

# EL PROBLEMA DE APOLONIO

**Benjamín Sarmiento Lugo**

*Profesor Universidad Pedagógica Nacional*

*Bogotá D.C, Colombia*

[bsarmiento@pedagogica.edu.co](mailto:bsarmiento@pedagogica.edu.co)

## **Resumen**

El objetivo de este cursillo es presentar uno de los problemas más famosos de la geometría euclidiana, el problema de Apolonio, que a su vez da lugar a diez problemas sobre tangencias. Por razones de tiempo y por las exigencias mismas de las construcciones sólo se describirán y resolverán los siete primeros problemas. Los últimos tres problemas están en el último nivel de Van Hiele y requieren un manejo de conceptos y de construcción más avanzados. En la primera sesión describiré el problema, sus diez casos o problemas implícitos y la construcción de los tres primeros problemas; en la segunda sesión se construirán los problemas 4 y 5, y en la tercera sesión se construirán los problemas 6 y 7. Los otros problemas ameritan otro cursillo centrado en uso de inversión para solución de problemas de tangencias.

## **Introducción**

El problema de Apolonio (Apolonio de Perga, 262-190 a.C.), se plantea en el tratado sobre tangencias y se enuncia de la siguiente forma:

*Dados tres objetos, cada uno de los cuales puede ser punto, recta o circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados. (o que los contenga en el caso de los puntos)*

Al hacer las combinaciones de tres objetos (puntos, rectas o circunferencias) resultan los casos siguientes:

1. Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga.
2. Dadas tres rectas, construir una circunferencia que sea tangente a las tres rectas.
3. Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos.
4. Dadas dos rectas y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.
5. Dados dos puntos y una circunferencia, construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada.
6. Dadas dos circunferencias y un punto, construir una circunferencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas.

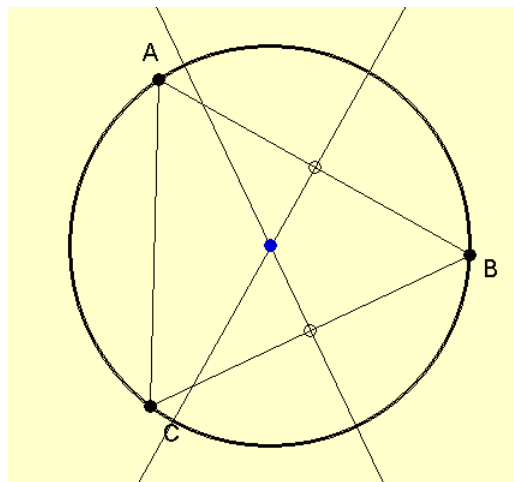
7. Dadas dos rectas y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada.
8. Dadas dos circunferencias y una recta, construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas.
9. Dadas una circunferencia, una recta y un punto, construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y la circunferencia dada.
10. Dadas tres circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas.

Los dos primeros casos aparecen en el Libro IV de los *Elementos* de Euclides; los casos 3, 4, 5, 6, 8 y 9 están en el Libro I de la obra *Tangencias* (o *Contactos*) de Apolonio, y los casos 7 y 10 se encuentran en el Libro II de la misma obra. A continuación se describen los problemas y las construcciones correspondientes.

## Problema 1: Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga.

**Pasos para la construcción:**

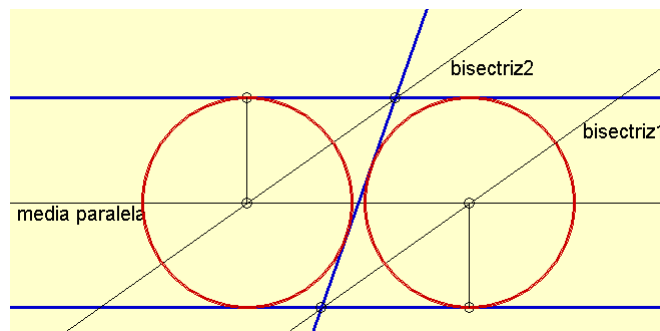
- 1) Trazar los segmentos AB y BC.
- 2) Trazar las mediatrices de los segmentos AB y BC. (M1 y M2)
- 3) Señalar la intersección de las mediatrices M1 y M2. (Circuncentro P)
- 4) Dibujar la circunferencia de centro P y radio PA.



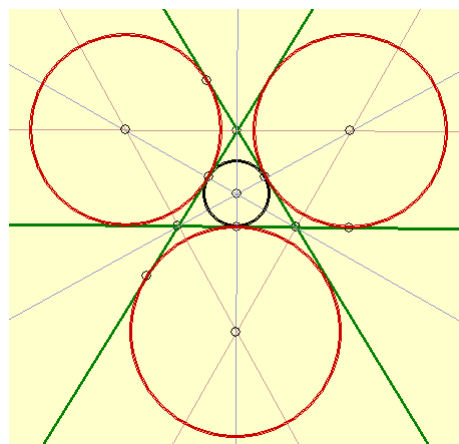
## Problema 2: Dadas tres rectas, construir una circunferencia que sea tangente a las tres rectas.

**Caso 1: Si dos de las rectas son paralelas.**

- 1) Sean  $R_1$  y  $R_2$  las rectas paralelas, y  $T_1$  la recta transversal.
- 2) Trazar la recta media paralela a  $R_1$  y  $R_2$ . (Ya que los centros de las circunferencias tangentes estarán en esta recta)
- 3) Trazar la bisectriz del ángulo formado por  $R_1$  y  $T_1$ . (Ya que en la bisectriz estará el centro de una de las circunferencias tangentes).
- 4) Trazar la bisectriz del ángulo formado por  $R_2$  y  $T_1$ . (Ya que en la bisectriz estará el centro de una de las circunferencias tangentes)
- 5) Señalar la intersección de  $R_1$  y  $T_1$ , y la intersección de  $R_2$  y  $T_1$ . (Puntos  $P$  y  $Q$ )
- 6) Trazar segmentos que pasen por  $P$  y  $Q$  perpendiculares respectivamente a  $R_1$ . (Aquí se determinan los radios de las circunferencias)
- 7) Trazar las circunferencias con centros en  $P$  y  $Q$ , respectivamente.



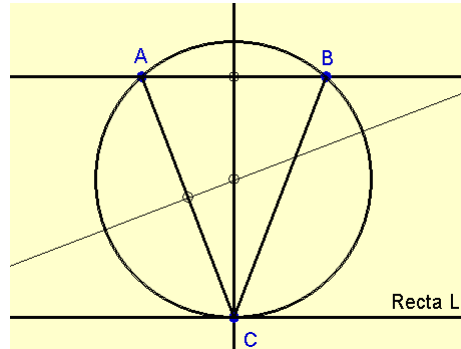
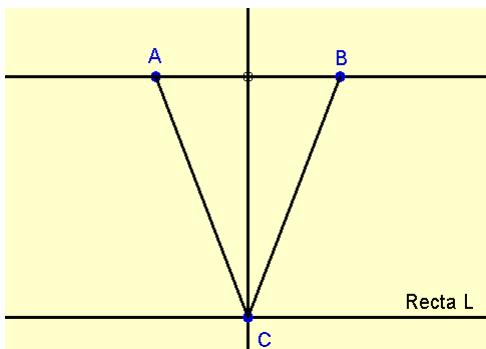
**Caso 2: Si las tres rectas se cortan entre sí.**



**Problema 3: Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos.**

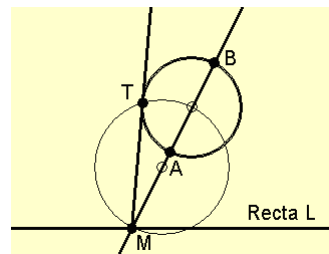
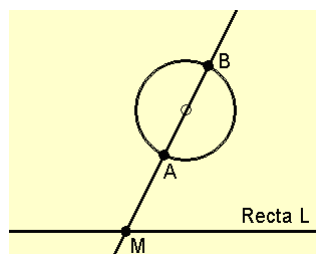
**Caso 1: Si los dos puntos dados A y B están en una recta paralela a la recta L dada.**

- 1) Se construye un punto C sobre la recta L.
- 2) Se traza la mediatriz del segmento AB
- 3) C es la intersección de la mediatriz y la recta dada.
- 4) Se construye la circunferencia que contiene a los puntos A, B y C.

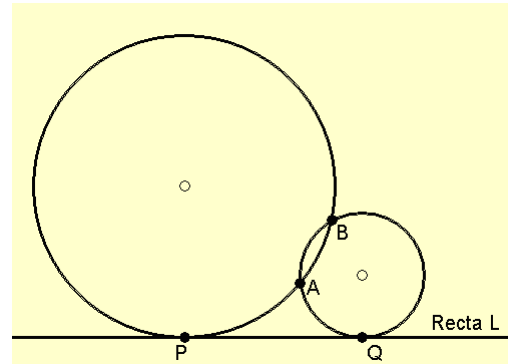
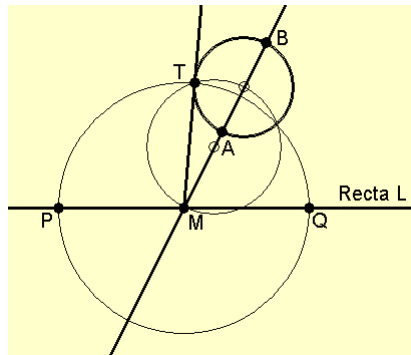


**Caso 2: Si los puntos A y B no están en una recta paralela a la recta L.**

- 1) Trazamos la recta AB.
- 2) Hallamos la intersección de AB y la recta L. (El punto de intersección es M).
- 3) Trazar la circunferencia C1 de diámetro AB.



- 4) Desde M trazar una tangente a la circunferencia C1.
- 5) Marcar el punto de tangencia T.
- 6) Trazar circunferencia con centro M y radio MT.

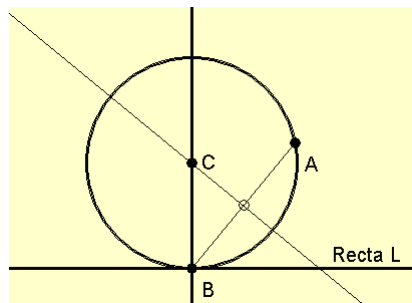


7) Hallar intersecciones entre la recta L y la circunferencia C2. (P y Q)

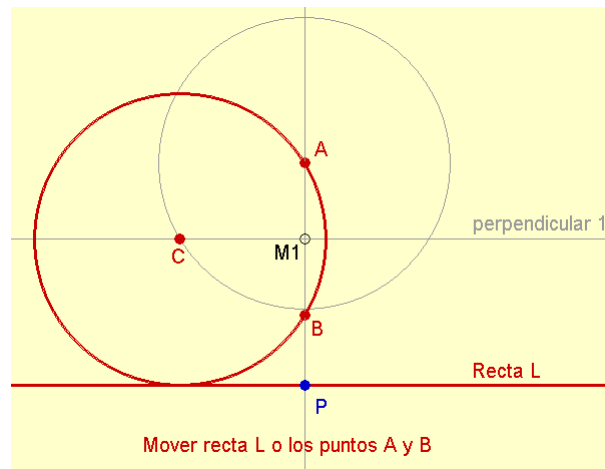
8) Construir las circunferencias que pasan por A,B,P y A,B,Q.

**Caso 3: Cuando uno de los puntos está sobre la recta L.**

- 1) Trazar el segmento AB.
- 2) Trazar la mediatriz del segmento AB.
- 3) Trazar perpendicular a la recta L, que pase por B.
- 4) Hallar intersección de la mediatriz y la perpendicular a L. ( Punto C )
- 5) Trazar circunferencia con centro C y radio BC:



**Caso 4: Cuando los puntos están sobre una recta perpendicular a la recta L.**

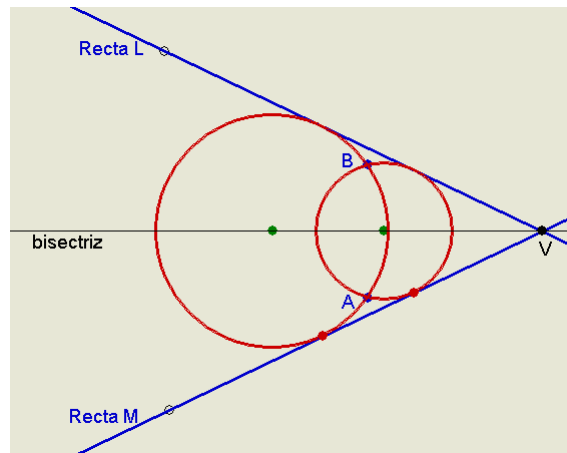
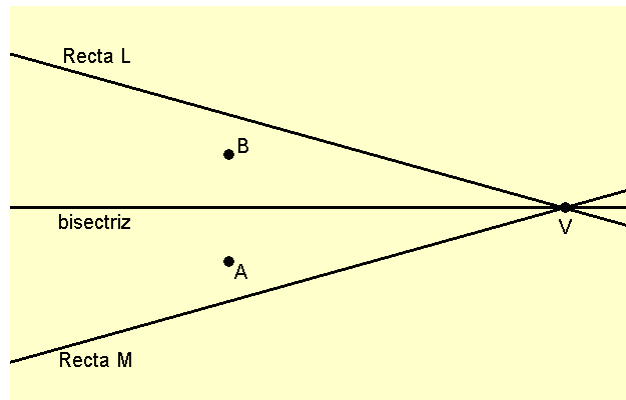


- 1) Trazar la recta AB.
- 2) Señalar la intersección de la recta L y AB. (punto P).
- 3) Hallar el punto medio M1 entre los puntos A y B. (La distancia PM1 es el radio de la circunferencia buscada).
- 4) Trazar la perpendicular a la recta AB que pase por M1. (Sobre esta perpendicular estará el centro de la circunferencia buscada).
- 5) Trazar la circunferencia con centro A y radio PM1.
- 6) Marcar la intersección entre la perpendicular 1 y la circunferencia CA. (punto C, será el centro de la circunferencia buscada).
- 7) Trazar circunferencia con centro C y radio CA.

**Problema 4: Dadas dos rectas y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.**

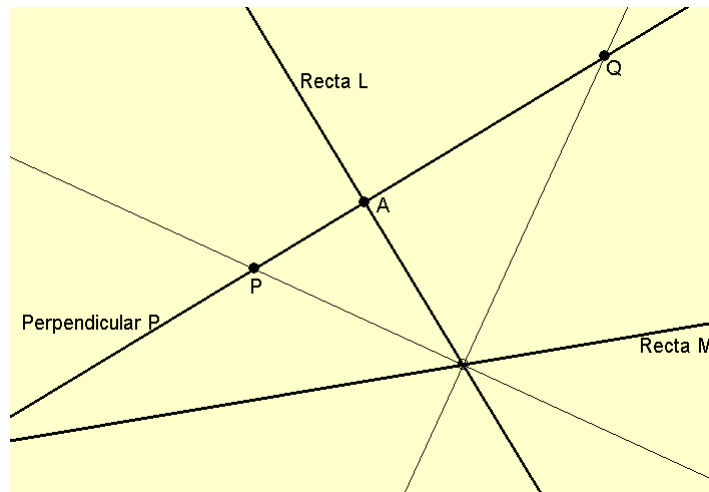
**Caso 1: Si las rectas se cortan y el punto queda comprendido entre ellas.**

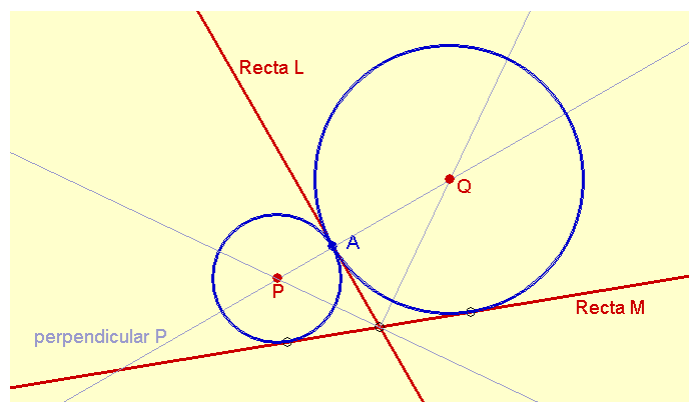
- 1) Trazar la bisectriz del ángulo formado por las rectas L y M.
- 2) Hallar simétrico del punto A respecto a la bisectriz. (Simétrico de A es B)
- 3) Realizar la construcción del problema 3: (P-P-R).



**Caso 2: Si el punto dado A pertenece a una de las rectas dadas.**

- 1) Trazar perpendicular P a la recta L por el punto A.
- 2) Trazar las bisectrices de los ángulos determinados por las dos rectas.
- 3) Hallar intersecciones entre la perpendicular y las bisectrices. ( P y Q )
- 4) P y Q son los centros de las circunferencias buscadas.

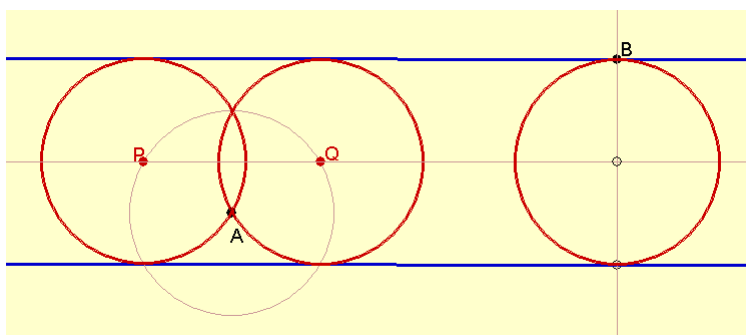




**Caso 3: El punto A está comprendido entre dos rectas que son paralelas.**

- 1) Trazar circunferencia con centro A y diámetro igual a distancia entre las rectas.
- 2) Trazar la paralela media M.
- 3) Hallar intersecciones entre la circunferencia y la paralela media. ( P y Q ).
- 4) P y Q son los centros de las circunferencias buscadas y los radio son AP y AQ.

Si el punto B está en una de las dos rectas dadas, la construcción se reduce a encontrar el centro, que es la intersección entre la media paralela y la recta que pasa por B y es perpendicular a la media paralela.



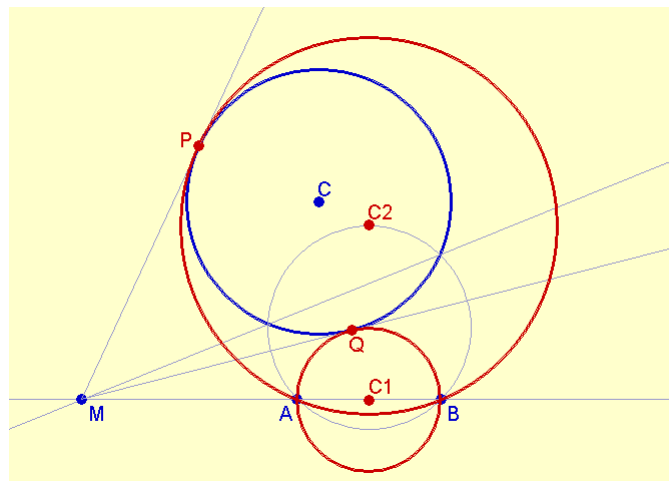
**Problema 5: Dados dos puntos y una circunferencia, construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada.**

**Caso 1: Si los puntos A y B son exteriores a la circunferencia dada.**

- 1) Trazar la mediatriz del segmento AB y la recta AB.
- 2) Construir circunferencia que pase por A y B, que corte a la circunferencia C.



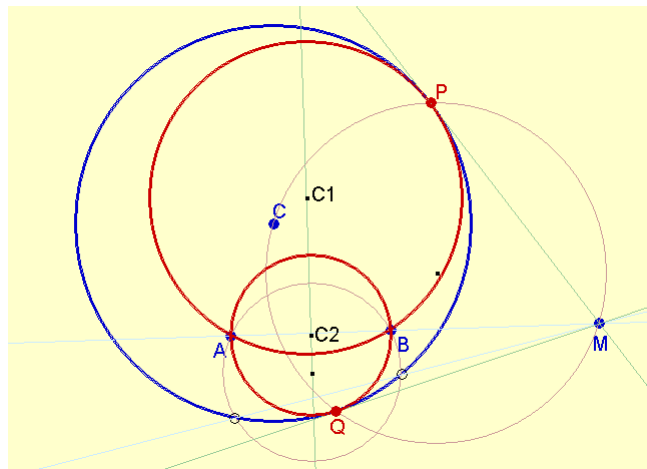
- 3) Trazar eje radical de las circunferencias.
- 4) Hallar intersección entre eje radical y la recta AB. (Punto M)
- 5) Desde M, trazar tangentes a la circunferencia C.
- 6) Marcar los puntos de tangencia P y Q.
- 7) Trazar las circunferencias que pasan por A,B,P y A,B,Q. (Centros C1 y C2)



**Caso 2: Si los puntos A y B son interiores a la circunferencia dada.**

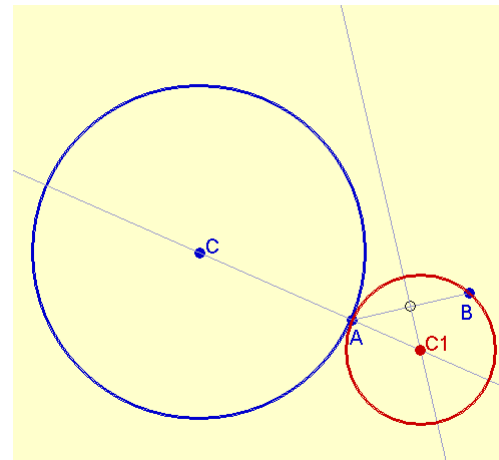
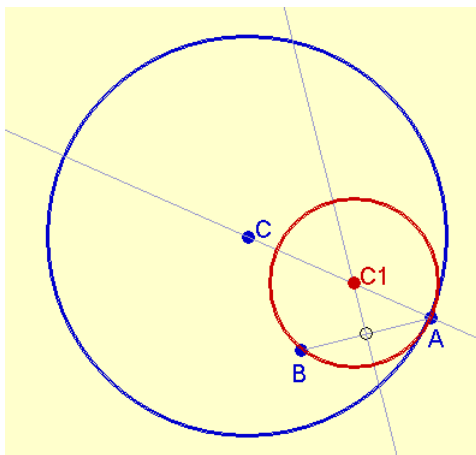
La construcción es similar a la anterior:

- 1) Trazar la mediatriz del segmento AB y la recta AB.
- 2) Construir circunferencia que pase por A y B, que corte a la circunferencia C.
- 3) Trazar eje radical de las circunferencias.
- 4) Hallar intersección entre eje radical y la recta AB. (Punto M)
- 5) Desde M, trazar tangentes a la circunferencia C.
- 6) Marcar los puntos de tangencia P y Q.
- 7) Trazar las circunferencias que pasan por A,B,P y A,B,Q. (Centros C1 y C2)



**Caso 3:** Si uno de los puntos (A) está sobre la circunferencia dada y el otro punto (B) es exterior (o interior) a la circunferencia C.

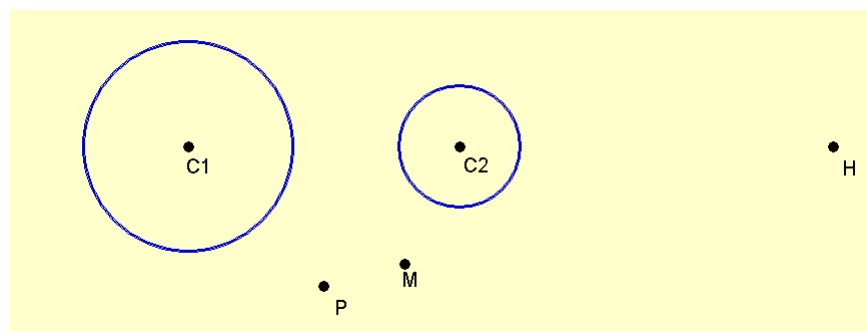
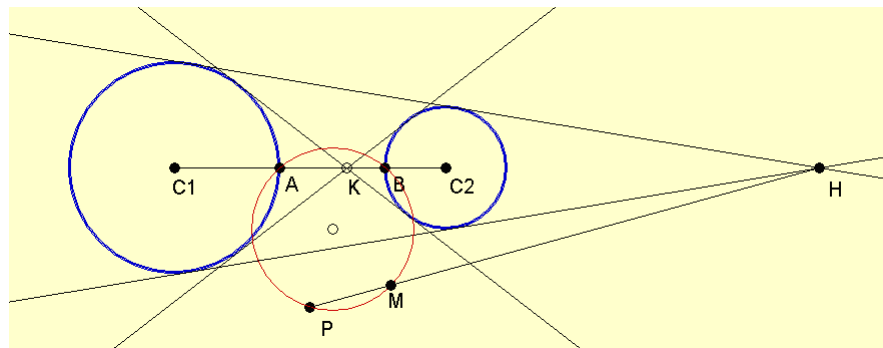
- 1) Trazar la recta AC.
- 2) Trazar el segmento AB.
- 3) Trazar la mediatriz del segmento AB.
- 4) Hallar intersección de la AC y la mediatriz de AB (punto C1, que será el centro de la circunferencia pedida).
- 5) Construir la circunferencia de centro C1 radio AC1.

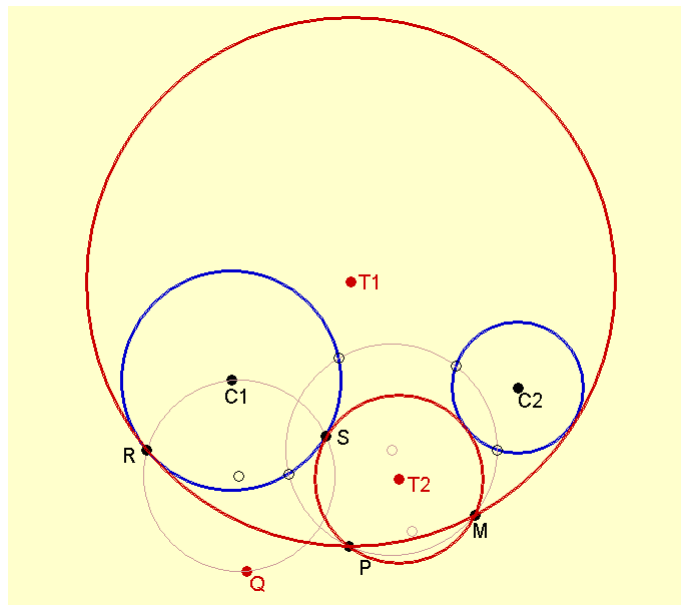


**Problema 6:** Dadas dos circunferencias y un punto, construir una circunferencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas.

**Caso 1:** Cuando el punto P es exterior a ambas circunferencias.

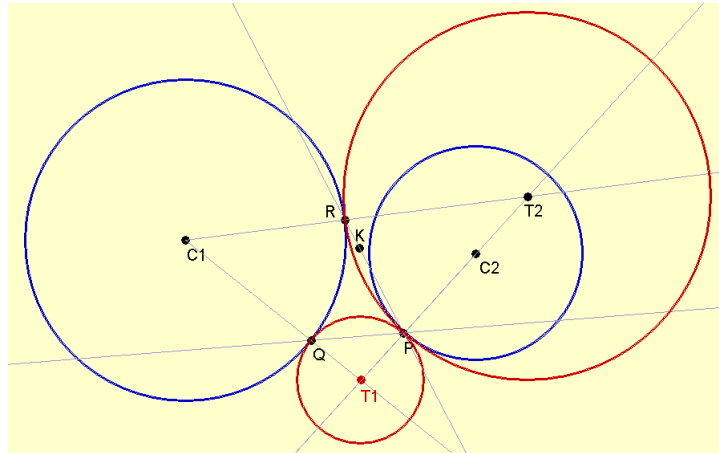
- 1) Hallar los centros de homotecia directo e inverso. (directo H, inverso K)
- 2) Trazar el segmento  $C_1C_2$  (Que uno los centros de las circunferencias dadas)
- 3) Hallar las intersecciones del segmento  $C_1C_2$  con las circunferencias dadas.
- 4) Trazar la circunferencia que pasa por los puntos A, B y P.
- 5) Trazar el segmento PH. (Une el punto P con el centro de homotecia H).
- 6) Hallar la intersección entre el segmento PH y la circunferencia ABP. (punto M).
- 7) Ocultar las rectas tangentes, el segmento  $C_1C_2$ , los puntos A, B, H y K.
- 8) Para desarrollar el paso (9), seguir el problema 5 (P-P-C).
- 9) Construir la circunferencia que pasa por P y M, tangente a la circunferencia  $C_1$ . (Resultan dos circunferencias -rojas- que son las circunferencias pedidas).
- 10) Se pueden obtener dos circunferencias más, repitiendo los pasos anteriores para el centro de homotecia inverso K.





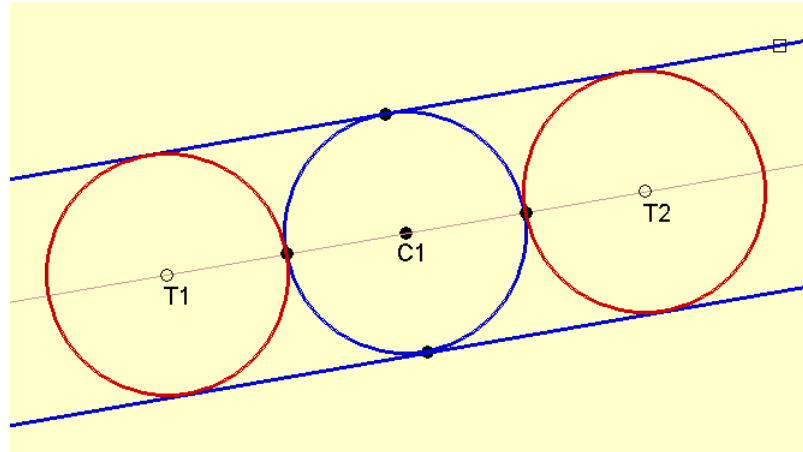
**Caso 2: Cuando el punto P pertenece a una de las circunferencias (C2).**

- 1) Hallar los centros de homotecia directo e inverso. (directo H, inverso K)
- 2) Trazar la recta PH. (del punto P al centro de homotecia H).
- 3) Hallar la intersección de la recta PH con la circunferencia C1 (punto Q).
- 4) P y Q son los puntos de tangencia para una de las circunferencias buscadas.
- 5) Trazar las semirrectas C1Q y C2P.
- 6) Hallar la intersección entre las rectas C1Q y C2P. (punto T1, este es el centro de una de las circunferencias buscadas).
- 7) Trazar la circunferencia de centro T1 y radio T1P. (circunferencia roja).
- 8) Ahora, trazar la recta PK. (del punto P al centro de homotecia inverso K).
- 9) Hallar la intersección entre la recta PK y la circunferencia C1. (punto R)
- 10) P y R son los puntos de tangencia para otra de las circunferencias buscadas.
- 11) Trazar las semirrectas C1R y C2P.
- 12) Hallar la intersección entre las rectas C1R y C2P. (punto T2, este es el centro de otra de las circunferencias buscadas).
- 13) Trazar la circunferencia de centro T2 y radio T2P. (circunferencia roja).



**Problema 7: Dadas dos rectas y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada.**

**Caso 1: Cuando las rectas son paralelas y la circunferencia es tangente a las dos rectas.**



**Caso 2: Cuando la circunferencia está comprendida entre dos rectas L y M.**

- 1) Determinar el radio de la circunferencia dada O.
- 2) Trazar paralelas a cada lado de la recta L, a una distancia igual al radio de la circunferencia O. (Rectas L1 y L2).
- 3) Trazar la bisectriz del ángulo formado por las rectas L y M.
- 4) Hallar el simétrico del centro O respecto a la bisectriz. (punto O')

- 5) Trazar la recta  $OO'$ .
- 6) Señalar la intersección entre la recta  $OO'$  y la recta paralela  $L1$ . (punto  $M$ ).
- 7) Desde  $M$ , trazar tangentes a la circunferencia de diámetro  $OO'$ . Marcar los puntos de tangencia  $D$  y  $E$ .
- 8) Trazar la circunferencia con centro en  $M$  y radio  $MD$ .
- 9) Hallar las intersecciones de la paralela  $L1$  con la circunferencia  $CM$  de centro  $M$ . (puntos  $A$  y  $B$ ).
- 10) Trazar perpendiculares a la paralela  $L1$  por los puntos  $A$  y  $B$ .
- 11) Hallar las intersecciones de las perpendiculares halladas con la bisectriz. (puntos  $P$  y  $Q$ ).
- 12) Los puntos  $P$  y  $Q$  son los centros de las circunferencias buscadas. Trazar circunferencias con centros en  $P$  y  $Q$  tangentes a las rectas  $L$  y  $M$ .
- 13) Si se siguen estos pasos para la recta paralela  $L2$ , se obtienen otras dos circunferencias.

