Introducción a los z-conjuntos

Nubia Soler
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
nsoler@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

En este documento se hace una introducción a los $\mathbb{Z}$-conjuntos como un tema de estudio en la topología infinito-dimensional. Se presentan inicialmente, conceptos de Topología General, luego se da el concepto de $\mathbb{Z}$-conjunto y se describen algunas caracteristicas de este.

Para iniciar el estudio de los $\mathbb{Z}$-conjuntos revisamos conceptos y resultados de Topología General como espacio topológico, espacio métrico, cubrimiento abierto, adherencia, espacio separable, función continua,

Preliminares

Espacios Métricos

Definición 1 (Espacio Topológico). *Una estructura topológica para un conjunto X es una familia β de subconjuntos de X que cumple las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset$ y X están en β*
2. *La unión de cualquier colección de elementos de β está en β.*
3. *La intersección de cualquier colección finita de elementos de β está en β.*

Cada elemento B de β se denomina conjunto abierto y al complemento de B se le llama conjunto cerrado.
Como ejemplos de espacios topolólogicos podemos considerar los siguientes:

1. $\mathbb{R}$ considerando como abiertos los conjuntos que son unión de intervalos abiertos.
2. Un conjunto X tomando como abiertos los subconjuntos de X. Esta topología se denomina usualmente topología *discreta*.
3. Un conjunto X tomando como abiertos únicamente los conjuntos $\emptyset$ y X. Esta topología se conoce como topología *grosera*.
4. Dado un conjunto X definimos la topología de cofinitos (coenumerables) tomando como abiertos aquellos subconjuntos de X cuyo complemento en X es finito (enumerable), también incluimos al conjunto vacío.

Definición 2 (Espacio métrico). *Sea X un conjunto no vacío, una métrica en X es una función*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

tal que para todo $x, y, z \in X$ se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

El par (X, d) se llama espacio métrico.

En un espacio métrico (X, d) una bola abierta de radio ε alrededor de un punto x es el conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

Todo espacio métrico (X, d) genera una topología. Los conjuntos abiertos son todos aquellos subconjuntos de X para los cuales se puede construir una bola abierta alrededor de cada uno de sus puntos.

Como ejemplos de espacios métricos podemos considerar los siguientes:

1. $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana definida de la siguiente manera:

$$d((x_1, x_2, x_3, ..., x_n), (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. $\mathbb{R}^n$ con la métrica del taxista definida de la siguiente manera:

$$d((x_1, x_2, x_3, ..., x_n), (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

3. $\mathbb{R}^n$ con la métrica cúbica definida de la siguiente manera:

$$d((x_1, x_2, x_3, ..., x_n), (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)) = max_{i:1,...,n}\{|x_i - y_i|\}$$

4. El conjunto de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$ para las cuales la serie del cuadrado de sus términos converge con la métrica definida de la siguiente mantera:

$$d((x_1, x_2, x_3, ...), (y_1, y_2, y_3, ...)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

5. El cubo de Hilbert Q. Constituido por todas las sucesiones en $[0,1]$ con la siguiente métrica:
$$d((x_1,x_2,x_3,...),(y_1,y_2,y_3,...)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

6. El conjunto de las funciones $f : Y \to \mathbb{R}$ acotadas denotado por $B(Y,\mathbb{R})$, con la métrica del sup definida de la siguiente manera:
$$d(f,g) = sup\{|f(y) - g(y)| : y \in Y\}$$

Espacios Separables

Un punto x de un espacio topológico X es adherente a un subconjunto A de X si la intersección entre A y cualquier abierto que contiene a x es no vacía. La colección de todos los puntos adherentes al conjunto A se denomina adherencia o clausura del conjunto y se denota por $cl(A)$.
Una característica importante de la adherencia de un conjunto A es que ésta corresponde al menor cerrado que contiene al conjunto. Entre otras cosas, podemos concluir que la adherencia de un conjunto cerrado corresponde al mismo conjunto.

Si un subconjunto A de un espacio X es tal que $cl(A) = \emptyset$ se dice que es denso en ninguna parte (nowhere dense).

En un espacio X, Un conjunto $A \subset X$ es denso en X si $cl(A) = X$. El espacio X es separable si contiene un subconjunto denso enumerable.
Como ejemplos de espacios separables podemos encontrar los siguientes:

1. $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclideana. Esto porque $\mathbb{Q}^n$ es enumerable y denso en $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}$ con la topología de complementos finitos pues $cl(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$
3. El Cubo de Hilbert porque el producto enumerable de espacios separables es separable.

Continuidad

Los espacios que vamos a mencionar en este documento se considerarán, a no ser que se indique lo contrario, como métricos y separables.
Dado un espacio espacio X, decimos que un cubrimiento de X es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X tales que
$$X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$
Un cubrimiento $\mathcal{U}$ es abierto cuando todos sus elementos son conjuntos abiertos.

Una función $f : X \longrightarrow Y$ con X e Y espacios métricos es continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todo $x, y \in X$.

Retractos

Definición 3. *Sea A un subespacio de X un espacio topológico. A es retracto de X si existe una función $r : X \longrightarrow A$ continua tal que su restricción a A es la función identidad.*

Lema 1. *Si A es retracto de X entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Sea A un retracto X, entonces existe una función $h : X \to A$ tal que $h|A = Id_A$. Dado $a \in cl(A)$, existe $(x_n)_n$ sucesión en A convergente a a. Por la continuidad de h, $(h(x_n))_n$ converge a $h(a)$ que pertenece a A y como $h(a) = a$ concluimos que $cl(A) = A$ □

Definición 4. *Un espacio X es Retracto Absoluto (AR) si es retracto para cualquier espacio Y que lo contiene como subconjunto cerrado.*

Un espacio X es un Extensor Absoluto (AE) si para cualquier espacio Y y cualquier cerrado A de Y, toda función continua $f : A \to X$ puede extenderse a Y. En [4], página 25, se prueba que un espacio es Retracto Absoluto si y sólo si es Extensor Absoluto, se muestra también que el producto enumerable de espacios AR, es AR, ver página 26.

Tomando esta relación y aplicando el teorema de extensión de Tietze, podemos mencionar como ejemplos de espacios AE a los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, I^n y $Q = I^\omega$.

Definición 5. *Sea Y un espacio, $X \subset Y$.X se dice vecindad retracta de Y si existe un abierto A en Y tal que X es retracto de A.*

Definición 6. *Un espacio X es Retracto Absoluto por Vecindades (ANR) si es una vecindad retracta de cualquier espacio Y que lo contiene como subespacio cerrado.*

El conjunto $A = \{0, 1\}$ es ANR, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto A es retracto de los abiertos $(-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3})$ y $(\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{4\varepsilon}{3})$, pero A no es AR ya que no existe retracción $r : I \to A$ pues (Toda función continua preserva la propiedad de conexidad).

1. $\mathbb{Z}$-conjuntos

En lo que sigue, presentaremos la definición de $\mathbb{Z}$-conjuntos.

Definición 7. *Dados X e Y espacios topológicos, dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de Y. Se dice que f y g son $\mathcal{U}$-cercanas si para todo $x \in X$ se tiene que $\{f(x), g(x)\} \subset U_i$ para algún U_i del cubrimiento.*

Denotaremos por Id_X la función identidad sobre el conjunto X.

Definición 8. *Sea X un espacio y A un subconjunto cerrado en X, si para todo $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto de X, existe $h : X \longrightarrow X$ tal que h e Id_X son $\mathcal{U}$-cercanas y $h(X) \cap A = \emptyset$ entonces A se denomina $\mathbb{Z}$-conjunto. Si adicionalmente $cl(h(X)) \cap A = \emptyset$ entonces A es un fuerte $\mathbb{Z}$-conjunto.*

Definición 9. *Consideremos un espacio topológico X. $A \subset X$ es $\sigma - \mathbb{Z}$-conjunto en X si puede escribirse como unión enumerable de $\mathbb{Z}$-conjuntos de X.*

Definición 10. *A es $\sigma - \mathbb{Z}$-espacio en un espacio topológico X si es unión enumerable de fuertes $\mathbb{Z}$-conjuntos de X. Si además $A = X$, entonces, A es $\sigma - \mathbb{Z}$-espacio.*

Lema 2. *Cualquier $\mathbb{Z}$-conjunto en un espacio localmente compacto es un fuerte $\mathbb{Z}$-conjunto.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [1], página 27. □

1.1. Ejemplos de $\mathbb{Z}$-conjuntos

Ejemplo 1. *Sea $X = [0, 1]$ y $A = \{0\}$. Dado $1 > \varepsilon > 0$ definimos*

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x+\varepsilon}{2} & si\ 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ x & si\ \varepsilon < x \leq 1. \end{cases}$$

Cuando $0 \leq x \leq \varepsilon$ tenemos que $d(x, h_\varepsilon(x)) = |x - \frac{\varepsilon}{2} - x| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Esto muestra que A es un $\mathbb{Z}$-conjunto. Debido a que $[0, 1]$ es localmente compacto, se tiene que A es fuerte $\mathbb{Z}$-conjunto. De forma similar se puede mostrar que $\{1\}$ y $\{0, 1\}$ son fuertes $\mathbb{Z}$-conjuntos en $[0, 1]$.

Ejemplo 2. *Consideremos el cubo de Hilbert Q con la métrica d definida como $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$ cuando $x = (x_i)$ e $y = (y_i) \in Q$. Sean $a, b \in (0, 1)$ tales que $a < b$ y $A = [a, b]^\omega$ y veamos que A es un $\mathbb{Z}$-conjunto en Q.*
Dado $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de Q, podemos considerar cada U_i como una ε-bola con $\varepsilon > 0$. Existe $n \in N$ tal que para $m \geq n$, se tiene que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Definimos la función $h : Q \longrightarrow Q$ de la siguiente manera:

$$h((x_1, x_2, ..., x_n, ...)) = (x_1, ..., x_{n-1}, 1, x_{n+1}, ...).$$

$h(Q) \cap A = \emptyset$ ya que $1 \notin [a, b]$.
Por otra parte, dado $x \in A$

$$d(x, h(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - h_i(x)|}{2^i} = \frac{|1 - x_n|}{2^n} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Esto implica que $\{x, f(x)\}$ está contenido en una bola de radio ε, es decir, Id_X y h son $\mathcal{U}$-cercanas y A un $\mathbb{Z}$-conjunto en Q.

1.2. Algunas características de los $\mathbb{Z}$-conjuntos

A continuación mencionamos algunas de las características topológicas $\mathbb{Z}$-conjuntos.

Lema 3. *1. Todo $\mathbb{Z}$-conjunto es denso en ninguna parte, esto es, su interior es vacío.*

2. *Sean X un espacio topológico, B un $\mathbb{Z}$-conjunto y $A \subset B$ conjunto cerrado. Entonces A es $\mathbb{Z}$-conjunto.*

3. *Si A es un $\mathbb{Z}$-conjunto en un espacio X y Y es cualquier espacio entonces $A \times Y$ es un $\mathbb{Z}$-conjunto en $X \times Y$.*

4. *Si A es un $\mathbb{Z}$-conjunto en un espacio X y h es un homeomeorfismo sobre X entonces $h(A)$ es un $\mathbb{Z}$-conjunto en X*

Demostración. Demostraremos 1 y 2. 3 y 4 lo dejamos como ejercicio para el lector.

Demostración de 1. Sea A un $\mathbb{Z}$- conjunto en X y supongamos que existe $x \in int(A)$ y $\delta > 0$ tal que $B(\{x\}, \delta) \subseteq A$. Consideremos un cubrimiento de X de $\frac{\delta}{2}$-bolas abiertas. Existe $f : X \longrightarrow X \setminus A$ continua tal que $f(y) \notin A$ para todo $y \in X$ y para algún x_o se tiene que

$$\{x, f(x)\} \subseteq B(\{x_o\}, \frac{\delta}{2}).$$

Luego

$$d(x, f(x)) \leq d(x, x_o) + d(x_o, f(x)) < \delta,$$

esto es

$$f(x) \in B(\{x\}, \delta) \subseteq A,$$

lo cual es una contradicción.

Demostración de 2. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de A entonces $X \setminus A$ es un abierto en X. Luego $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup X \setminus A$ es un cubrimiento abierto de B.

Dado que existe $h : X \to X$ continua que es $\mathcal{W}$-cercana a Id_X tal que $h(X) \cap B = \emptyset$, entonces si $x \in A$, tenemos que $\{h(x), x\} \subset G$, donde $G \in W$. Como $x \notin X \setminus A$, entonces $G = U_j \in U$ y además tenemos que $h(X) \cap A \subset h(X) \cap B = \emptyset$, por lo tanto, concluimos que A es $\mathbb{Z}$-conjunto.

□

Por último, damos unos conceptos de topología infinito dimensional asociados a los $\mathbb{Z}$-conjuntos.

Retractos

Definición 11. *Sea A un subespacio de X un espacio topológico. A es retracto de X si existe una función $r : X \longrightarrow A$ continua tal que su restricción a A es la función identidad.*

Lema 4. *Si A es retracto de X entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Sea A un retracto X, entonces existe una función $h : X \to A$ tal que $h|A = Id_A$. Dado $a \in cl(A)$, existe $(x_n)_n$ sucesión en A convergente a a. Por la continuidad de h, $(h(x_n))_n$ converge a $h(a)$ que pertenece a A y como $h(a) = a$ concluimos que $cl(A) = A$ □

Definición 12. *Un espacio X es Retracto Absoluto (AR) si es retracto para cualquier espacio Y que lo contiene como subconjunto cerrado.*

Un espacio X es un Extensor Absoluto (AE) si para cualquier espacio Y y cualquier cerrado A de Y, toda función continua $f : A \to X$ puede extenderse a Y. En [4], página 25, se prueba que un espacio es Retracto Absoluto si y sólo si es Extensor Absoluto, se muestra también que el producto enumerable de espacios AR, es AR, ver página 26.

Tomando esta relación y aplicando el teorema de extensión de Tietze, podemos mencionar como ejemplos de espacios AE a los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, I^n y $Q = I^\omega$.

Definición 13. *Sea Y un espacio, $X \subset Y.X$ se dice vecindad retracta de Y si existe un abierto A en Y tal que X es retracto de A.*

Definición 14. *Un espacio X es Retracto Absoluto por Vecindades (ANR) si es una vecindad retracta de cualquier espacio Y que lo contiene como subespacio cerrado.*

El conjunto $A = \{0, 1\}$ es ANR, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto A es retracto de los abiertos $(-\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3})$ y $(\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{4\varepsilon}{3})$, pero A no es AR ya que no existe retracción $r : I \to A$ pues (Toda función continua preserva la propiedad de conexidad).

Definición 15. *Sea $A \in X$ cerrado. A es homotópicamente denso en X si existe una homotopía*

$$H : X \times I \longrightarrow X$$

tal que

$$H(X \times \{0\}) = Id_X$$

y

$$H(X \times (0, 1]) \subset A.$$

Un subconjunto $B \subset X$ es homotópicamente despreciable en X si $X \setminus B$ es homotópicamente denso.

El siguiente lema da una caracterización de los $\mathbb{Z}$-conjuntos en espacios que son retractos absolutos por vecindades.

Lema 5. *Sea X un espacio ANR y A un cerrado en X. A es un $\mathbb{Z}$-conjunto en X si y sólo si A es homotópicamente despreciable en X.*

Demostración. La demostración de este teorema la presenta T. Banakh en [1] página 27. □

Bibliografía

[1] BANAKH, T.; RADUL, T.; ZARICHNYI, M., *Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds.* Monograph series, VNTL Publishers, Vol. 1, (1996).

[2] BOURBAKI, N., *General Topology. Part 2.* Addison-Wesley, (1966).

[3] MUNKRES, J., *Topology*, Prentice Hall, New Jersey (1975).

[4] VAN MILL, J., *The infinite- dimensional Topology of Function Spaces.* North Holland, (2001).