac{\pi}{2}$ , para la circunferencia se tiene:

$$e = \frac{0}{\cos \alpha} = 0$$

En la otra dirección considérese que  $m^R(\beta)$  se acerca a  $m^R(\alpha)$ , tomándose el mismo eje de rotación. Entonces  $\delta_2$  se aleja cada vez más. En la posición límite  $\delta_2$  desaparece  $F_2$  y  $\mathfrak{D}_2$  desaparecen también. Ahora  $\mathfrak{P}$  es paralelo a la generatriz de  $\mathfrak{K}$ , y la intersección de  $\mathfrak{P}$  y el cono es una parábola. Puesto que ahora  $m^R(\beta) = m^R(\alpha)$ , y  $\cos \beta = \cos \alpha$ , para la parábola se tiene:

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = 1$$

A medida que  $\mathfrak{P}$  gira aún más, con  $0 < m^R(\beta) < m^R(\alpha)$ ,  $\mathfrak{P}$  intersecta a la otra rama  $N_2$ , el cono  $\mathfrak{K}$ , y un argumento análogo al anterior para el caso de la elipse muestra que la intersección de  $\mathfrak{P}$  con  $\mathfrak{K}$  es una hipérbola.

Puesto que ahora  $0 < m^R(\beta) < m^R(\alpha) < \frac{\pi}{2}$  y  $0 < \cos \alpha < \cos \beta < 1$ , para la hipérbola se tiene

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} > 1$$

Como ejercicio se recomienda trazar y discutir figuras análogas a la Figura 1 para la circunferencia, parábola e hipérbola. Pueden considerarse también figuras correspondientes a varias secciones cónicas degeneradas; en particular para el caso de dos **rectas paralelas** se puede mantener a  $\delta_1$  fijo y permitir que el vértice  $\mathfrak{K}$  se aleje indefinidamente.