Geometría de la 2-esfera.

Ernesto Prieto Sanabria
Profesor CINVESTAV
Bogotá D.C, Colombia
ernespri@andromeda.utp.edu.co

1. La forma simpléctica ω

Sea $M = S^2$ la 2-esfera de radio r. En M se toma la medida dada por

$$d\mu = \frac{1}{\pi} r^2 \sin\theta d\varphi \wedge d\theta$$

donde r es el radio de la esfera, φ es el ángulo entre el eje x y la proyección sobre el plano xy y θ es el ángulo respecto al eje z. Por comodidad se usarán coordenadas complejas en lugar de coordenadas polares en S^2. Estas coordenadas se introducen por medio de la proyección estereográfica la cual está dada por:

$$P(x, y, z) = \left(\frac{2rx}{r - z}, \frac{2ry}{r - z} \right). \tag{1}$$

Por medio de (1) la esfera S^2 se identifica con el plano complejo extendido. Las coordenadas complejas del punto $P(x, y, z)$ están dadas por

$$\begin{aligned} \arg P = \arctan \left(\frac{2ry}{r - z} \frac{r - z}{2rz} \right) &= \arctan \frac{y}{x} \\ = \arctan \frac{r \sin\theta \sin\varphi}{r \sin\theta \cos\varphi} &= \varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} |P|^2 = \frac{4r^2x^2}{(r - z)^2} + \frac{4r^2y^2}{(r - z)^2} &= \frac{4r^2(x^2 + y^2)}{(r - z)^2} = \frac{4r^2(r^2 - z^2)}{(r - z)^2} = \\ = \frac{4r^2(r + z)}{r - z} &= \frac{4r^2(r + r\cos\theta)}{r - r\cos\theta} = \frac{4r^2(1 + \cos\theta)}{1 - \cos\theta} = \\ = \frac{4r^2(1 + \cos\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta} &= \frac{4r^2(2cos^2\frac{\theta}{2})^2}{\operatorname{sen}^2\theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |P| &= \frac{4r\cos^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\theta} \\ &= 2r\cot\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

La forma exterior $\omega = \frac{1}{\pi} r^2 \sin\theta d\varphi \wedge d\theta$, se puede expresar en términos de las coordenadas complejas mas exactamente se tiene el siguiente lema

Lema 1. *Sea*

$$\omega = \frac{1}{\pi} r^2 \sin\theta d\varphi \wedge d\theta$$

entonces ω en coordenadas complejas esta dada por

$$\omega = \frac{1}{2\pi i}\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Demostración: de (3) se sigue que

$$|z|^2 = z\bar{z} = 4r^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} = \frac{4r^2}{\tan^2 \frac{\theta}{2}}.$$

De donde

$$\frac{4r^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} = z\bar{z} + 4r^2.$$

Entonces

(4) $$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-1}.$$

De (2) y (3) se sigue que

$$z = |z| \exp(i \arg z) = 2r \cot \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi)$$

y

$$\bar{z} = 2r \cot \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi).$$

Por lo tanto el Jacobiano $J(z, \bar{z})$ es igual a

$$\begin{aligned} J(z,\bar{z}) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= 4r^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} i. \end{aligned}$$

Así $\omega = \frac{1}{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi = \frac{r^2 \operatorname{sen}\theta \sin^2 \frac{\theta}{2}}{i4\pi r^2 \cot \frac{\theta}{2}} dz \wedge d\bar{z} = \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{2\pi i} dz \wedge d\bar{z}$ de (4) se sigue que

(5) $$\omega = \frac{1}{2\pi i}\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-2} dz \wedge d\bar{z}. \blacksquare$$

Con la forma simpléctica ω se define el Hamiltoniano X_f para la función suave f por

(6) $$X_f \rfloor \omega := df.$$

Es decir,

$$\omega(X_f, \cdot) = df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

Por otro lado

$$X_f = a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

lo que implica usando (5) y (6) que

$$\frac{1}{2\pi i}\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-2}(ad\bar{z} - bdz) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{-2} a = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

es decir,

$$a = 2\pi i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{2}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

De forma análoga se tiene que

$$b = -2\pi i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{2}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Así el Hamiltoniano de la función suave f en M está dado por

$$X_f = 2\pi i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{7}$$

para f y g suaves los corchetes de Poisson están definidos como

$$\{f, g\} := X_g(f)$$

De la anterior definición y de 1.7 se tiene el siguiente lema

Lema 2. *Para f y g suaves se tiene que*

$$\{f, g\} = 2\pi i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\right).$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\{f, g\} &:= X_g(f) = -X_f(g) = -2\pi i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{2}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= 2\pi i\left(1 + \frac{z\bar{z}}{4r^2}\right)^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z}\right). \qquad (8)\end{aligned}$$

Para f y g suaves también se tienen las siguientes definiciones equivalentes de los corchetes de Poisson ver ([**?**], pág. 489)

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = X_g f.$$

Los corchetes de Poisson tienen las siguientes propiedades

1. Bilinealidad: $\{f, g\}$ es lineal sobre $\mathbb{R}$ en f y en g.
2. Antisimetría: $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -\{g, f\}$.
3. $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

Donde $[,]$ denota los corchetes de Lie los cuales se definen para los campos vectoriales U y V como

$$[U, V] = UV - VU.$$

Los corchetes de Lie son bilineales, antisimétricos y una de sus propiedades fundamentales es que también es un campo vectorial. La derivada de Lie para los campos vectoriales U y V está dada por

$$\mathcal{L}_U(V) = [U, V].$$

Ahora se puede demostrar 3 de la siguiente forma

$$\begin{aligned} X_{\{f,g\}}\rfloor\omega = d\{f, g\} = d(X_g f) = d(\mathcal{L}_{X_g} f) = \mathcal{L}_{X_g} df = \mathcal{L}_{X_g}(X_f\rfloor\omega) \\ = (\mathcal{L}_{X_g} X_f)\rfloor\omega + X_f\rfloor\mathcal{L}_{X_g}\omega \\ = [X_g, X_f]\rfloor\omega + 0 = -[X_f, X_g]\rfloor\omega. \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a 3, por que la forma simpléctica ω es no degenerada.

4. Sean f,g, y h suaves. Utilizando las propiedades 2 y 3 tenemos

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} = X_{\{g,h\}} f = -[X_g, X_h]f = -X_g X_h f + X_h X_g f \\ = -X_g\{f, h\} + X_h\{f, g\} = -\{\{f, h\}, g\} + \{\{f, g\}, h\} \\ = -\{g, \{h, f\}\} - \{h, \{f, g\}\}. \end{aligned}$$

esto es

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} \quad = \quad 0. \tag{9}$$

La ecuación 9 es llamada la identidad de Jacobi

Terminamos esta sección calculando el operador Laplace-Beltrami en la 2-esfera.

Definición. Sean G un dominio en $\mathbb{C}^n$ y $g(z) = (g_{ij}(z))$ una métrica Hermitiana en G, el operador de Laplace-Beltrami asociado a g está definido como

$$\Delta_B = \frac{2}{g}\sum_{ij}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(gg^{ij}\frac{\partial}{\partial z_j}\right) + \frac{\partial}{\partial z_j}\left(gg^{ij}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right\},$$

donde $g = \det(g_{ij}(z))$.

Nota. La anterior definición junto con otras usadas en este trabajo fueron tomadas del libro de Steven G. Krantz.

En el caso de la 2-esfera de radio $r = \frac{1}{2}$ se tiene que $g_{ij} = (1 + z\bar{z})^{-2}\delta_{ij}$ y $n = 1$, por lo tanto se tiene que

$$g = \det(g_{ij}) = (1 + z\bar{z})^{-2} \text{ y } g^{11} = (1 + z\bar{z})^2,$$

Así

$$\begin{aligned}\Delta_B &= \tfrac{2}{(1+z\bar{z})^{-2}} \sum_{i=j=1} \left\{ \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(gg^{11}\tfrac{\partial}{\partial z}) + \tfrac{\partial}{\partial z}(gg^{11}\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}) \right\} \\ &= 2(1+z\bar{z})^2 \left\{ \tfrac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z} + \tfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right\} \\ &= 4(1+z\bar{z})^2 \tfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.\end{aligned}$$