Área de la n-estrella

Gustavo Yanes
Profesor U.E. "Prof.Boris Bossio Vivas"
San Antonio de Los Altos, Venezuela
gustavo_yanes@hotmail.com

Resumen

En la propuesta se desarrolla una aplicación útil para generar n-estrellas desde dos (02) puntas en adelante. Se introduce una serie de fórmulas para el cálculo del área respectiva y se utilizan fórmulas del n-polígono regular propuestas en el XIV Encuentro, en la deducción de las del área de la n-estrella.

Introducción

En esta propuesta trataré un tema que, a mi parecer, presenta algunos aspectos interesantes poco estudiados; por cuanto para obtener estrellas a partir de polígonos regulares sólo se suelen utilizar la rotación de polígonos y la unión de vértices. Con estos procedimientos se obtienen las llamados estrellas y los polígonos estrellados; con la serie de limitaciones conocidas. En este trabajo no haremos ninguna diferenciación entre tales polígonos, por lo que todas esas figuras se agruparán bajo la siguiente denominación general: Estrellas Planas

Introduciremos una nueva aplicación que denominaremos Contracción Punto a Punto (o contracción pap) para generar, un conjunto infinito de estrellas semejantes a partir del polígono regular, incluyendo estrellas de dos, y de tres, puntas que son imposibles de obtener mediante los procedimientos arriba señalados. También usaremos las fórmulas del polígono regular propuestas en el XIV Encuentro, para deducir algunas fórmulas que permitan obtener las dimensiones de los diferentes elementos básicos que definiremos en la estrella.

Por razones de brevedad, en este trabajo nos referiremos básicamente a las figuras que cualquier persona común asociaría con las estrellas; es decir: aquellos polígonos con un número par de vértices que se sitúan alternativamente en dos grupos bien definidos; uno conformado las puntas y otro por los vértices más cercanos al centro (bajos).

Contracción punto a punto (Contracción pap)

Definición. *Sean O y A dos puntos del plano, sea $d(O, A)$ la distancia entre los puntos O y A y sea λ un n´pumero real cualquiera.*

La contracción pap aplicada sobre punto A con centro en O y factor λ, convierte al punto A en un punto A' de manera que:

1. *O, A y A' son colineales.*

2. $d(O, A') = \lambda d(O, A)$

3. *Si* $\lambda > 0 : A$ *y* A' *se encontrarán en la misma semirrecta respecto a* O.

4. *Si* $\lambda < 0 : A$ *y* A' *se encuentran en semirrectas opuestas respecto a* O.

De lo anterior se desprende lo siguiente:

5. *Si* $\lambda = 1 : A$ *y* A' *coinciden.*

6. *Si* $\lambda = 0 : O$ *y* A' *coinciden*

7. *Si* $\lambda = -1 : A'$ *es simétrica a* A *respecto al punto* O.

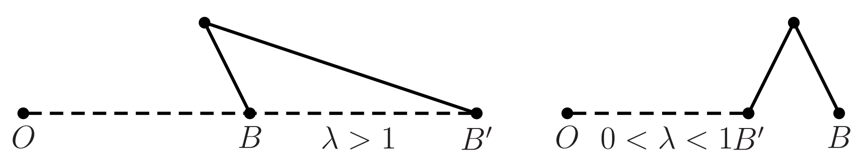
8. *Si* $\lambda > 1 : A$ *se encontrará entre* O *y* A'.

9. *Si* $0 < \lambda < 1 : A'$ *se encontrará entre* O *y* A.

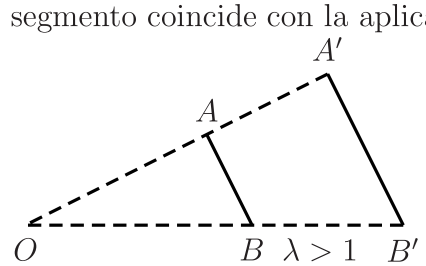
Al número real λ *se le denomina: factor de contracción. Al punto* A' *se le denomina: transformado de* A *según la contracción pap de factor* λ *y centro* O.

Contracción pap aplicada a uno o más puntos de un segmento dado

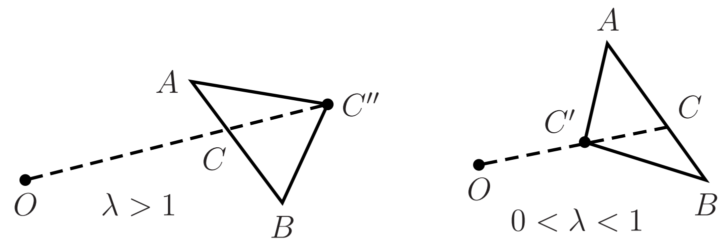
Sean el segmento AB y el punto O del plano. Una contracción pap, con factor λ, aplicada sobre el extremo B convierte al segmento dado en el segmento AB' de tal forma que B' es el transformado de B según la contraccion pap, de factor λ y centro O. Como se observa en la ilustración el punto A permanece inalterado.



Una contracción pap con centro en O y factor λ, aplicada simultáneamente sobre ambos extremos de un segmento dado del AB del plano, transforma a este últimoe en el segmento $A'B'$ donde A' y B' son los transformados de A y B, respectivamente, según la contracción pap, de factor λ y centro O. Como podrá observarse el efecto es el mismo que se obtiene aplicando la conocida Contracción al Punto (Homotecia). Una contracción pap aplicada sobre todos los puntos de un segmento coincide con la aplicada sobre los extremos.

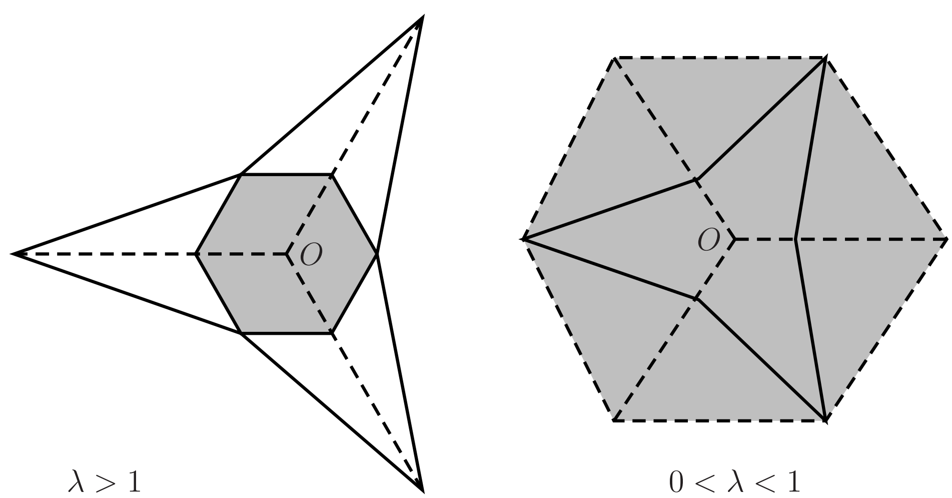


Una contracción pap aplicada sobre un punto interior cualquiera C, de un segmento AB (C es diferente de A y de B), con centro en O y fator λ, convierte al segmento en una quebrada $AC'B$, donde C' es el transformado de C según la contracción pap de centro O y factor λ.



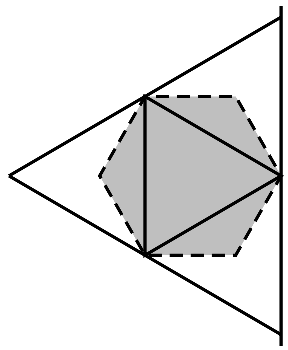
n-estrellas generadas mediante contracción pap

Para generar estrellas de n-puntas partiremos de un polígono regular de $2n$ lados, que como se sabe posee también $2n$ vértices. Se toma el centro del polígono como centro de la contracción pap aplicada sobre n vértices del polígono regulartomados alternativamente uno por medio.



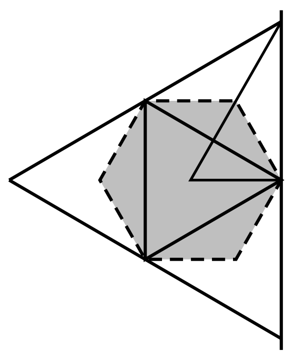
En las ilustraciones anteriores pueden observarse 3-estrellas generadas por hexágonos regulares a los que se les han aplicado contracciones pap con centro en O, sobre tres vértices tomados alternadamente y con factores de contracción $\lambda > 1$ y $0 < \lambda < 1$, respectivamente.

No toda contracción, aplicada sobre vertices alternos de un $2n$-polígono regular, con centro en el del polígono, genera una estrella. Existe un rango de factores λ que no genera estrellas.



Tomemos cualquier $2n$-polígono regular ($n > 2$) y unamos los vértices dejando uno por medio; de esta manera obtendremos un n-polígono regular interior al original dado. Tracemos paralelas a los lados del n-polígono trazado previamente, por los respectivos vertices opuestos, como se ve en la ilustración. Ahora el $2n$-polígono regular está encerrado entre dos n-polígonos regulares que denominaremos: generatriz, interior y exterior, en el orden que fueron trazados.

Del trazado se obtiene lo siguiente:



1. El centro es común a los tres polígonos.
2. Entre el centro y cada vértice del exterior existe un lado del interior perpendicular al segmento que une los dos puntos señalados (radio del exterior)..
3. Cada radio del exterior corta a un lado del interior en su punto medio.
4. El radio del generatriz es igual al radio del interior.
5. El radio del generatriz coincide con la apotema del exterior.
6. El interior y el exterior son polígonos semejantes.

Tanto el n-polígono interior como el exterior pueden obtenerse mediante la aplicación de una contracción pap sobre n-vértices del $2n$-polígono regular, con centro en el del $2n$-polígono y factores de contracción $0 < k < 1$ y $k' > 1$ que corresponden al interior y al exterior, respectivamente.

No resulta difícil observar que cualquier contracción pap aplicada sobre los mismos puntos, con el mismo centro y con factor de contracción λ con $k < \lambda < k'$ no generará el tipo de estrellas que trataremos en este trabajo. Las estrellas aparecerán siempre que $\lambda < k$ ó $\lambda > k'$. Es decir: partiendo del $2n$-polígono regular el intervalo de factores de contracción $[k, k']$ no genera estrellas. Determinemos el intervalo: Sean

R el radio del n-polígono regular exterior
A la apotema del n-polígono exterior
R el radio del n-polígono regular interior a la apotema del n-polígono interior.

Como los dos n-polígonos son semejantes se tiene $\dfrac{R}{A} = \dfrac{r}{a}$ Y como $A = r$

$$\frac{R}{r} = \frac{r}{a}$$

La razón R/r es igual a k', ya que al aplicar una contracción pap sobre los n vértices del $2n$-polígono regular, tomados alternativamente, con centro en el del $2n$-polígono con factor R/r, se obtiene el n-polígono regular exterior.

La razón a/r es igual a k, ya que al aplicar una contracción pap sobre los n vértices del $2n$-polígono regular, tomados alternativamente, con centro en el del $2n$-polígono con factor a/r, se obtiene el n-polígono regular interior.

Expresando r en función de a en el n-polígono regular interior se tiene: $r^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + a^2$

Donde r es el radio, l el lado y a la apotema.

De las fórmulas para el área del polígono regular (ver Memorias del XIV Encuentro)

$$A_n = k_n a^2 \quad \text{y} \quad A_n = \frac{n^2 l^2}{4k_n}$$

Igualando se tiene $k_n a^2 = \dfrac{n^2 l^2}{4k_n}$

De donde $\dfrac{l^2}{4} = \dfrac{k_n^2 a^2}{n^2} \Rightarrow \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{k_n^2 a^2}{n^2}$

Y sustituyendo en la fórmula de del radio

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow r^2 = \frac{k_n^2 a^2}{n^2} + a^2 \Rightarrow r^2 = a^2\left(\frac{k_n^2}{n^2} + 1\right)$$

Para obtener $k' = r/a$ hacemos

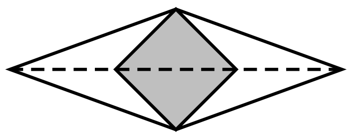
$$\frac{r^2}{a^2} = \left(\frac{kn}{n}\right)^2 + 1 \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{\left(\frac{kn}{n}\right)^2 + 1}$$

Y como $k_n = n\tan(180°/n)$ se tiene $k' = \sqrt{\left(\dfrac{kn}{n}\right)^2 + 1} \Rightarrow k' = \sqrt{\tan^2(180°/n) + 1}$.

Luego $k' = \sqrt{\tan^2(180°/n) + 1} = \sqrt{\sec^2(180°/n)} = \sec^2(180°/n)$.

Finalmente $k = 1/k' = \cos(180°/n)$.

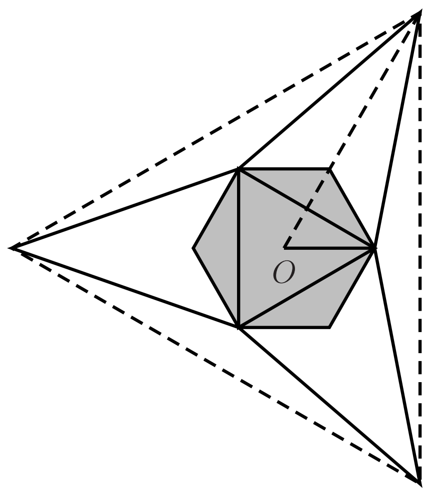
De donde el intervalo de factores de contracción que no generan estrellas a partir de un $2n$-polígono regular es $[\cos(180°/n), \sec(180°/n)]$, $n > 2$. En el caso de la 2-estrella, esta se genera con cualquier factor de contracción positivo diferente de a unidad.



El rombo es la estrella de dos puntas (2-estrella) generada por la contracción pap aplicada sobre dos vértices opuestos y desde el centro del cuadrado. Cualquier factor de contracción λ diferente de 1 generará la 2-estrella.

Elementos de la n-estrella

En toda n-estrella encontraremos los siguientes elementos básicos.:



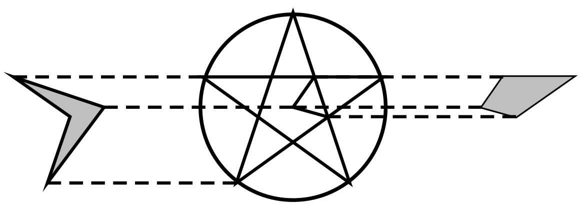
1. CENTRO (C): Coincide cn el centro del $2n$-polígono generatriz.
2. PUNTAS (P): Son los vértices de la estrella más alejados del centro.
3. NUMERO DE PUNTAS (n).
4. BAJOS (B) Son los vértices de la n-estrella más cercanos al centro. El número de bajos también es n.
5. DISTANCIA ENTRE PUNTAS (D): Distancia entre dos puntas consecutivas.
6. DISTANCIA ENTRE BAJOS (d): Ditancia entra dos bajos consecutivos.
7. RADIO MAYOR (R): es la distancia del centro a cualquiera de las puntas.
8. RADIO MENOR (r): es la distancia entre el centro y cualquiera de los bajos.
9. HENDIDURA (H): Distancia de un bajo al segmento que une las dos puntas que le son adyacentes.
10. LADO (l): Segmento que une una punta con un bajo adyacente.

En lo sucesivo, si no se presta a confusión, las letras que denotan las distancias también se utilizarán para denotar los segmentos correspondientes.

En la n-estrella se pueden diferenciar las siguientes figuras:

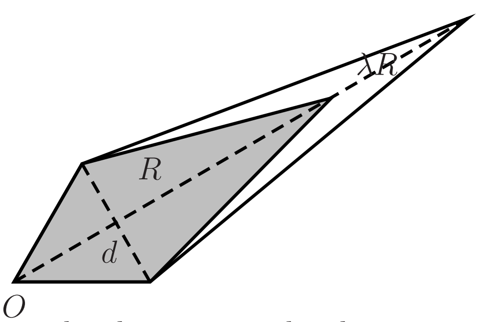
1. GENERATRIZ: $2n$-polígono regular que genera la n-estrella.
2. NÜCLEO: n-polígono regular definido por los bajos.
3. CERCO: n-polígono regular definido por las puntas.
4. ROMBOIDES IGUALES: Romboides definidos por el centro, dos bajos consecutivos y la punta entre ellos. La n-estrella está formada por n romboides iguales.
5. CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS IGUALES: cuadriláteros cóncavos definidos por el centro, dos puntas consecutivas y el bajo entre ellas. La n-estrella está formada por n cuadriláteros cóncavos iguales.

En la ilustración se pueden observar un cuadrilátero cóncavo y un romboide construidos en concordancia con lo establecido en los apartes anteriores. Por cuanto la figura es una 5-estrella, estará formada por cinco cuadriláteros cóncavos y, a la vez, por cinco romboides.

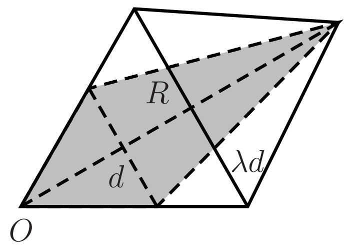


Contracción pap aplicada a una n-estrella dada

Al aplicar una contracción pap de factor λ desde el centro de la n-estrella sobre sus puntas (o sus bajos), el área variará proporcionalmente al factor aplicado. Para ello bastará observar lo que sucede en cada uno de los n romboides que la forman.



Al aplicar la contracción pap sobre las puntas, el radio mayor (R) se transformará en λR. El área del romboide original es $Rd/2$ y el del transformado es $(\lambda R)d/2 = \lambda(Rd/2)$. En la n-estrella el área será igual a n veces el área del romboide; por lo que el área de la n-estrella dada será $nRd/2$ y la de la transformada $n\lambda(Rd/2) = \lambda(nRd/2)$; es decir la variación del área es directamente proporcional al factor de contracción.



Al aplicar la contracción pap sobre los bajos, la distancia entre ellos (d) se multiplicará por el factor de contracción λ y se transformará en λd. El área del romboide original es $Rd/2$ y el del transformado es $R(\lambda d)/2 = \lambda(Rd/2)$. El área de la n-estrella dada es $nRd/2$ y la de la transformada $n\lambda(Rd/2) = \lambda(nRd/2)$; es decir la variación del área es directamente proporcional al factor de contracción.

Si la contracción pap se aplica sobre las puntas y los bajos, en forma simultánea (una contracción) o consecutivamente (dos contracciones), el área de la n-estrella se incrementará en proporción al producto de los factores aplicados. Particularmente si se realiza con el mismo factor, el área variará proporcionalmente al cuadrado del factor aplicado; en este caso, el efecto sobre el área es el mismo efecto de la Homotecia. También es equivalente a las contracciones de dos haces paralelos, perpendiculares entre si, trazados respecto a la n-estrella aplicadas con un mismo factor de contracción λ (ver Contracción del Haz Paralelo en Memorias del XV Encuentro).

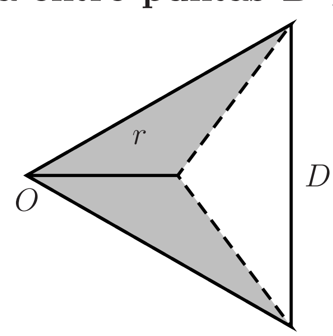
Fórmulas para el área de la n-estrella

En el desarrollo de este aparte se considerará que el número de puntas de la n-estrella es un dato necesario. Este dato se acompañará con dos distancias tomadas convenientemente a fin de obtener la fórmula correspondiente. La notación En indicará el área de la n-estrella, o estrella de n-puntas.

Fórmula del radio mayor R y la distancia entre bajos d

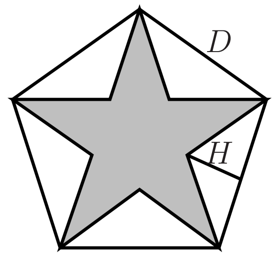
Esta fórmula ya fue considerada en el aparte anterior. Se obtiene de la sumatoria de los n romboides iguales que forman la n-estrella. La fórmula se expresará así: En $= nRd/2$.

Fórmula de la distancia entre puntas D y el radio menor r



Tomemos uno de los cuadriláteros cóncavos que forman la n-estrella. El radio menor r es el diagonal interior y la distancia entre puntas D es el diagonal exterior. Por construcción esas digonales son perpendiculares entre sí; luego, el área de uno de los cuadriláteros es $rD/2$. Para obtener el área de la n-estrella bastará sumar las n áreas de los cuadriláteros concavos iguales :En $= nrD/2$.

Fórmula de la distancia entre puntas *D* y la hendidura *H*



Como podrá observarse, el área de la n-estrella se puede obtener a partir del área del cerco (ver elementos arriba), restándole n veces el área del triángulo de base D y altura H. De las fórmulas del polígono regular del triángulo se tiene:

$$En = \frac{n^2D^2}{4k_n} - \frac{nDH}{2}$$

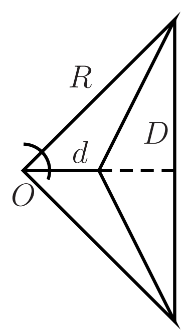
Donde kn es la constante de semiproporcionalidad del n-polígono regular. (ver Memorias del XIV Encuentro).

Como $k_n = n\tan(180°/n)$, la fórmula anterior se puede reescribir para obtener su equivalente trigonométrica:

$$En = \frac{n^2D^2}{4k_n} - \frac{nDH}{2} = \frac{nD}{2}\left(\frac{D}{2\tan(180°/n)} - H\right)$$

Estas fórmulas no aplican para la 2-estrella.

Fórmula de la distancia entre puntas *D* y la distancia entre bajos *d*



Expresemos R en función de D. Para ello tomaremos uno de los cuadriláteros cóncavos iguales que conforman la n-estrella.

El ángulo señalado es el semiángulo del cerco por lo que su medida es $180°/n$.

La cosecante es $\csc(180°/n) = \dfrac{2R}{D}$

Despejando R

$$R = \frac{D\csc(180°/n)}{2}$$

Con lo que queda expresado R en función de D.

Sustituyendo R en la fórmula $En = \dfrac{ndR}{2}$

se tiene

$$En = \frac{ndR}{2}\,\frac{D\csc(180°/n)}{2} = \frac{ndD\csc(180°/n)}{4}$$

La fómula anterior es la versión trigonométrica del área de la n-estrella.

Si escribimos la cosecante en función de la cotangente:

$$\csc(180°/n) = \sqrt{1+\cot^2(180°/n)}$$

La cotangente en función de la tangente:

$$\csc(180°/n) = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(180°/n)}}$$

Y multiplicamos la fracción por n^2/n^2 :

$$\csc(180°/n) = \sqrt{1+\frac{n^2}{n^2\tan^2(180°/n)}}$$

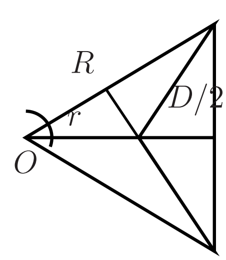
Como $n\tan(180°/n) = k_n$:

$$\csc(180°/n) = \sqrt{1+\left(\frac{n}{k_n}\right)^2}$$

Podemos reescribir la fórmula trigonométrica y obtener la aritmética:

$$En = \frac{ndD}{4}\sqrt{1+\left(\frac{n}{k_n}\right)^2}$$

Fórmula del radio mayor R y el radio menor r



Expresamos $D/2$ en función de R:

$$\frac{D}{2} = \frac{R}{\csc(180^\circ/n)}$$

Y lo sustituimos en la fórmula de la distancia entre puntas y la distancia entre bajos, para obtener la fórmula trigonométrica:

$$En = \frac{nDr}{2} = \frac{nrR}{\csc(180^\circ/n)}$$

Como

$$\csc(180^\circ/n) = \sqrt{1+\cot^2(180^\circ/n)} = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(180^\circ/n)}}$$

Podemos multiplicar la última fracción por n^2/n^2 y obtener:

$$\csc(180^\circ/n) = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(180^\circ/n)}} = \sqrt{1+\frac{n^2}{n^2\tan^2(180^\circ/n)}}$$

Como $k_n = n\tan(180^\circ/n)$ se tiene:

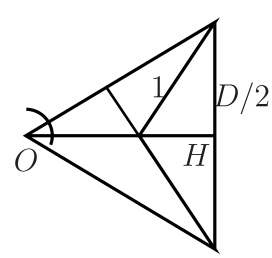
$$\csc(180^\circ/n) = \sqrt{1+\left(\frac{n}{k_n}\right)^2}$$

Que al sustituirlo en la cuación trigonométrica resulta la ecuación aritmética

$$En = \frac{nrR}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{k_n}\right)^2}}$$

Donde k_n es la constante de semiproporcionalidad del n-polígono regular.

Fórmula del lado *l* y la hendidura *H*



Expresando D en función de l y H.

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = l^2 - H^2 \Rightarrow D^2 = 4(l^2-H^2) \Rightarrow D = 2\sqrt{l^2-H^2}$$

Y sustituyendo D en la fórmula

$$En = \frac{n^2D^2}{4k_n} - \frac{nDH}{2}$$

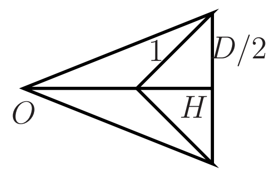
Se tiene

$$En = \frac{n^2 4(l^2 - H^2)}{4k_n} - \frac{n2\sqrt{l^2 - H^2}H}{2}$$

luego

$$En = \frac{n^2(l^2 - H^2)}{k_n} - nH\sqrt{l^2 - H^2}$$

Fórmula del lado l y la distancia entre puntas D



Expresamos H en función de l y D.

$$H^2 = l^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow = H = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - D^2}$$

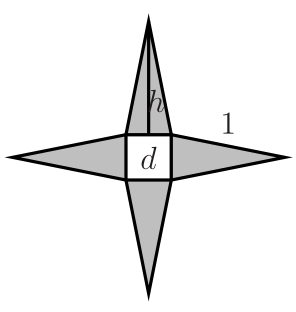
Al sustituir H en la fórmula

$$En = \frac{n^2D^2}{4k_n} - \frac{nDH}{2}$$

Queda

$$En = \frac{n^2D^2}{4k_n} - \frac{nD}{4}\sqrt{4l^2 - D^2}$$

Fórmula del lado l y la distancia entre bajos d



El área de la n-estrella es igual a la suma del área del núcleo más la de los n triángulos isósceles que se levantan sobre sus lados. Expresando la altura de los triángulos h en función del lado l y la distancia entre bajos se tiene:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Y el área de cada triángulo

$$\frac{dh}{2} = \frac{d}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

El área de los n-triángulos se puede expresar:

$$\frac{ndh}{2} = \frac{nd}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{nd}{4}\sqrt{4l^2 - d^2}$$

Como el área del núcleo es

$$A_n = \frac{n^2 d^2}{4k_n}$$

La fórmula buscada será:

$$A_n = \frac{n^2 d^2}{4k_n} + \frac{nd}{4}\sqrt{4l^2 - d^2}$$

Puede ser posible la ampliación del número de fórmulas, tomando en cuenta otros de los elementos definidos en la n-estrella; como también de otros por definir. A los fines de esta propuesta se considera suficiente con las fórmulas propuestas.

Conclusiones

La generación de n-estrellas mediante la contracción pap aplicada sobre n vértices de un $2n$-polígono regular, tomados en forma alterna, resulta útil frente a los procedimientos usuales por cuanto es posible generar estrellas desde dos puntas en adelante así como que cada $2n$-polígono regular es capaz de generar infinitas n-estrellas semejantes. Las fórmulas del área de la n-estrella se ven incrementadas al incorporar las del polígono regular propuestas en el XIV Encuentro; lo que significa una nueva utilidad de estas últimas. Lo desarrollado no agota el tema; como propuesta que es, queda en manos de quienes deseen profundizar más en el mismo.

Bibliografía

Para el desarrollo del contenido se consultaron los artículos bajo la denominación de Polígonos Estrellados, publicados en la red Internet en la página Gacetilla Matemática y la página del Ministerio de Educación de España (Proyecto Descartes). Igualmente se consultaron las propuestas del autor sobre fórmulas del área de los polígonos regulares y contracción del haz paralelo propuestas en el XIV y XV encuentros de Geometría y Aritmética.