Una mónada en la categoría de compactos

Carlos Lineros
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Introducción

En esta charla se presenta la noción de mónada y un ejemplo de mónada en la categoría **Comp**, con este fín se presentan primero nociones previas de teoría de categorías. El interes es divulgativo. Se espera tener luego la oportunidad de presentar en este encuentro anual un estudió desde el punto de vista categórico de la construcción de Harman - Mycielski, el cual fue realizado bajo la dirección del doctor Taras Radul.

1. Teoría de categorías

Definition 1. *Una categoría*[1] *es, una cuádrupla* $\mathbf{C} = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ *que consiste de:*

1. *Una clase* $\mathcal{O}$*, es cuyos miembros son llamados* $\mathbf{C}$*-objetos.*
2. *Para cada par* (A, B) *de* ***C****-objetos existe el conjunto* $hom_{\mathbf{C}}(A, B)$*, cuyos elementos son llamados* ***C****-morfismos de* A *a* B *(la afirmación "*$f \in \hom(A, B)$*" es expresada graficamente mediante el uso de flechas, así: "*$f : A \to B$ *es un* $morfismo$*").*
3. *Para cada* ***C****-objeto* A*, existe un morfismo* $id_A : A \to A$*, llamado la* A*-identidad en* ***C****.*
4. *Una ley de composición asociando a cada* ***C****-morfismo* $f : A \to B$ *y cada* ***C****-morfismo* $g : B \to C$ *un* ***C****-morfismo* $g \circ f : A \to C$*,llamado la compuesta de* f *y* g*, la cual satisface las siguientes condiciones:*
   (a) *La composición es asociativa; es decir para morfismos* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$*, y* $h : C \to D$*, la ecuación*
   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
   se tiene.
   (b) ***C****-identidades actuan como identidades con respecto a la composición; es decir, para un* ***C****-morfismo* $f : A \to B$*,se tiene* $id_B \circ f = f$ *y* $f \circ id_A = f$*.*
   (c) *Los conjuntos* $hom_C(A, B)$ *son disyuntos dos a dos.*

[1] La definición de categoría fue tomada de [9]

Notation 2. *Si* $C = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$ *es una categoría entonces:*

(1) La clase O de C-objetos se notará usualmente por Ob(C).

(2) La clase de todos los C-morfismos es decir la unión de todos los conjuntos hom(A,B) en C se notará por Mor(C).

Definition 3. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son categorías, entonces un Funtor*[2] F *de* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *es una función que asigna a cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A *un* $\boldsymbol{B}$*-objeto* $F(A)$ *y a cada* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $f : A \to A'$ *un* $\boldsymbol{B}$*-morfismo* $F(f) : F(A) \to F(A')$ *en tal forma que:*

(1)F *preserva composición; es decir* $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ *siempre que* $f \circ g$ *esté definida y*

(2)F *preserva morfismos identidad; es decir,* $F(id_A) = id_{FA}$*, para cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A*.*

Definition 4. *Sean* $F, G : A \to B$ *funtores. Una transformación natural* η *de* F *a* G *(denotada por* $\eta : F \to G$*) es una función que asigna a cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A *un* $\boldsymbol{B}$*-morfismo* $\eta A : FA \to GA$ *en tal forma que la siguiente condición de naturalidad se tiene: Para cada A-morfismo* $f : A \to A'$*,el cuadrado*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(A') & \xrightarrow[\eta A']{} & G(A') \end{array}$$

es conmutativo.

Definition 5. *Una mónada*[3] *en una categoría* C *es una tripla* $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$*, que consiste de un funtor* $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *y unas transformaciones naturales*

$$\eta : id_{\mathbf{C}} \to T \quad y \quad \mu : T^2 \to T$$

tales que para cada $A \in Ob(\mathbf{C})$ *los diagramas*

$$\begin{array}{ccc} T^3(A) & \xrightarrow{T\mu A} & T^2(A) \\ {\scriptstyle \mu T(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu A} \\ T^2(A) & \xrightarrow[\mu A]{} & T(A) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} T(A) & \xrightarrow{\eta T(A)} & T^2(A) & \xleftarrow{T\eta A} & T(A) \\ & {\scriptstyle id_{T(A)}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu A} & \swarrow{\scriptstyle id_{T(A)}} & \\ & & T(A) & & \end{array}$$

conmutan.

[2]Las definiciones de funtor y transformación natural fueron tomadas de [9]

[3]La definición de mónada fue tomada de [9]

Definition 6. *Una monada (T, η, μ) en la categoría* $\mathbf{C}$ *es llamada proyectiva*[4] *si existe una transformación natural (proyección)* $\pi : T \to Id_C$ *tal que*

$$\pi \circ \eta = id \quad y \quad \pi \circ \pi T = \pi \circ \mu$$

Example 7. *Consideremos el endofuntor $(-)^n$ en la categoría* ***Comp*** *donde $(-)^n(X) = X^n$ y $(-)^n(f) = f^n$ están definidos de la manera usual y las transformaciones naturales $\eta : id_{\mathbf{Comp}} \to (-)^n$ y $\mu : (-)^{n \times n} \to (-)^n$ cuyas componentes son definidas para cada X en Ob(**Comp**) por $\eta X : X \to X^n$ donde*

$$\eta X(x) = (x, ..., x)$$

y $\mu : X^{n \times n} \to X^n$ donde

$$\mu X\left[((x_{11}, ..., x_{1n}), ..., (x_{n1}, ..., x_{nn}))\right] = (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}).$$

La terna $((-)^n, \eta, \mu)$ es una mónada en ***Comp*** *[2]. Veamos que esta mónada es proyectiva: Consideremos la transformación natural $\pi : (-)^n \to id_{\mathbf{Comp}}$ cuyas componentes naturales $\pi X : X^n \to X$ están definidas para cada $X \in Ob(\mathbf{Comp})$ por $\pi((x_1, ..., x_n)) = x_1$. Verifiquemos que*

$$\pi \circ \eta = id \quad y \quad \pi \circ \pi(-)^n = \pi \circ \mu :$$

Sea $X \in Ob(\mathbf{Comp})$ y $x \in X$.

$$\begin{aligned}[\pi \circ \eta]X(x) &= \pi(\eta X(x)) \\ &= \pi((x, ..., x)) \\ &= x\end{aligned}$$

luego $\pi \circ \eta = id$

Sea $\mathbf{x} = ((x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}), ..., (x_{n1}, x_{n2}..., x_{nn})) \in X^{n \times n}$

$$\begin{aligned}[\pi \circ \pi(-)^n]X(\mathbf{x}) &= [\pi(\pi(-)^n(X)](\mathbf{x}) \\ &= [\pi(\pi X^n)](\mathbf{x}) \\ &= \pi(\pi X^n(\mathbf{x})) \\ &= \pi((x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n})) \\ &= x_{11}\end{aligned}$$

de otra parte

$$\begin{aligned}[\pi \circ \mu X](\mathbf{x}) &= \pi(\mu X(\mathbf{x})) \\ &= (x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}) \\ &= x_{11}\end{aligned}$$

Así $\pi \circ \pi(-)^n = \pi \circ \mu$

[4]La definición de mónada proyectiva fue tomada de [2]

Bibliografía

[1] ADÁMEK, J., *Theory of Mathematical Structures.* D. Reidel Publishing Company (1983), Dordrecht. (1993).

[2] ADÁMEK., et alt. *Abstract and concrete categories.* John Wiley & Sons, Inc. 1990.

[3] ARBIB, M., MANES, E., *Arrows, Structures, and Functors.* Academic Press, I.N.C. (1975).

[4] BANAKH, T. BESSAGA, C., *On linear operator extending pseudometrics.* // Bull PIN. Math 48 (2000), 35 - 49.

[5] EILENBERG, S.; MOORE, J., *Adjoint functors and triples.* ILL J, Math, G (1965), 381-389.

[6] ENGELKING, R., *Outline of general topology.* North - Holland publishing company, 1968.

[7] HARTMAN, S.; MYCIELSKI, J., *On the imbeddings of topological groups into conneted topological groups Colloq Math 5 (1958).* 167-169.

[8] MAC LANE, S., *Categories for the Working Mathematician.* 2^a edición, Springer Verlag, N.Y. (1970)

[9] PAREIGIS, B., *Categories and functors.* Academic Press, N.Y. (1970).

[10] RADUL, T., *A Normal Functor Based on the Hartman-Mycielski Construction* [preprint]

[11] RADUL, T., *On strongly Lawson and I-Lawson monads.* Boletín de Matemáticas (to appear).

[12] RADUL, T., *Sobre mónadas de Lawson APCS (to appear).*

[13] RADUL, T.; ZARICHNYI, M., *Mónada in the category of compacta.* Uspekhi Mat, Nauk 50 (1995), 83 -108 (in Russian) TMS Translations.

[14] TELEIKO, A.; ZARICHNYI, M., *Categorical topology of compact Hausdorff spaces.* 1999, VNTL Publ. Lviv.

[15] VINAREK, J., *Proyective Monads and extensions of functors.* Math. Centr, Afde ling 1983.