"Sobre los cuerpos flotantes" de Arquimedes: una mirada experimental

Vianney Díaz Pérez
Estudiante Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
virodipe@yahoo.es

Héctor Becerra Galindo
Estudiante Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
hemabe2@yahoo.es

Cristhian Bello Rivera
Estudiante Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
cranberem@yahoo.es

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es presentar un análisis experimental al libro "Sobre los cuerpos Flotantes", enfatizando en el cómo Arquímedes presentó matemáticamente estos fenómenos físicos.

Para el análisis realizamos la presentación de los postulados y proposiciones, algunas de éstas con su respectiva demostración matemática[1]; también incluimos algunos comentarios y experimentaciones[2] en los que presentaremos algunas de nuestras ideas (entre ellas una clasificación a las proposiciones, a partir de los siguientes criterios: forma del fluido, gravedad específica del sólido, principio hidrostático y posición del objeto), que son el resultado del análisis mencionado.

Libro uno: sobre los cuerpos flotantes

Postulado 1.

Supongamos que un fluido es de tal carácter, que sus partes reposan de igual forma y siendo continuas, la parte que está menos empujada es conducida por la que está más empujada, y que cada una de sus partes es empujada por el fluido que está encima de ella en una dirección vertical, si el fluido está sumergido en cualquier sustancia y comprimida por algo más.

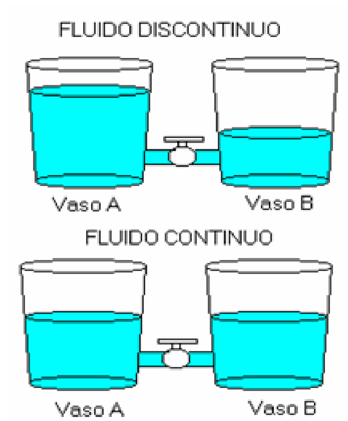
Comentario: En este primer postulado Arquímedes presenta una idea de gravedad, reposo y equilibrio, que se puede complementar con el libro "Sobre el equilibrio de los

[1] Los postulados, proposiciones y demostraciones son traducciones realizadas por nosotros, al Libro "The Works Of Archimedes"editado por Heath Thomas Little 1897.

[2] Las experimentaciones que consideramos pertinentes para éste trabajo se realizarán de forma concreta en la presentación.

planos"donde Arquímedes hace uso de estas palabras, aunque es posible que en su libro "Sobre los centros de gravedad"las haya definido[3].

Experimentación: El experimento que aquí se presenta, consiste en dos vasos, ambos unidos a través de una llave, (como se muestra en el dibujo 1) de tal forma que el vaso A tendrá más agua que el vaso B cuando la llave esté cerrada (de esta forma el fluido no será continuo), luego se abrirá la llave con el fin de hacerlo continuo, y allí se verá un ejemplo claro del postulado 1 en acción.



Dibujo 1.

Proposición 1.

Si una superficie es cortada por un plano que pasa a través de cierto punto y si la sección es siempre una circunferencia (de un círculo) y el centro es el punto mencionado, la superficie es de una esfera.

Demostración:

Pero si no, habrá dos líneas dibujadas desde el punto a la superficie las cuales son desiguales. Supongamos O es el punto fijo y A, B dos puntos sobre la superficie tal que las rectas OA y OB no son iguales. Ahora, la superficie es cortada por un plano que pasa a través de OA y OB. Luego por hipótesis, la sección es un circulo con centro O. De esta manera $OA = OB$ lo que contradice la suposición. Por lo tanto si la sección es siempre una circunferencia y el centro es el punto mencionado la superficie es de una esfera. $\square$

[3]Hernández Martín Maria Del Carmen, Lógica y Racionalidad del Descubrimiento. Sevilla, 2001.

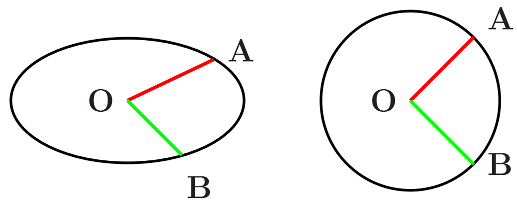


Figura 1.

Proposición 2.

La superficie de cualquier fluido está en reposo, si es la superficie de una esfera cuyo centro es el mismo que el de la tierra.

Demostración:

Suponga que la superficie del fluido es cortada por un plano a través de O, el centro de la tierra, en la curva $ABCD$.

$ABCD$ tiene que ser la circunferencia de algún círculo. Si no, algunas de las líneas dibujadas desde O a la curva serán desiguales y unas menores que otras. Tome una de ellas, OB es más grande que algunas de las líneas de O a la curva y menor que otras. Dibuje un círculo con radio OB. Suponga EBF, el cual caerá parte dentro y parte fuera de la superficie del fluido. Dibuje OGH haciendo HOB un ángulo igual al ángulo EOB, y encontrando la superficie en H y el círculo en G. Dibuje así mismo en el plano un arco de un círculo PQR con centro O y dentro del fluido. Entonces, las partes del fluido a lo largo de PQR son uniformes y continuas, y la parte PQ está comprimida por la parte entre éste y AB, mientras la parte QR está comprimida por la parte entre QR y BH.

Por lo tanto, las partes a lo largo de PQ y QR serán desigualmente comprimidas, y la parte que está menos comprimida será puesta en movimiento por la que está más comprimida. Por lo tanto, no estará en reposo lo que es contrario a la hipótesis.

Luego, la sección de la superficie será la circunferencia de un círculo, cuyo centro es O; y así mismo serán las otras secciones que definen los cortes de planos a través de O. Por consiguiente, la superficie es de una esfera con centro O. $\square$

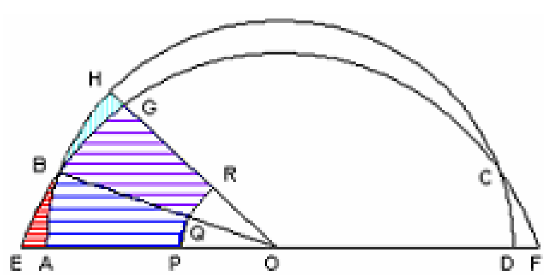
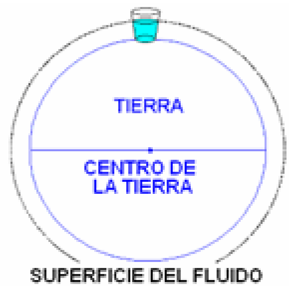


Figura 2.

Comentario: Estas dos primeras proposiciones buscan determinar cuál es la **forma del fluido**, poniendo en evidencia que Arquímedes ya imaginaba que la tierra era esférica, y también suponía que si se llegara a extender la superficie del fluido (por ejemplo un vaso de agua), ésta formaría una esfera cuyo centro es el mismo que el centro de la tierra (ver dibujo 2). Inclusive, Arquímedes demuestra aquí que la tierra tiene la forma de una esfera.



Dibujo 2.

Proposición 3.

Los sólidos aquellos que, tamaño a tamaño, son de igual peso con el fluido, si los deja caer en el fluido, se sumergen de tal forma que no se proyectan sobre la superficie pero no se hunden más abajo.

Demostración:

Si es posible, supongamos un cierto sólido $EFGH$ de igual peso, volumen a volumen con el fluido y es colocado en éste, de tal forma que la parte del sólido, $EBCF$ se proyecta sobre la superficie.

≪**Construcción Geométrica.** Dibuje a través de O, el centro de la tierra, y a través del sólido un plano que corta la superficie de un fluido en el círculo $ABCD$. Conciba una pirámide con vértice en O y cuya base es un paralelogramo sobre la superficie del fluido, tal que ésta incluye la porción sumergida del sólido. Digamos que la pirámide es cortada por el plano de $ABCD$ en OL y OM. Así mismo supongamos que se describe una esfera con centro O dentro del fluido por debajo de GH, y sea el plano $ABCD$ que corta ésta esfera en PQR. Concibamos otra pirámide en el fluido con vértice O, continua, de forma similar e igual a la anterior. Digamos que la pirámide descrita es cortada en OM, ON por el plano de $ABCD$≫[4].

Finalmente, $STUV$ es una parte del fluido dentro de la pirámide igual en volumen a la parte $BGHC$ del sólido, y supongamos que SV está en la superficie del fluido. Luego la presión sobre PQ y QR son desiguales, sobre PQ es mayor la presión. Consecuentemente, la parte QR será puesta en movimiento por PQ y el fluido no estará en reposo; que contradice la hipótesis.

Por lo tanto el sólido no está afuera de la superficie; ni se hundirá, ya que todas las partes de la superficie están bajo la misma presión. □

[4]Arquímedes realiza la misma construcción geométrica para demostrar las proposiciones 3, 4 y 5, por lo tanto, para la demostración de estas proposiciones, nos remitiremos a la construcción que aparece en la proposición 3.

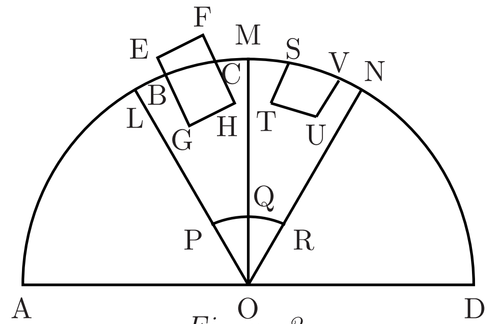


Figura 3.

Proposición 4.

Un sólido más ligero que un fluido, si es colocado en éste, no estará completamente sumergido, pero parte de éste se proyectará sobre la superficie.

Demostración:

En este caso, supongamos un sólido S completamente sumergido y el fluido en reposo.

El sólido S estará en la primera pirámide OL y OM; en la segunda pirámide OM y ON, estará la porción del fluido desplazado por el sólido (K). Luego la presión sobre las partes del fluido en PQ y QR son desiguales, ya que S es más liviano que K. Por lo tanto el fluido no estará en reposo, lo que contradice la hipótesis. Luego, el sólido S no puede en una condición de reposo estar completamente sumergido. □

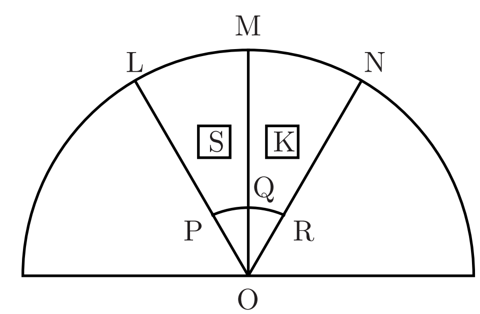


Figura 4.

Proposición 5.

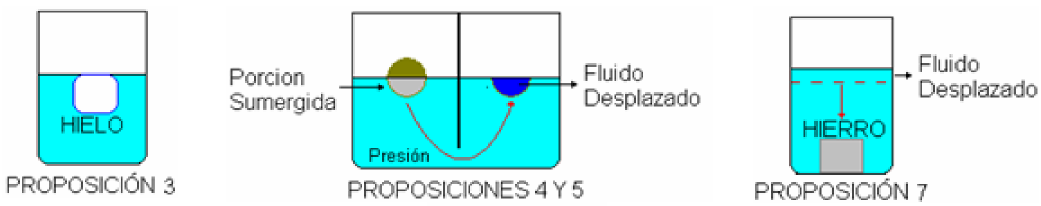
Cualquier sólido más ligero que un fluido, si se sumerge parte de él, el peso del sólido será igual al peso del fluido desplazado.

Demostración:

Sea el sólido $EGHF$; y sea $BGHC$ la porción sumergida cuando el fluido está en reposo, como en la proposición 3 (ver figura 3). Luego, la presión de la parte del fluido PQ y QR, tiene que ser igual para que el fluido pueda estar en reposo, se sigue que el peso de la porción $STUV$ del fluido tiene que ser igual al peso del sólido $EGHF$. Es decir, el peso del sólido es igual al peso del fluido desplazado por la porción sumergida del sólido $BGHC$. □

Comentario: En las proposiciones 3, 4 y 5 Arquímedes determina que la flotación de un objeto depende de la **gravedad específica del sólido** (en términos actuales la densidad) con respecto al fluido; para encontrar esta característica él tuvo que experimentar con distintas clases de objetos. Inicialmente, con su cuerpo sumergiéndolo en la bañera, y luego con la corona del Rey Hieron II, en la que descubrió que ésta era una aleación de oro y plata, y no de sólo oro como el rey creía. Es posible que se haya basado en estos acontecimientos para realizar el estudio de los fluidos, y estas proposiciones son la formalización matemática de los fenómenos que encontró a raíz de estos problemas[5].

Experimentación: Los experimentos que se presentarán, se realizaran con materiales, los cuales serán de mayor (proposición 7), menor (proposición 4 y 5) o igual (proposición 3) peso con respecto al fluido (ver Dibujo 3).



Dibujo 3.

Proposición 6.

Si un sólido es más ligero que un fluido y se sumerge fuertemente en él, el sólido será llevado hacia arriba por una fuerza igual a la diferencia entre su peso y el peso del fluido desplazado

Demostración:

Supongamos que el sólido A esta completamente sumergido en el fluido, sea G el peso de A, y $(G + H)$ es el peso del fluido al mismo volumen de A. Tomemos un sólido D cuyo peso es H y sumémosle A. Luego el peso del sólido $A + D$ es menor que el del fluido a igual volumen; y si $A + D$ es colocado en el fluido, éste se proyectará de tal forma que su peso será igual al peso del fluido desplazado. Pero su peso es $(G + H)$.

Por lo tanto, el peso del fluido desplazado es $(G + H)$ y el volumen del fluido desplazado es el volumen del sólido A.

De acuerdo a esto, el fluido estará en reposo con A sumergido y D proyectado.

De esta manera el peso de D balancea la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido sobre A y por tanto, aquella fuerza es igual a H, que es la diferencia entre el peso de A y el peso del fluido que A desplazo.

□

[5]Boyer Carl, *Historia De La Matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986, (Página 168).

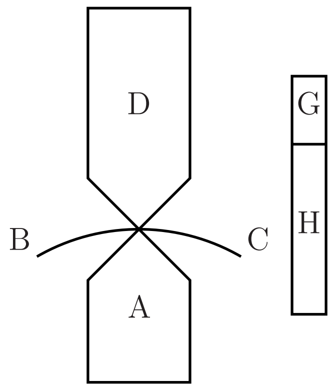


Figura 5.

Proposición 7.

Cualquier sólido más pesado que un fluido y situado en él, se sumergirá hasta el fondo del fluido, y si se pesa dicho sólido dentro del fluido resultará más ligero que su verdadero peso, por el peso del fluido desplazado.

Demostración:

1. La primera parte de la demostración es obvia, ya que la parte del fluido que está debajo del sólido estará bajo la presión más grande y por lo tanto las otras partes del fluido (por postulado 1) harán que el sólido alcancen el fondo.

2. Sea A un sólido más pesado que el fluido, y $(G + H)$ representa su peso, mientras que Grepresenta el peso del mismo volumen en fluido. Tomemos un sólido B más liviano volumen a volumen (de menor gravedad específica) que el fluido, tal que el peso de B es G, mientras que el peso del fluido al mismo volumen es $(G + H)$.

   Unimos A y B en uno solo y lo sumergimos en el fluido. Entonces, $(A + B)$ será del mismo peso como el fluido del mismo volumen, juntos pesan $(G + H) + G$, se sigue que $(A + B)$ permanecerá inmóvil en el fluido.

   Por lo tanto, la fuerza que causa A por si misma al hundirse será igual a la fuerza hacia arriba que ejerce el fluido sobre B por si mismo, esto es igual a la diferencia entre $(G+H)$ y G [Prop. 6]. Entonces, A será presionado por una fuerza igual a H, esto es, su peso en el fluido es H o la diferencia entre $(G + H)$ y G. $\square$

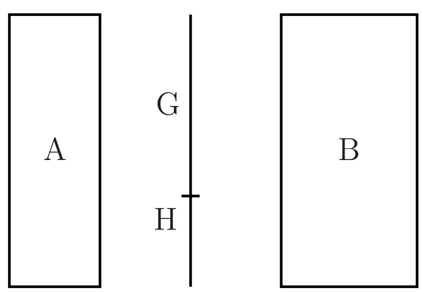


Figura 6.

Comentario: Éstas son dos de las principales proposiciones, ya que aquí se enuncia y se demuestra **el principio hidrostático**, es probable que Arquímedes haya demostrado primero con objetos más livianos que el fluido (ya que experimentalmente se observa que el objeto se pone en movimiento hacia arriba cuando es sumergido fuertemente en el fluido) y luego con objetos más pesados que el fluido.

Postulado 2.

Los cuerpos que son impulsados hacia arriba en un fluido, son impulsados hacia arriba a lo largo de la perpendicular (de la superficie) que pasa a través de su centro de gravedad.

Proposición 8.

Si un sólido con la forma de un segmento de una esfera, y de una sustancia más ligera que el fluido, es colocado en éste, de tal manera que su base no toca el fluido; el sólido reposará en la posición en que su eje es perpendicular a la superficie del fluido; y si el sólido es forzado en una posición semejante que su base toca el fluido sobre un lado y luego se libera, este no permanecerá en esta posición, pero retornará a una posición simétrica.

Proposición 9.

Si un sólido con la forma de un segmento de esfera, y de una sustancia más ligera que un fluido, es colocado en éste, de tal manera que su base está completamente bajo la superficie del fluido; el sólido estará en reposo en la posición que su eje es perpendicular a la superficie del fluido. [La demostración de esta proposición ha sobrevivido solo de forma incompleta. Además con solo un caso de tres que son distinguidos desde el comienzo, aquí se demuestra el caso en el que el segmento es más grande que el hemisferio.]. (Health Thomas Little, 1897)

Demostración:

Supóngase primero que el segmento es más grande que el hemisferio y éste es cortado por un plano a través de su eje y el centro de la tierra, y si es posible, supongamos al fluido en reposo, como se muestra en la figura 5, donde A y B es la intersección del plano con la base del segmento, DE es su eje, sea C el centro de la esfera en el que el segmento es una parte, O el centro de la tierra.

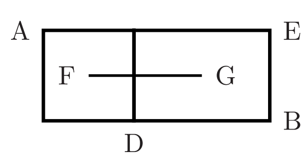
El centro de gravedad de la porción del segmento fuera del fluido es F, que está sobre OC; su eje pasa a través de C. Supongamos G es el centro de gravedad del segmento.

Unimos FG y producimos a H. Así que,

$$\boldsymbol{FG{:}GH} = \textbf{(Volumen de la porción sumergida) : (resto del sólido)}$$ [6]

[6] Arquímedes, Sobre el equilibrio de los Planos I:
Proposición VIII: Si AB es una magnitud cuyo centro de gravedad es C y AD una parte de ésta cuyo centro de gravedad es F, entonces el centro de gravedad del resto de la magnitud será un punto G sobre FC producida, tal que:

GC:CF=(AD):(DE)



Unimos OH. Luego, el peso de la porción del sólido fuera del fluido actúa a lo largo de FO, y la presión del fluido sobre la porción sumergida a lo largo de OH, mientras el peso de la porción sumergida actúa a lo largo de HO, y es por hipótesis menor que la presión del fluido, que actúa a lo largo de OH.

Por lo tanto no estará en equilibrio, pero la parte del segmento hacia A ascenderá y la parte hacia B descenderá. Hasta que DE asuma una posición perpendicular a la superficie del fluido. □

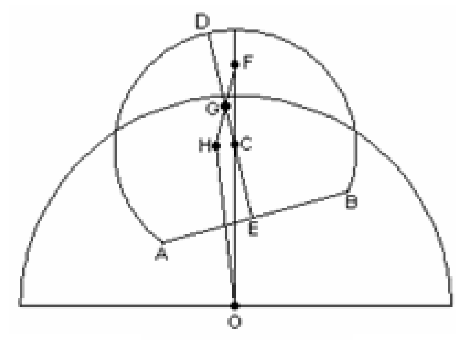


Figura 7.

Comentario: A partir del postulado 2, Arquímedes demuestra las proposiciones 8 y 9, que juegan con **la posición de un segmento de esfera**, y busca la posición en que el objeto permanece en equilibrio, teniendo en cuenta las fuerzas que intervienen en ésta, también utiliza la ley de la palanca para lograr el equilibrio del cuerpo en el fluido, fijando los centros de gravedad (poniendo en proporción el volumen de la porción sumergida y el resto del sólido, con la distancia del centro de gravedad de todo el objeto y el centro de gravedad de cada una de las dos porciones del sólido que divide la superficie del fluido). Además la demostración de esta proposición es similar a la mayoría de las demostraciones que Arquímedes realiza en el libro "Sobre Los Cuerpos Flotantes II", donde estudia el equilibrio de un paraboloide en revolución puesto en un fluido, teniendo en cuenta los postulados y proposiciones anteriormente mencionadas. *A* continuación presentaremos tres de las diez proposiciones de éste libro.

Libro dos: sobre los cuerpos flotantes

Proposición 1.

Si un sólido más ligero que un fluido está en reposo dentro de éste, el peso del sólido es al peso del mismo volumen en fluido, como la porción sumergida del sólido es a todo el sólido.

Demostración:

Sea $(A+B)$ el sólido, B la porción sumergida en el fluido.

Supongamos $(C+D)$ igual al volumen del fluido, siendo C igual al volumen A y B a D.

Además supóngase una línea E que representa el peso del sólido $(A+B)$, $(F+G)$ representa el peso de $(C+D)$ y G el de D.

Luego, (el peso de $(A+B)$): (El peso de $(C+D)) = E : (F+G)$ (1)

Y el peso de $(A+B)$ es igual al peso de un volumen B del fluido [Libro I, 5], esto es al peso de D.

Esto indica que $E = G$

Por lo tanto, por (1), el peso de $(A+B)$: el peso de

$$\begin{aligned}(C+D) &= G : F+G\\ &= D : C+D\\ &= B : A+B. \quad \square\end{aligned}$$

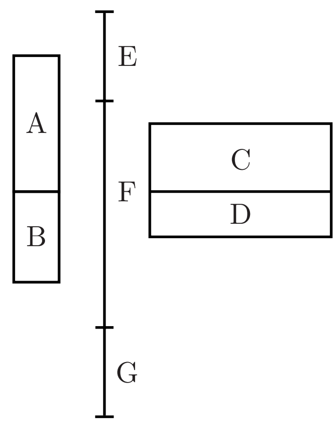


Figura 8.

Proposición 2.

Si un segmento de un paraboloide recto en revolución, cuyo eje no es más grande que $\frac{3}{4}p$ (donde[7] es el principal parámetro de la parábola), y con una gravedad específica menor que la del fluido, es colocado en el fluido con su eje inclinado a la vertical en algún ángulo, asimismo la base del segmento no toca la superficie del fluido, el segmento del paraboloide no permanecerá en esta posición, sino que retornará a la posición en la que su eje es vertical.

Demostración:

Sea AN el eje del segmento del paraboloide, y a través de AN dibujemos un plano perpendicular a la superficie del fluido, el plano interseca al paraboloide en la parábola BAB', la base del segmento del paraboloide en BB', y el plano de la superficie del fluido en la línea QQ' de la parábola.

Luego, el eje AN es colocado en una posición no perpendicular a QQ', BB' no será paralela a QQ'.

[7] Arquímedes utilizaba el parámetro como una línea recta p constante tal que el área del rectángulo cuyos lados son p y el eje AN (desde la ordenada al vértice) de la parábola, es igual al cuadrado de la ordenada BN, es decir , tomado desde la proposición 11 del libro The conics de Apolonio, ya que allí se demuestra.

Dibuje la tangente PT a la parábola que es paralela a QQ', y sea P es el punto en contacto. De P dibujamos PV paralelo a AN encontrando V en QQ'. luego PV será el diámetro de la parábola QPQ' y asimismo el eje de la porción del paraboloide sumergida en el fluido.

Sea C el centro de gravedad del paraboloide BAB', y F el centro de gravedad de la porción que esta sumergida en el fluido. Unamos FC y produzcamos a H siendo el centro de gravedad del resto de la porción del paraboloide (encima de la superficie).

Por lo tanto $\quad AN = \dfrac{3}{2}AC,$

Y $\quad AN \not> \dfrac{3}{4}p,$

Se sigue que $\quad AC \not> \dfrac{p}{2};$

Por lo tanto si unimos CP, el ángulo CPT es agudo, entonces si CK es dibujado perpendicular a PT, K caerá entre P y T, y si FL y HM son dibujados paralelos a CK, encontrarán a PT, cada uno de ellos siendo perpendiculares a la superficie del fluido.

Ahora la fuerza que actúa sobre la porción sumergida del segmento del paraboloide actuará hacía arriba a lo largo de LF, mientras el peso de la porción fuera del fluido actuará hacía abajo a lo largo de HM.

Por lo tanto no habrá equilibrio, y el segmento girará de tal forma que B ascienda y B' caiga, hasta que AN tome una posición vertical. $\square$

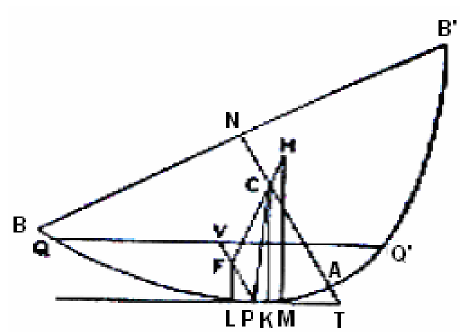


Figura 9.

Proposición 3.

Si un segmento de un paraboloide en revolución, cuyo eje no es más grande que $\frac{3}{4}p$(donde p es el parámetro) y cuya gravedad específica es menor que la del fluido, con su eje inclinado en algún ángulo a la vertical, asimismo su base esta completamente sumergida, el sólido no permanecerá en esta posición, y regresará a la posición en la que su eje es vertical.

Demostración:

Sea AN el eje del paraboloide, y a través de AN dibujemos un plano perpendicular a la superficie del fluido intersecando el paraboloide en la parábola BAB', la base del segmento en BNB' y el plano de la superficie del fluido en la recta QQ' de la parábola.

Luego como AN es colocado en una posición no perpendicular a la superficie del fluido, QQ' y BB' no son paralelas.

Dibujemos PT paralela a QQ' y tocando a la parábola en P, luego PT corta a NA en T. Dibujamos el diámetro PV bisecando QQ' en V, Luego PV es el eje de la porción del paraboloide sobre la superficie del fluido.

Sea C el centro de gravedad de todo el segmento de paraboloide, F el de la porción que esta sobre la superficie del fluido, unamos FC y produzcamos a H, así que H es el centro de gravedad de la porción sumergida.

Entonces $AC > \frac{p}{2}$, el ángulo CPT es un ángulo agudo, como en la anterior proposición. Por lo tanto si CK es dibujado perpendicular a PT, K caerá entre P y T. Asimismo si HM y FL son dibujados paralelos a CK, ellos serán perpendiculares a la superficie del fluido.

Y la fuerza que actúa sobre la porción sumergida actuará hacia arriba a lo largo de HM mientras el peso del resto del sólido actuara hacia abajo a lo largo de LF. Por lo tanto el paraboloide girara hasta que tome la posición en la cual AN es vertical. □

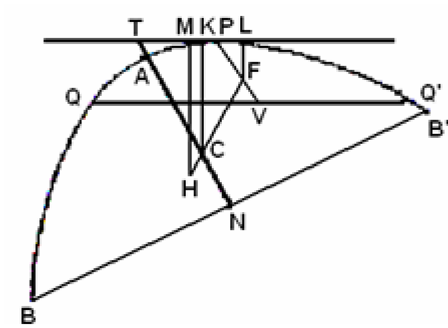


Figura 10.

Comentario: En estas proposiciones observamos que Arquímedes utiliza por primera vez al paraboloide como cuerpo de flotación[8] y lo estudia desde un corte trasversal: la parábola; Arquímedes concebía la parábola al igual que Menecmo (como "*la sección producida por el corte de un plano a un cono circular recto, tal que el ángulo formado por dos generatrices coplanarias con el eje del cono es recto*")[9], además conocía otra característica: el parámetro, con el que realizó tres criterios para el estudio de las parábolas (Ver cuadro

[8] *"Es plausible de que la idea de suspensión y flotación fuesen problemas contemplados simultáneamente por Arquímedes. Es más, aunque la construcción de los cuerpos flotantes sea posterior, es posible pensar que sus presupuestos fundamentales son inclusive anteriores a "Del equilibrio de los planos"e influyen en ella. Lo mismo que las partes en el fluido se desplazan unas a otras y desplazan a los sólidos sumergidos en el, los cuerpos suspendidos se inter-influyen dependiendo así mismo la gravedad de uno de la gravedad del otro, siendo también el motivo su posición relativa, yo diría que los conceptos de flotación aclaran y inspiran a los de la suspensión. Y ello viene apoyado por la insistencia en la parábola. Para el estudio de la suspensión otras figuras hubiesen sido igualmente válidas incluso más adecuadas. Pero en el caso de flotación la parábola, al ser forma idealizada de la sección transversal de cualquier barco es particularmente significativa. A partir de ella se construirá un cuerpo como el paraboloide suficientemente regular como para servir de prototipo de estudio. Podemos pensar que a partir de aquí se decidiera seguir usando la parábola para el estudio de cualquier tipo de equilibrio"Hernández Martín Maria Del Carmen, Lógica y Racionalidad del Descubrimiento.*

[9] Vera Francisco. *Científicos Griegos*. Pág. 100.

1), los dos primeros criterios (Columna 2 y 3) van referidos, a la relación existente entre el eje de la parábola y el parámetro, el tercer criterio (Columna 4) relaciona la gravedad específica del sólido con la gravedad específica del fluido, dentro de este estudio Arquímedes también tuvo en cuenta la posición en que se encontraba el paraboloide colocado en el fluido (columna 5), y finalmente investiga la posición en que encuentra equilibrio (Columna 6).

Gauss y la geometría diferencial

CARACTERÍSTICAS					
	EJE		**GRAVEDAD ESPECÍFICA**	**BASE**	**POSICIÓN DE REPOSO**
2	$AN \leq \frac{3}{4}p$			No toca el fluido	Eje en la vertical
3	$AN \leq \frac{3}{4}p$			Está completamente sumergida	Eje en la vertical
4	$AN > \frac{3}{4}p$		$GES : GEF < (AN - \frac{3}{4}p)^2 : AN^2$	No toca el fluido	Eje en la vertical
5	$AN > \frac{3}{4}p$		$GES : GEF < \{(AN^2 - (AN - \frac{3}{4}p)^2\} : AN^2$	Está completamente sumergida	Eje en la vertical
6	$AN > \frac{3}{4}p$	$AN : \frac{1}{2}p < 15 : 4$		Toca un punto	Eje en la vertical
7	$AN > \frac{3}{4}p$	$AN : \frac{1}{2}p < 15 : 4$		La base está sumergida (toca un punto)	Eje en la vertical
8	$AN > \frac{3}{4}p$	$AN : \frac{1}{2}p < 15 : 4$	$GES : GEF < (AN - \frac{3}{4}p)^2 : AN^2$	No toca el fluido	Eje en cierto ángulo descrito
9	$AN > \frac{3}{4}p$	$AN : \frac{1}{2}p < 15 : 4$	$GES : GEF > \{(AN^2 - (AN - \frac{3}{4}p)^2\} : AN^2$	Está completamente sumergida	Eje en cierto ángulo descrito
10		$AN : \frac{1}{2}p < 15 : 4$		No toca el fluido	

Bibliografía

[1] ARCHIMEDES., 287-212 (?). *The Works Of Archimedes*. Edited Thomas Little Health, Cambridge, 1897.

[2] BOYER, C., *Historia De La Matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] HERNÁNDEZ, M., *Lógica y Racionalidad del Descubrimiento*. Secretariado de Publicaciones de Sevilla, Sevilla, 2001.

[4] VERA, F., *Científicos Griegos*. Ediciones Aguilar S.A. Madrid, 1970.