FUNCIONES SUPERPUESTAS

Octavio Montoya
Profesor Universidad del Tolima
Ibagué, Colombia
octaviomontoya1963@yahoo.es

Resumen

En este documento se presentan algunas sucesiones convergentes, obtenidas mediante la iteración de un función superpuesta sobre si misma.

"Es necesario saber la matemática elemental desde un punto de vista superior y enseñar la matemática superior desde un punto de vista elemental"

1. Introducción

La actividad mas frecuente en las clases de matemáticas es la de resolver problemas que están bien formulados y que de ante mano se conocen una o varias alternativas(caminos) para llegar a la solución, que con antelación se conoce. ¿Será que es posible construir un problema y crear alternativas de solución en el aula de clase?. Por supuesto que si. Posiblemente no seamos capaces de crear grandes problemas en matemáticas, pero si podemos divertirnos un poco, creando problemas sencillos utilizando la calculadora o algunos conceptos en matemática. Por ejemplo, el lector puede verificar utilizando la calculadora o utilizando argumentos matemáticos las siguientes identidades:

$$\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\cdots}}}}} = 3$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}} = 2$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}} = 2$$

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\ldots\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}\right)\right)\right)\ldots\right) = \frac{1}{2}$$

$$\forall a > 0 : \log_{\frac{1}{a^2}}\left(\log_{\frac{1}{a^2}}\left(\log_{\frac{1}{a^2}}\left(\log_{\frac{1}{a^2}}\left(\ldots\log_{\frac{1}{a^2}}\frac{1}{a}\right)\right)\right)\ldots\right) = \frac{1}{2}$$

$$\ldots\tan\tan\tan\tan\tan 2 = 0$$

$$\ldots\operatorname{sen}\operatorname{sen}\operatorname{sen}\operatorname{sen}\operatorname{sen} x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ldots\cos\cos\cos\cos\cos x = 0{,}999847741\ldots$$

Como se puede observar, la idea es tomar una función $f(x)$ y tratar de encontrar un numero real x_0 tal que $f(x_0) = x_0$. Esto permite entonces construir la identidad(sucesión) $\ldots fffffff(x_0) = x_0$.

En términos generales el problema se reduce al siguiente interrogante: ¿Dada una función real f, la sucesión $\ldots fffffff(x)$ converge para algún numero real x_0?

Lo anterior no constituye un simple juego, si no también el descubrimiento de grandes resultados históricos de la matemática. Por ejemplo la identidad

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}} = 2$$

fue clave en la construcción hecha por Francoise Viéte del numero irracional π en 1593.

En este documento haremos un análisis detallado de algunas de las identidades anteriores, su posible generalización y por supuesto estudiaremos las identidades de π en términos de radicales superpuestos.

Proposición. *La expresión:*

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}} = 2$$

es convergente?

Daremos respuesta a este interrogante pausadamente así:

PASO 1. Formula de recurrencia para la expresión anterior. La siguiente es la sucesión que genera la expresión

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_n = \sqrt{2}^{x_{n-1}}$$

PASO 2. La sucesión es creciente.

Es evidente que x_n es positiva. Verifiquemos por inducción matemática que x_n es creciente.

Es evidente que $x_1 < x_2$

Supongamos que $x_n < x_{n+1}$. Verifiquemos que $x_{n+1} < x_{n+2}$.

Es evidente que $x < y \rightarrow \sqrt{2}^x < \sqrt{2}^y$ (ya que la función $y = a^x$, con $a > 1$ es creciente).

Luego $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n} < \sqrt{2}^{x_{n+1}} = x_{n+2}$.
Por tanto $x_{n+1} < x_{n+1}$.
PASO 3. x_n es una sucesión acotada por 2. Verifiquemos por inducción matemática.
$x_1 < 2$. Supongamos que $x_n < 2$. Verifiquemos que $x_{n+1} < 2$.

$$x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n} < \sqrt{2}^2 = 2$$

Es decir $x_{n+1} < 2$. Por tanto la sucesión x_n esta acotada por 2.
PASO 4. x_n es convergente a 2.
Como x_n es una sucesión creciente y acotada entonces es convergente.
Mostremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}^{x_{n-1}} = \sqrt{2}^{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}$$

Es evidente que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x$$

Tenemos entonces que: $x = \sqrt{2}^x$. Ahora

$$x = \sqrt{2}^n \to \ln x = x \ln \sqrt{2} \to \ln x^{1/x} = \ln 2^{1/2} \to x^{1/x} = 2^{1/2}$$

Lo anterior muestra evidentemente que $x = 2$.
Conclusión:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}} = 2$$

Observación. Se puede verificar fácilmente y en forma análoga que:

$$\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}\cdots}}}} = 3$$

Proposición. *Sea $a > 1$.*

$$\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}\cdots}}}}$$

es convergente.?

PASO 1. Formula de recurrencia.
La sucesión generadora de la expresión anterior es:

$$x_1 = \sqrt[a]{a} \quad x_n = \sqrt[a]{a}^{x_{n-1}}$$

PASO 2. La sucesión x_n es creciente si $a > 1$.
Verifiquemos por inducción matemática.

$x_1 < x_2$. Supongamos que $x_n < x_{n+1}$. Mostremos que $x_{n+1} < x_{n+2}$.

$$x_{n+1} = \sqrt[a]{a}^{x_n} < \sqrt[a]{a}^{x_{n+1}} = x_{n+2}$$

Puesto que $a > 1 \rightarrow \sqrt[a]{a} > 1$ y la función $y = a^x$ es creciente.

PASO 3. La sucesión x_n es acotada por a cuando $a > 1$.

Es evidente que $x_1 < a$. Supongamos que $x_n < a$. Mostremos que $x_{n+1} < a$.

En efecto, $x_{n+1} = \sqrt[a]{a}^{x_n} < \sqrt[a]{a}^{a} = a$. Por tanto x_n es acotada por a cuando $a > 1$.

PASO 4. x_n converge a a.

Es evidente que x_n es convergente.

Si $\text{lím}_{n\to\infty} x_{n+1} = \text{lím}_{n\to} x_{n+1} = l$ entonces $l = \sqrt[a]{a}^{l}$. Luego $l^{1/l} = a^{1/a}$. Por tanto $l = a$.

Conclusión.

$$\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\cdots}}}}} = a$$

si $a > 1$.

Observación. Si $0 < a \leq 1$ la identidad anterior también se cumple.(Ejercicio para el lector) De otro lado, si $a < 0$ la sucesión

$$\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\cdots}}}}}$$

es divergente.

2. Hacia la formula de Viéte

El objetivo de los siguientes propblemas es el de construir la formula de Viéte[1] para el calculo de numero irracional π.

Proposición.

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$$

es convergente?

[1]Francoise Viéte (Fontenay-le Comte, Paises de Loira 1540 - París 1603) Matemático y político francés. Fijó las normas de la trigonometría y estableció las bases del álgebra moderna. Adoptó el método general de Arquímedes de polígonos inscritos en una circunferencia, pero comenzando con un cuadrado y utilizando el área en lugar del perímetro. A partir de la relación entre el área de un polígono de n lados y el de $2n$ lados, obtuvo el llamado "propducto de Viéte"o "Fórmula de Viéte"publicado en 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

PASO 1. Formula de recurrencia.

$$r_n = \sqrt{1 + r_{n-1}}, \quad r_1 = \sqrt{1}$$

PASO 2. r_n es una sucesión creciente.
Es evidente que $r_2 > r_1$. Supongamos que $r_n > r_{n-1}$. Mostremos que $r_{n+1} > r_n$.
En efecto,

$$r_{n+1} = \sqrt{1 + r_n} > \sqrt{1 + r_{n-1}} = r_n$$

Luego $r_{n+1} > r_n$
Esto indica que r_n es una sucesión creciente.
PASO 3. La sucesión r_n esta acotada por 2.
Es evidente que $r_1 < 2$. Supongamos que $r_n < 2$. Mostremos que $r_{n+1} < 2$.
En efecto,

$$r_{n+1} = \sqrt{1 + r_n} < \sqrt{1 + 2} = \sqrt{2} < 2$$

Por tanto, la sucesión r_n esta acotada por 2.
PASO 4. La sucesión r_n converge a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Por los pasos anteriores tenemos que r_n es convergente.
Supongamos que $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_{n+1} = r$.
Como $r_n = \sqrt{1 + r_{n-1}}$ entonces $r = \sqrt{1 + r}$. Luego $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(Aquí la solución $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ no tiene sentido).

Conclusión

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Curiosidad: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el llamado numero áureo o cantidad de oro.
Observación. En forma análoga, el lector puede mostrar fácilmente que:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}} = 2$$

Proposición. *Sea $a > 0$.*

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}}}$$

es convergente?

PASO 1. Formula de recurrencia:

$$t_1 = \sqrt{a}, \quad t_n = \sqrt{a + t_{n-1}} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

PASO 2. t_n es una sucesión creciente.
Es evidente que $t_2 > t_1$. Supongamos que $t_n > t_{n-1}$. Veamos que $t_{n+1} > t_n$.
En efecto,

$$t_{n+1} = \sqrt{a + t_n} > \sqrt{a + t_{n-1}} = t_n$$

Luego $t_{n+1} > t_n$. Por tanto t_n es creciente.
PASO 3. t_n es acotada por $a+1$. Verificación por inducción matemática.
Mostremos que $t_1 = \sqrt{a} < a + 1$.
En efecto,

$$a - \sqrt{a} + 1 = \left(a - \sqrt{a} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Luego $a - \sqrt{a} + 1 > 0$. De donde $\sqrt{a} < a + 1$.
Por tanto $t_1 = \sqrt{a} < a + 1$.
Supongamos que $t_n < a + 1$. Mostremos que $t_{n+1} < a + 1$. Sabemos que:

$$a^2 + 1 > 1 \to a^2 + 2a + 1 > 1 + 2a \to (a+1)^2 > 1 + 2a \to a + 1 > \sqrt{1 + 2a}, \forall a > 0$$

Ahora

$$t_{n+1} = \sqrt{a + t_n} < \sqrt{a + a + 1} = \sqrt{1 + 2a} < a + 1$$

Por tanto $t_{n+1} < a + 1$.
PASO 4. t_n converge a $\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.
Por los pasos anteriores es evidente que t_n es convergente. Por analogía con los propblemas anteriores tenemos que $x = \sqrt{a + x}$, donde

$$x = \lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} t_{n-1}$$

La ecuación $x = \sqrt{a + x}$ tiene como solución

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

(la solución $x = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2}$ no tiene sentido).
Conclusión.

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

2.1. Formula de Viéte

La formula de Viéte es:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots$$

donde aparecen expresiones radicales semejantes a las anteriormente estudiadas. Comentario: Hay otras formulas para el calculo de π[2]

Proposición. *Transformar la expresión*

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\dots$$

en otra de la forma

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}}$$

Se puede mostrar fácilmente que $\sqrt{\frac{1}{2}}$ y

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

Por lo anterior, parece ser que la "suma parcial"de la primera es la mitad de la segunda, es decir:

Teorema. *Sean* $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n\sqrt{2+a_{n-1}}$, $A_1\sqrt{\frac{1}{2}}$ *y* $A_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}A_{n-1}}$. *Se cumple que* $A_n = \frac{a_n}{2}$, *para cualquier número natural.*

Inducción matemática. . Es evidente que $A_1 = \frac{a_1}{2}$. Supongamos que $A_n = \frac{a_n}{2}$. Verifiquemos que $A_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2}$.

$$A_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}A_n} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{a_n}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+a_n}$$

[2]Leibniz, Jhon Wallis y otros encontraron expresiones de π en forma relativaente sencilla, como sumas infinitas, propductos infinitos, etc. Wallis (1616 - 1703), por ejemplo, encontró la expresión:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)(2k)}$$

.

Como $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ entonces $a_n = a_{n+1}^2 - 2$. Luego

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + a_{n+1}^2 - 2}$$

Luego $A_n = \dfrac{a_n}{2}$. Por tanto $A_n = \dfrac{a_n}{2}$ para todo número natural n. □

Conclusión

$$\frac{2}{\pi} = A_1 A_2 A_3 \ldots = \frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{a_2}\ldots$$

Luego

$$\frac{2}{\pi} = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots}$$

De donde

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Proposición. *¿Como llegar a la expresión*

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots?$$

Sabemos que el origen histórico del numero π esta asociado con la geometría. En esta sección presentaremos un camino geométrico para llegar a esta identidad.

Calculemos los lados y semiperimetros de un cuadrado, un octógono, etc. Inscritos en un circulo de radio 1.

Sea L_n y P_n el lado y el semiperimetro respectivamente, del polígono regular de n lados inscrito en el circulo de radio 1.

Es evidente que $L_4 = \sqrt{2}$ y $P_4 = 2\sqrt{2}$ y que $L_8 = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Teorema.

$$L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}}, n = 4, 8, 16, \ldots, 2^{k+1}, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Demostración. Verifiquemos por inducción matemática. Para $n = 4$ ya verificamos. Supongamos que $L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}}$. Mostremos que $L_{4n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_{2n}^2}}$.

Sea la figura

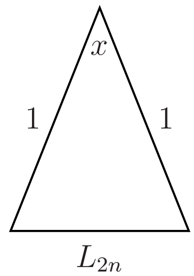

Figura 1.

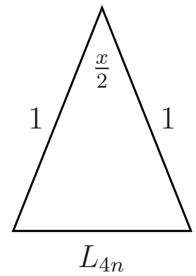

Figura 2.

Aplicando ley del coseno en el triángulo de la figura 1 y la hipótesis tenemos que:

$$L_{2n}^2 = 2 - 2\cos x = 2 - \sqrt{4 - L_n^2}$$

entonces

$$\cos x = \frac{4 - L_n^2}{2}$$

Utilizando identidad de ángulo medio y el resultado anterior tenemos que:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4 - L_n^2}$$

Aplicando ley del coseno en el triángulo de la figura 2 y utilizando el resultado anterior tenemos que:

$$L_{4n}^2 = 2 - 2\cos \frac{x}{2} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4 - L_n^2}} = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{4 - L_n^2}}$$

Como

$$\sqrt{4 - L_n^2} = 2 - L_{2n}^2$$

entonces

$$L_{4n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_{2n}^2}}$$

Reordenando los semiperimetros tenemos que:

$$P_1 = 2\sqrt{2}$$

$$P_2 = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$P_3 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

$$P_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{n\text{veces}}}}}} = 2^n\sqrt{2-a_{n-1}}$$

donde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ $\square$

Comentario: Lc longitud de la circunferencia $= 2\pi$(radio 1). Luego $\pi = \dfrac{Lc}{2}$ (semiperímetro). Esto indica que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{n\text{veces}}}}}}$$

¿La sucesión de Viéte

$$\frac{2^{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}$$

donde $a_=\sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, será igual a la sucesión

$$P_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{n\text{ veces}}}}}}?$$

Teorema. *Sea* $a_=\sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ *y* $P_1 = 2\sqrt{2}$, $P_n = 2^n\sqrt{2-a_{n-1}}$. *Se cumple que:*

$$P_n = \frac{2^{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}$$

Demostración. Verificación por inducción matemática. Para $n=1$ se cumple.

Supongamos que $P_n = 2^n\sqrt{2-a_{n-1}} = \dfrac{2^{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}$.

Mostremos que: $P_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{2-a_n} = \dfrac{2^{n+2}}{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
2^{n+1}\sqrt{2-a_n} =& 2^{n+1}\sqrt{2-a_n}\left(\frac{\sqrt{2+a_n}}{a_{n+1}}\right) \quad \text{ya que } a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}\\
=& 2^{n+1}\frac{\sqrt{4-a_n^2}}{a_{n+1}}\\
=& 2^{n+1}\frac{\sqrt{4-(2+a_{n-1})}}{a_{n+1}} \quad \text{ya que } a_n^2 = 2+a_{n-1}\\
=& 2^{n+1}\frac{2-a_{n-1}}{a_{n+1}}\\
=& \frac{2\cdot\frac{2^{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}}{a_{n+1}}\\
=& \frac{2^{n+2}}{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Conclusión:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{n \text{ veces}}}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ldots n \text{ veces}}$$

Proposición. $a^n\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{n \textit{ veces}}}}}}$ $\forall a > 0$ *es convergente?.*

Formula de recurrencia $x_n = a^n\sqrt{a - y_n}$ donde $y_1 = \sqrt{a}$ y $y_n = \sqrt{a + y_{n-1}}$.
Por un propblema anterior sabemos que y_n converge a

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a - y_n} = \sqrt{a - \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$$

¿$\sqrt{a - \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$ es un numero real?
Es necesario que

$$\sqrt{a - \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}} \leq 0$$

Sea $x = \sqrt{1 + 4a}$. Es evidente que $x > 0$ ya que $a > 0$.
Luego $a = \frac{x^2 - 1}{4}$. De donde

$$\frac{x^2 - 1}{4} - \frac{1 + x}{2} \leq 0$$

Luego

$$(x - 3)(x + 1) \leq 0$$

Como $x + 1 > 0$ entonces $x \geq 3$. Es decir $\sqrt{1 + 4a} \geq 3$. Por tanto $a \geq 2$.
Esto nos indica que $\sqrt{a - y_n}$ converge a $\sqrt{a - \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}$, cuando $a \geq 2$.
Analicemos ahora la expresión $x_n = a^n\sqrt{a - y_n}$.
Si $a \geq 2$ entonces a^n diverge cuando $n \to \infty$. Si

$$\sqrt{a - \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}} \neq 0$$

entonces x_n diverge cuando $n \to \infty$.
Luego para que x_n sea convergente es necesario que

$$\sqrt{a - \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} = 0$$

Es decir que $a = 2$. En efecto, x_n converge a π.

Proposición. $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}$ *es convergente?*

PASO 1 Formula de recurrencia.

$$a_1 = \sqrt[3]{6}, \;\; a_n = \sqrt[3]{6+a_{n-1}}$$

PASO 2 a_n es creciente en $(0,2]$.
En efecto, $a_{n-1} - 2 < 0$ en $(0,2]$ y $a_{n-1}^2 + a_{n-1} + 3 > 0$. Luego

$$(a_{n-1} - 2)(a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 3) < 0$$

si $a_{n-1} \in (0,2]$. Entonces

$$a_{n-1}^3 - a_{n-1} - 6 < 0$$

si $a_{n-1} \in (0,2]$. Luego

$$\sqrt[3]{6+a_{n-1}} > a_{n-1}$$

Es decir $a_n > a_{n-1}$.
Por tanto la sucesión a_n es creciente en $(0,2]$.
PASO 3. a_n es acotada superiormente por 2.
Prueba (Inducción matemática) Tenemos que $a_1 = \sqrt[3]{6} < 2$. Supongamos que $a_n < 2$. Mostremos que $a_{n+1} < 2$.

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n} < \sqrt[3]{6+2} = 2$$

Por tanto $a_{n+1} < 2$
PASO 4. a_n es convergente a 2.
Es evidente que a_n es convergente.
Sea

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$$

Luego $x = \sqrt[3]{6+x}$, de donde

$$x^3 - x - 3 = 0$$

Es decir $x = 2$. (Las demás soluciones son complejas)
Conclusión:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6\ldots}}} = 2$$

Proposición. $\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a\ldots}}}$ *es convergente?*

Ejercicio para el lector.

Con los modelos presentados en este documento, el lector puede construir identidades análogas.

Bibliografía

[1] PERALTA, F., *Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener apropximaciones de los mismos.* Universidad Autónoma de Madrid, 1996.

[2] POLYA, G., *Cómo plantear y resolver propblemas.* Trillas, México, 1986.

[3] Revista Suma No. 45. *Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Madrid, febrero del 2004.