

RAZÓN Y PROPORCIÓN: UN ANÁLISIS DESDE LOS PROCESOS DE UNITIZACIÓN Y FORMACIÓN (PROBLEMA DE LAS PIZZAS)

Deisy Delgado Monroy

Estudiante Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá D.C, Colombia

deisjo@hotmail.com

Luis fernando Olaya

Estudiante Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá D.C, Colombia

luisferolaya@yahoo.ar

Mónica Velásquez Gómez

Estudiante Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá D.C, Colombia

monivez@yahoo.es

En esta comunicación se dará a conocer algunos de los resultados parciales obtenidos en la investigación¹ que realizan los autores sobre las estrategias informales que utilizan estudiantes de sexto grado cuando resuelven problemas de razón y proporción². Para identificar y analizar las estrategias usadas por estudiantes de sexto grado de dos instituciones educativas distritales, de la ciudad de Bogotá, se les propone cinco actividades que involucran nociones sobre razón y proporción planteados por Lamon (1994). Respecto de los grupos seleccionados, el primero de ellos (grupo A) no recibió una instrucción formal en razón y proporción en la clase de matemáticas; mientras que el segundo (grupo B) sí la obtuvo.

Inicialmente se presenta una síntesis de las estrategias utilizadas por los niños en el desarrollo de las actividades propuestas, en las cuales se evidencia procesos de identificación y formación de diversos tipos de unidades; para realizar un análisis de estos procesos se acude a los planteamientos de Lamon, quien propone niveles aparentes de complejidad creciente.

Problema de las niñas, los niños y las pizzas

Considera el siguiente dibujo que relaciona niñas y niños con cantidad de pizzas que comió cada grupo:

¹Proyecto de trabajo de grado en desarrollo, programa de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, bajo la dirección de los profesores Pedro Javier Rojas y Eugenia Castillo.

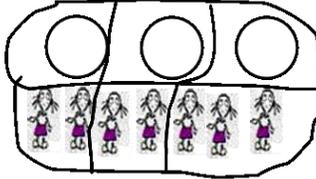
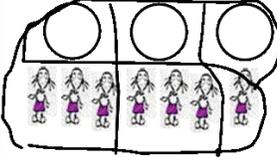
²En este escrito se asumirá que las estrategias informales usadas por los niños en este tipo de problemas, son aquellas estrategias que son inventadas por el niño, que generalmente se apoyan en el conteo y no suelen ser abordadas en la enseñanza escolar.



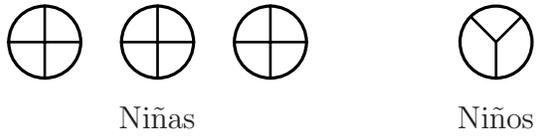
¿Quién comió más pizza, las niñas o los niños?

De 34 estudiantes del grupo A, 22 dan utilizan estrategias no exitosas en las que no se evidencia, procesos de construcción de unidades compuestas. En el cuadro presentado a continuación se describen cuatro estrategias propuestas por dieciséis estudiantes:

Nº	ESTRATEGIA (RESPUESTAS ENCONTRADAS)	Nº Est.	DESCRIPCIÓN
1	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  Siete niñas </div> <div style="text-align: center;">  Tres niños </div> </div> <p>Las niñas porque ellas son mas y tienen tres pizzas en cambio los niños son tres y tienen una pizza y ellos comieron más que las niñas</p>	6	Aunque en el gráfico realiza divisiones o agrupa las niñas con alguna pizza al momento de dar su respuesta parece no tomar en cuenta lo realizado
2	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  Siete niñas </div> <div style="text-align: center;">  Tres niños </div> </div> <p>Entonces las niñas 2 grupos comen cada una media pizza y de 3 comen de a una cantidad mínima Mientras que los niños comen menos de la mitad por ser mas personas Las niñas comen mas que los niños</p>	4	Relaciona 2 grupos de 2 niñas por una pizza (media pizza para cada una) y un grupo de tres niñas con una pizza (un pedazo mas pequeño que la mitad para cada una) y argumenta diciendo que los niños comen menos porque son un grupo de tres con una pizza.

<p>3</p>	 <p>Las niñas comen mas porque por ejemplo hay los niños se comen 1 en cambio de a 2 niñas comen 1 y comen mas las niñas</p>	<p>3</p> <p>Relaciona 2 grupos de 2 niñas por una pizza y un grupo de tres niñas con una pizza (sin realizar divisiones) y argumenta diciendo que las niñas comen más porque dos grupos de dos niñas se comen de a una pizza.</p>
<p>4</p>	 <p>Si 3 niñas se comen una pizza entonces tres niñas se comen una otras otra sobra ella no se puede comer toda pizza sobra una niña y una pizza y así las niñas siguen siendo las que comen mas.</p>	<p>3</p> <p>Realiza agrupaciones, haciendo corresponder a tres niñas una pizza utilizando la relación dada en el cuadro de los niños. Basando su argumento en que la niña que queda sola no se puede comer la pizza gella sola y por esto comen más.</p>

De 45 estudiantes del grupo B 22 realizan estrategias en las que no se evidencia procesos de construcción de unidades compuestas. A continuación se presenta un cuadro con cuatro estrategias propuestas por 35 estudiantes:

Nº	ESTRATEGIA (RESPUESTAS ENCONTRADAS)	Nº Est.	DESCRIPCIÓN
<p>5</p>	 <p>Entre más cantidad de niños o niñas menos pizza se come porque los pedazos para cada uno son mas pequeños. Comen mas pizza los niños porque se divide en 3 pedazos la pizza y quedan más grandes.</p>	<p>9</p>	<p>Divide las pizzas de las niñas en 4 partes y la de los niños en 3 partes y luego compara los tamaños de cada porción y a partir de esto justifica su respuesta.</p>

6	 <p style="text-align: center;">Niñas Niños</p> <p>Las niñas comen más ya que si dividimos las pizzas en mitades o el número de niños lo multiplicamos y dividimos la pizza en esos pedazos todas las niñas comen 14 rebanadas y los niños 6 pedazos de pizza. [las porciones de las niñas son más grandes]</p>	11	Realiza divisiones en las pizzas y luego compara la cantidad de porciones que le corresponden a cada grupo sin tener en cuenta el tamaño de estas porciones.
7	 <p style="text-align: center;">7 Niñas</p> <p>Las niñas fueron las que comieron mas pizza porque hay un grupo de 3 que come una pizza, 2 de los otros 2 grupos de niñas comen de a 2 por una pizza. 3 niños comen solo una pizza.</p>	8	Trata de repartir equitativamente las pizzas tomando dos niñas por pizza, y para la ultima pizza le quedan tres niñas entonces la divide en tres
8	<p>Quien mas comió pizza fueron las niñas porque si 3 niños comen una pizza entonces en las niñas va igual 3 niñas una pizza, otras 3 niñas otra pizza y queda una niña que se come una pizza entera.</p>	7	Realiza agrupaciones valiéndose de la gráfica, teniendo como referencia la relación de los niños y las pizzas.

Como se planteó inicialmente, estas estrategias pueden ser analizadas desde los planteamientos de Lamon, quien centra su mirada en los procesos de *unitización* y *formación*, describiendo diferentes tipos de unidades utilizadas en dichas estrategias y estableciendo niveles aparentes de complejidad. Para la autora (p. 3) la *unitización* es el proceso de construir unidades de referencia (o unidad-todo) a partir de agrupamientos de diferente orden, que permite “ver simultáneamente los miembros agregados e individuales de un conjunto”, mientras que la *formación*³, es el proceso de “reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad fijada o estandarizada”

En estos procesos se evidencia el uso de diferentes tipos de unidades por parte de los estudiantes, relacionados con las estrategias utilizadas, que pueden ser asociadas con los esquemas multiplicativos descritos por Steffe (1990), quien asocia dichos esquemas con los tipos de unidades: *unidades simples* (aquellas unidades que en sí constituyen un todo o se componen de una sola “cosa”) y unidades compuestas (obtenidas al tomar la secuencia de item unitarios como una sola unidad que en si misma esta compuesta de unidades). Estas últimas unidades son clasificadas a su vez por la autora unidades com-

³Término que usa la autora acogiendo la denominación hecha por Freudenthal (1983)

puestas *experienciales*, que se forman tomando la implementación de un *patrón numérico*⁴ como una sola cosa, usando una operación de unir; unidades compuestas *abstractas* que se forman en un nivel de interiorización superior al que involucra el patrón numérico (una *re-presentación* es ya una operación abstracta y desprende al niño de su mundo sensoriomotriz); las *iterables*, que se forman al ser despojadas de su cualidad de compuestas (el niño encuentra una unidad repetitiva y encuentra cuantos elementos de esa unidad están en un gran número de unidades compuestas); y las *parte-todo* que se pueden desensajarse en partes numéricas de un todo numérico y usar las partes como material para operar posteriormente y reconstruir este resultado como el todo numérico.

Lamon (1994) en su análisis hace referencia a otro tipo de unidades: rata y razón; el término rata se asigna a la relación entre dos cantidades heterogéneas y el de razón a la relación entre dos cantidades homogéneas. Estos tipos de unidades diferencian dos tipos de estrategias las *intra* y las *entre*, en las primeras se comparan dos razones internas o dentro del espacio de medida y se usa la igualdad de los *operadores escalares*⁵ para determinar el término desconocido y en las segundas, se comparan dos razones externas o razones entre espacios de medida y se tienen en cuenta las relaciones funcionales entre los espacios de medida para encontrar el término desconocido. En la tabla son ubicados algunos de los procesos usados por los niños para construir sentido para razón y proporción, en contraposición a algunos de los procesos de unitización empleados en la primera infancia para adición y sustracción, así como aquellos usados por los niños cuando piensan acerca de multiplicación y división⁶.

La Complejidad Creciente en los Procesos de Unitización Revelada por el Pensamiento de los Niños en los Campos Conceptuales Aditivos y Multiplicativos			
	ADITIVO	MULTIPLICATIVO	RAZÓN
Modelando y contando △ △ △ △ △	Contando objetos: 1,2,3,4,5 Subitizando; La formación visual de unidades compuestas 5	Conteo segmentado: Formando composiciones experienciales ¿Cuántos de 3 hay en 12? 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	Conteo incitado por presentaciones pictóricas; formando razones experienciales.
Componiendo	Construyendo un número compuesto 5 6 7 8	Primer esquema multiplicativo: repetitivamente formando y contando tres unidades: 1-2-3 1 1-2-3 2 4x3 1-2-3 3 1-2-3 4	Repetitivamente haciendo coincidir y contando 3 unidades y 5 unidades 1-2-3 1-2-3-4-5 1 1-2-3 1-2-3-4-5 2 1-2-3 1-2-3-4-5 3

⁴Patrón numérico es una secuencia de ítems unitarios abstractos que contienen registros de los elementos de un patrón figurativo de conteo.

⁵el operador escalar que vincula las medidas en el primer espacio de medida, es el mismo operador que vincula las medidas en el segundo espacio de medida.

⁶Tomado de Razón y proporción: fundamentos cognoscitivos en unitización y normación. Susan J. Lamon (1994) (Traducido por Pedro Javier Rojas C. y Cecilia Barón P)

Abstrayendo	Construyendo un número compuesto abstracto: pensando en una unidad de 5 sin considerar sus unidades de 1 constituyentes.	Formando unidades iterables: 3 es desnudado de su cualidad compuesta: 3 es 1 6 es 2 doble conteo 9 es 3 12 es 4	Razones iterables: 6:10 y 9:15 representan la misma relación que 3:5
Relacionando	PPT: la unidad es un número compuesto cuyas partes son también compuestas.	PPT: la propiedad distributiva: 8 unidades de 4 pueden ser logradas por adición de 5 unidades de 4 y 3 unidades de 4; las partes son múltiplos de las mismas unidades compuestas.	PPT: un múltiplo de la unidad esta compuesta de múltiplos de diferentes unidades compuestas: $5(8\text{-unidades})=5(3\text{-de } 1 \text{ alcoba}) + 5(4\text{-de } 2 \text{ alcoba}) + 5(1\text{-de } 3 \text{ alcoba})$

En el nivel *modelando y contando* los estudiantes hacen uso de unidades compuestas experienciales, que desde la propuesta de Steffe (p.7) refiere al uso de un *esquema premultiplicativo*, por medio de un *patrón numérico*. En *componiendo* el estudiante hace uso de unidades compuestas abstractas por medio de un *esquema multiplicativo inicial* en el que coordina unidades en “representación actuada” (usando sus dedos, señas o tonos de voz diferenciados), tomando la multiplicación como una suma reiterada, es decir, identifica una unidad compuesta y después cuenta la cantidad de estas. En el nivel *abstrayendo* el estudiante hace uso de unidades compuestas iterables, uniendo un grupo de unidades compuestas en otra unidad compuesta formando una unidad de “unidades de unidades” en un *esquema de coordinación de unidades parte-todo*. En el nivel *relacionando* el estudiante utiliza unidades compuestas parte-todo al tomar su situación y los resultados como intercambiables simbolizando las operaciones involucradas en la coordinación de un *esquema reversible*.

Teniendo en cuenta los niveles aparentes de complejidad en los procesos de unitización y normación, se presenta el análisis de las anteriores estrategias en cada uno de los grupos:

Grupo A

1. Realiza particiones experienciales en la gráfica, trabajando sin tener en cuenta las unidades rata o razón, pero no se evidencia análisis de esto.
2. Estrategia de composición de unidades rata por medio de la representación pictórica. Unidades compuestas de tipo experiencial desde un patrón numérico 1:3 ó 1:2.

Nivel Modelando Y Contando Razón.

3. Estrategia entre en la que el estudiante norma a partir de la rata experiencial 1 pizza para dos niñas y luego compara unidades compuestas usando la operación de unir dos cantidades diferentes como una sola cosa.

Nivel Modelando Contando Razón

4. Realiza un proceso de normación a partir de unidades compuestas experienciales, donde dicha unidad es la rata niños pizzas. Unidades compuestas usando la operación de unir dos cantidades diferentes como una sola cosa.

Nivel Modelando Contando Razón

Grupo B:

5. y 6. Realiza particiones experienciales en la gráfica, trabajando sin tener en cuenta las unidades rata o razón, pero no se evidencia análisis de esto.

7. Estrategia de normación a partir de la rata experiencial 1 pizza para dos niñas y luego compara unidades compuestas usando la operación de unir dos cantidades diferentes como una sola cosa.

Nivel modelando contando razón

Al contrastar las estrategias de los estudiantes que recibieron instrucción formal y los que no se puede observar que en los dos grupos prevalecen las estrategias informales que parten de la reiteración de unidades compuestas tanto experienciales como abstractas, aunque los estudiantes que recibieron una instrucción formal buscan la forma de relacionar sus estrategias con los procedimientos formales enseñados por el profesor se evidencia que la enseñanza de la para la razón y la proporción en la escuela se distancia de estas estrategias informales que constituyen un conocimiento con el que los niños llegan a la escuela.

El análisis de los procesos de unitización y normación ofrecen una vía para la comprensión de la manera como los niños componen unidades variando en la complejidad de los mismos. Esto análisis permite plantear actividades de clase partiendo de las estrategias informales de los estudiantes como una opción de transito hacia estrategias formales.

Bibliografía

- [1] FREUDENTHAL., citado por Susan Lamon (1994), *Ratio and proportion: Cognitive foundations en unitizing y normingn.* 1983.
- [2] LAMON, S., *Ratio and proportion: Cognitive foundations en unitizing y normingn.* In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.89-121). NY. SUNY Press. (traducido por Pedro Javier Rojas y Cecilia Barón P.) 1994.
- [3] STEFFE, L., *The children's multiplicative eshemes.* In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* NY. SUNY Press. (traducido por Jaime Romero Cruz, grupo MESCUD).