“Un problema de siempre” que genera comprensión

Mauricio Bautista Ballén
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
mbautist@uni.pedagógica.edu.co

Resumen

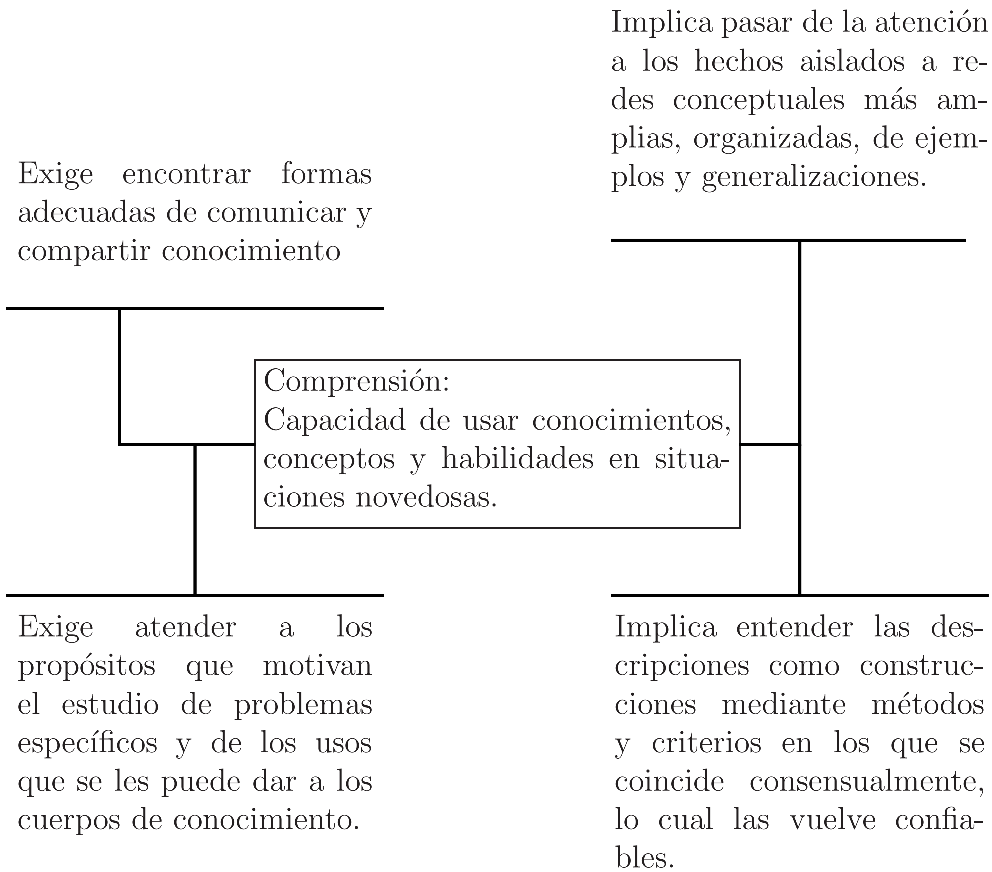
El interés de este trabajo es ilustrar las dimensiones de la comprensión propuestas en el marco de la Enseñanza para la Comprensión a partir de un problema que con frecuencia, se resuelve en Cálculo Diferencial. Con base en el problema se desarrollan diferentes casos para hacer énfasis en la generalización y los ejemplos en matemáticas.

En el marco de la Enseñanza para la Comprensión desarrollado por el proyecto Cero de la Universidad de Harvard, se define la comprensión como la capacidad de usar conocimientos, conceptos y habilidades en situaciones novedosas.

Las dimensiones de la comprensión

En la caracterización de la comprensión, se destacan sus dimensiones: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación. Las dimensiones son fundamentales, pues sirven como referencia para alcanzar comprensión profunda en cualquier disciplina

La dimensión de contenido hace referencia a la forma en que se trascienden las ideas intuitivas y el grado en el cual se proponen ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica. La dimensión de método se refiere a la capacidad para mantener un sano escepticismo acerca de lo que se aprende y para usar métodos confiables en la construcción y validación de afirmaciones y trabajos verdaderos. La dimensión de propósitos hace énfasis en la capacidad para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento y la capacidad para usar el conocimiento en múltiples situaciones. La dimensión de formas de comunicación resalta el uso de sistemas de símbolos (visuales, verbales y matemáticos) para expresar lo que se sabe, por ejemplo explicar un algoritmo, y hace referencia a la comunicación del conocimiento en forma flexible y adecuada. Las dimensiones de la comprensión son punto de referencia para reflexionar acerca de lo que se enseña. En el caso particular de las matemáticas, hay unas prácticas y formas de comunicación específicas. En esta disciplina, el marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión propone, entre otras cosas, que el conocimiento se convierta en una herramienta reflexiva para resolver problemas.



El problema

En muchos textos de cálculo se propone el siguiente problema, el cual se toma como ejemplo para ilustrar las dimensiones de la comprensión.

- ¿Cuál es el lado del cuadrado que se debe cortar en las esquinas de un cartón cuadrado para construir una caja de volumen máximo?
- ¿Cómo se relaciona el área lateral de la caja con el área de la base para la caja de volumen máximo?

La figura 1, muestra que el volumen máximo se obtiene cuando la razón entre el lado, x, del cuadrado que se corta en cada esquina y el lado, a, del cartón es $1/3$. Además, para la condición del volumen máximo se cumple que el área lateral de la caja es igual al área de la base.

Para encontrar tales resultados matemáticamente se procede de la siguiente manera:

El volumen de la caja se expresa como

$$V(x) = x(2a - 2x)^2 = 4x(a - x)^2$$

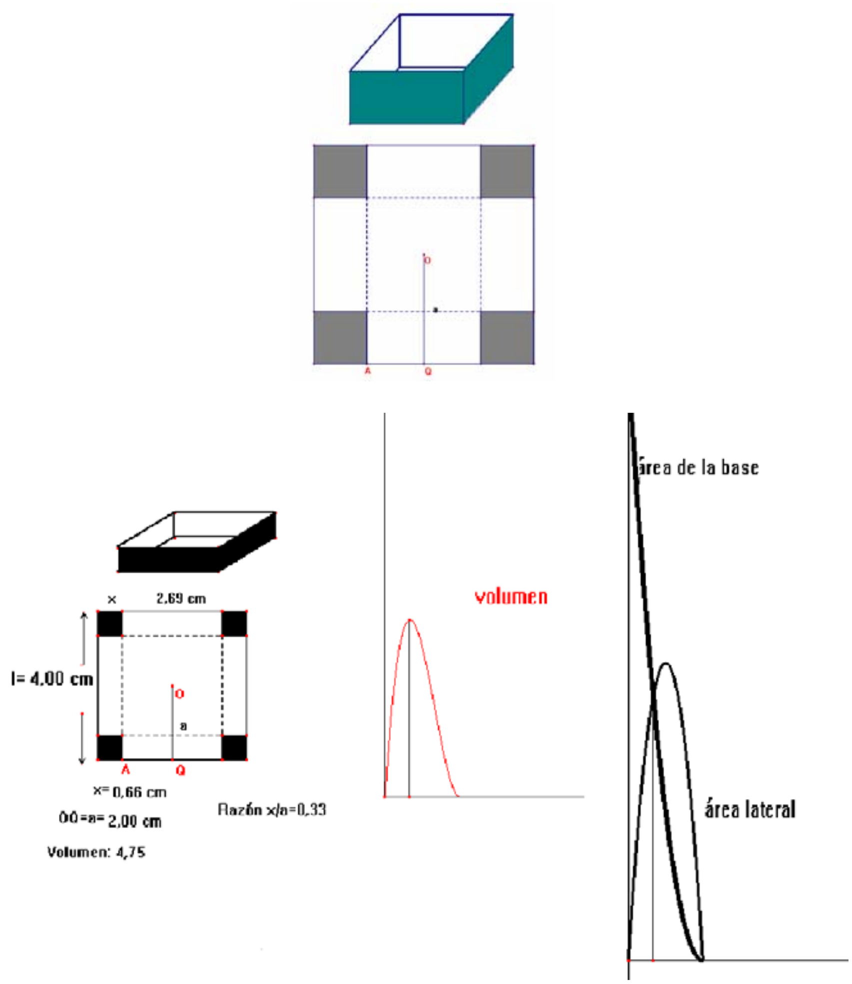


Figura 1.

Para determinar el volumen máximo se halla la primera derivada del volumen y se iguala a cero

$$V'(x) = 4(a^2 - 4ax + 3x^2) = 0$$

De donde se obtiene:

$$x = \frac{a}{3}$$

Para este valor de x, se tiene

$$\text{Área lateral: } A = 4\frac{4a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{16a^2}{9}$$

$$\text{Área de la base: } A = \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{16a^2}{9}$$

Trabajar en este problema implica en términos de la dimensión de contenido, establecer relaciones entre los conceptos de área y de volumen y calcular e interpretar derivadas.

En términos de la dimensión de método implica desarrollar procedimientos para explorar la solución, lo cual se puede hacer a través del software Cabri Geometry y por medio de la aplicación del cálculo diferencial a problemas de optimización. En términos de la dimensión de propósitos, el problema se relaciona con la aplicación de conceptos básicos del cálculo y de la geometría y, en términos de la dimensión formas de comunicación, resulta claro que los símbolos matemáticos y la representación gráfica son definitivos en la comprensión de la resolución.

Hacia la generalización

Dado que la dimensión de contenido hace referencia al grado en el cual se proponen ejemplos y generalizaciones, es pertinente ampliar el problema a diferentes situaciones, las cuales se generan al cambiar la forma del cartón utilizado en la construcción de la caja.

El caso del triángulo equilátero

Se plantea el desarrollo de la misma situación cuando se considera un cartón en forma de triángulo equilátero de lado a:

- ¿Cuál es la altura con la que se debe construir la caja de volumen máximo a partir de un cartón en forma de triángulo equilátero?
- ¿Cómo se relaciona el área lateral de la caja con el área de la base para la caja de volumen máximo?

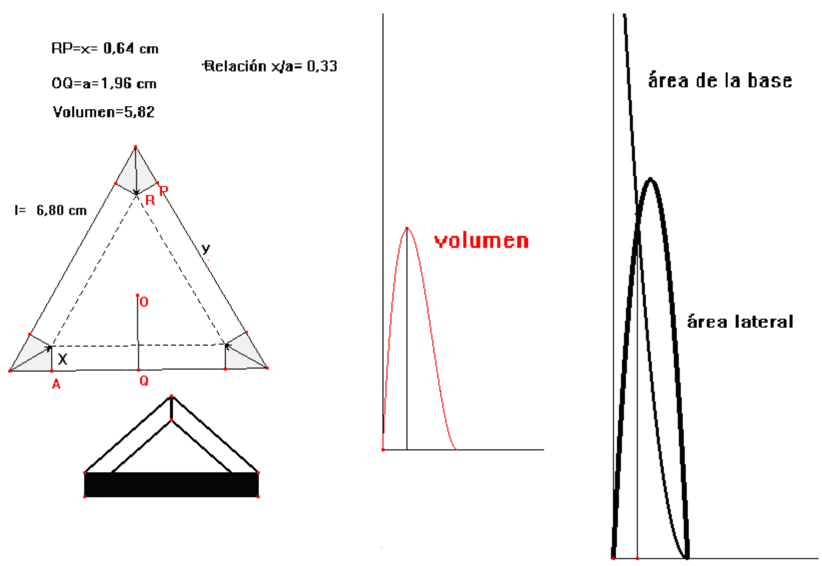


Figura 2.

Volumen de la caja

$$V(x) = 3\sqrt{3}\,x(a-x)^2$$

Para encontrar el volumen máximo:

$$V'(x) = 3\sqrt{3}\,(a^2 - 4ax + 3x^2) = 0$$

de donde $x = \dfrac{a}{3}$

$$\text{Área lateral: } A = \frac{1}{2}3\frac{4\sqrt{3}a}{3}\frac{2a}{3} = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$$

$$\text{Área de la base: } A = 3\frac{4\sqrt{3}a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$$

Los resultados obtenidos concuerdan con la solución del problema en el caso del cartón en forma de cuadrado. La figura 2, muestra que el volumen máximo se obtiene cuando la razón entre la longitud x del segmento $\overline{RP}$, y el lado, a, del cartón es 1/3. Además, cuando el volumen es máximo, el área lateral de la caja es igual al área de la base.

El caso del hexágono regular

Se plantea el desarrollo de la misma situación cuando se considera un cartón en forma de hexágono regular de lado a:

- ¿Cuál es la altura con la que se debe construir la caja de volumen máximo a partir de un cartón en forma de hexágono regular?

- ¿Cómo se relaciona el área lateral de la caja con el área de la base para la caja de volumen máximo?

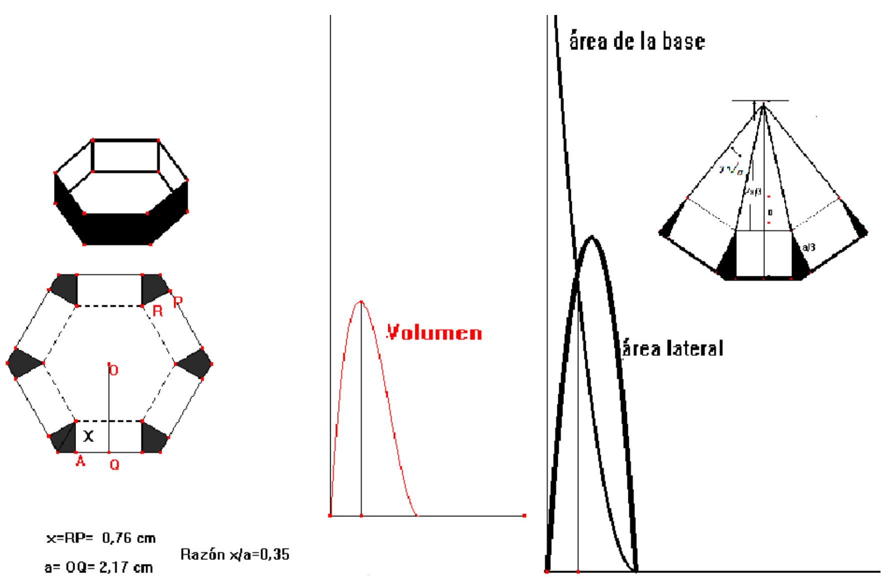


Figura 3.

Volumen de la caja

$$V(x) = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)x(a-x)^2$$

Para encontrar el volumen máximo:

$$V'(x) = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)(a^2 - 4ax + 3x^2) = 0$$

de domde $x = \dfrac{a}{3}$

$$\text{Área lateral: } A = n\frac{4a}{3}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{a}{3} = \frac{4n}{9}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)a^2$$

$$\text{Área de la base: } A = \frac{1}{2}\frac{4na}{3}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{4n}{9}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)a^2$$

En esta situación, los resultados obtenidos concuerdan con la solución del problema en el caso del cartón de forma cuadrada. La figura 3, muestra que el volumen máximo se obtiene cuando la razón entre la longitud x del segmento $\overline{RP}$, y el lado, a, del cartón es 1/3. Además, para la caja de volumen máximo se cumple que el área lateral de la caja es igual al área de la base.

El caso del círculo

Es importante considerar el caso de un cartón en forma de círculo, el cual resulta de considerar el límite cuando el número de lados del polígono regular tiende a infinito.

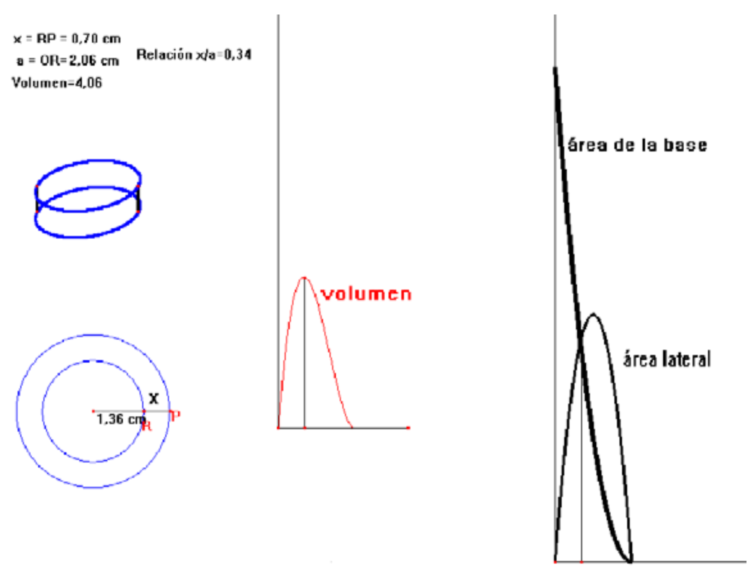


Figura 4.

$$V(x) = \lim_{n\to\infty}\left[n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)x(a-x)^2\right] = x(a-x)^2\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}\tan(n\pi)\right] = \pi x(a-x)^2$$

Para encontrar el volumen máximo:

$$V'(x) = \pi(a^2 - 4ax + 3x^2) = 0$$

de donde $x = \dfrac{a}{3}$

$$\text{Área lateral: } A = 2\pi\frac{2a}{3}\frac{a}{3} = \frac{4\pi a^2}{9}$$

$$\text{Área de la base: } A = \pi\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{4\pi a^2}{9}$$

Nuevamente, los resultados obtenidos concuerdan con la solución del problema en el caso del cartón en forma de cuadrado. La figura 4, muestra que para el volumen máximo se cumple que la razón entre la longitud x del segmento $\overline{RP}$, y el lado, a, del cartón es $1/3$. Además, cuando el volumen es máximo se tiene que el área lateral de la caja es igual al área de la base.

Otros casos a considerar

Finalmente, a manera de ejemplos, es de particular interés considerar algunos casos en los cuales el cartón tomado para la construcción de la caja tiene forma de triángulo rectángulo, de rectángulo y de polígono

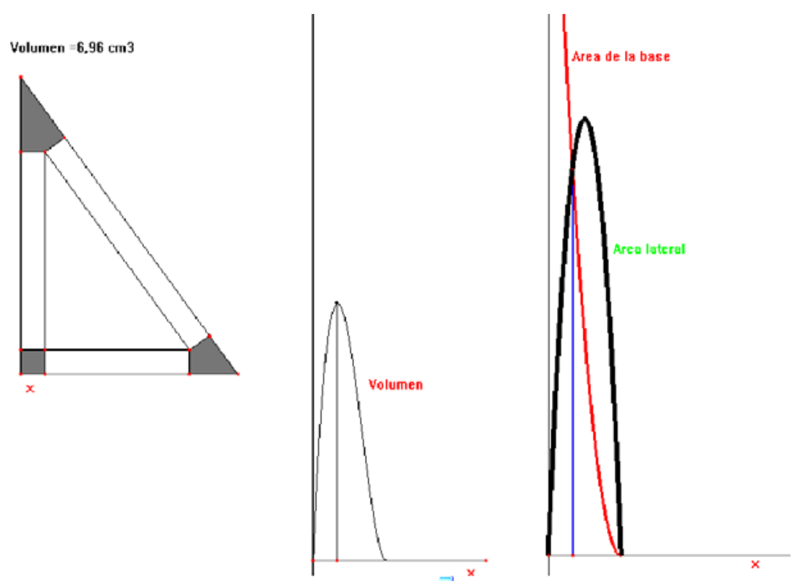


Figura 5.

En estos tres casos particulares, los resultados obtenidos concuerdan con una de las conclusiones obtenidas en los casos anteriores. Las figuras 5, 6 y 7, muestran que cuando el volumen de la caja es máximo, el área lateral de la caja es igual al área de la base.

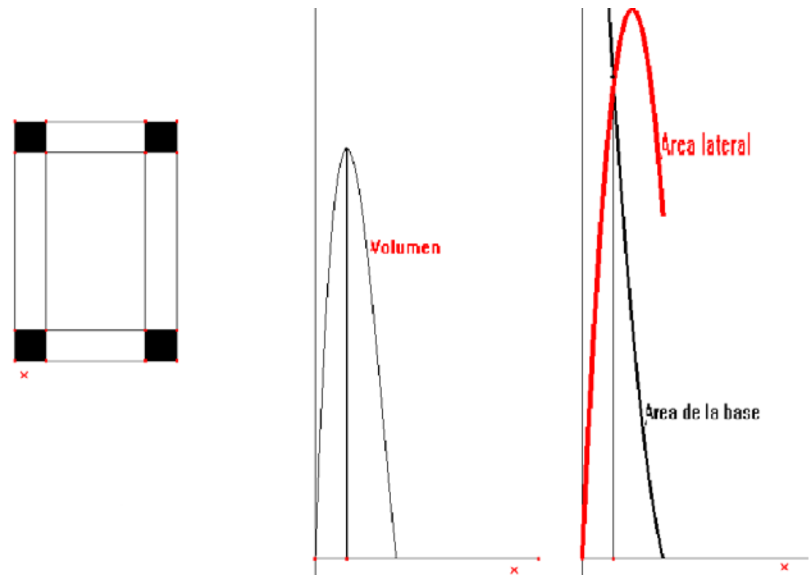


Figura 6.

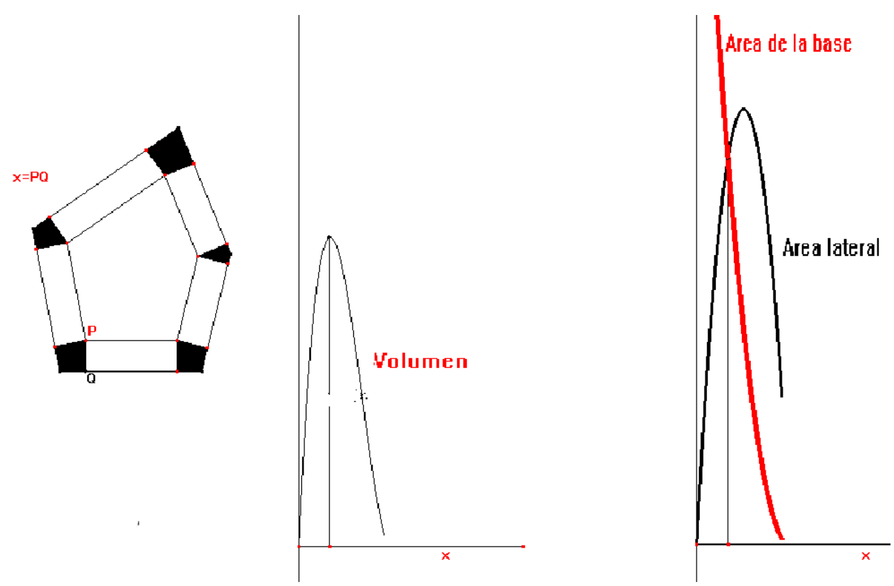


Figura 7.

Una reflexión final en cuanto a las dimensiones de la comprensión en relación con el problema

El problema se ha propuesto como ilustración de una situación a través de la cual se pueden demostrar resultados mediante la aplicación de conceptos básicos del cálculo diferencial y de la geometría. Además, se ha tratado de mostrar cómo moverse con flexibilidad entre los ejemplos y las generalizaciones, lo cual se relaciona con la dimensión de contenido.

Por otra parte, la situación ilustra cómo se puede avanzar en el cuestionamiento de resultados que desde la intuición parecen aislados y en el uso de estrategias, métodos, técnicas y procedimientos para construir conocimiento confiable. Este es un ejemplo de una situación en matemáticas en la que se busca la validación del conocimiento a través de argumentos y explicaciones coherentes. Estos aspectos se orientan hacia la dimensión de método.

El ejemplo propuesto apunta a cuestiones esenciales, propósitos e intereses que impulsan la indagación en matemáticas, así como la identificación de una variedad de usos posibles de los procedimientos empleados, lo cual constituye un trabajo adecuado en términos de la dimensión de propósito.

Finalmente, cabe anotar que el problema invita a la exploración de diferentes sistemas de símbolos para representar el conocimiento. Esto se hace a través tanto de los símbolos utilizados en forma de expresiones matemáticas como de la interpretación de representaciones gráficas, lo cual es parte esencial de la dimensión de las formas de comunicación.

Bibliografía

[1] BLYTHE, T., *La enseñanza para la comprensión*. Guía del docente, Paidós, Buenos Aires, 1999.

[2] EDWARDS Y PENNEY., *Cálculo diferencial e integral. Prentice Hall*. 4ª edición, México, 1997.

[3] M.E.N., *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Serie Memorias, Bogotá, 2002

[4] STONE, M., *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la teoría y la práctica*. Paidós, Quilmes, 1999.

[5] Página de Internet:
htpp//www.wenceslao.com.mx/matematicas/mat4/default.htm