Algunos elementos de lógica, conjuntos y topología difusas

Carlos Ochoa Castillo
Profesor Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
oochoac@udistrital.edu.co

Resumen

Se consideran elementos del álgebra presentes en lógicas multi-valuadas, discutiendo previamente las nociones de valor de verdad, modelos y funciones conectivos; se introduce la noción de conjuntos y topologías difusos.

Presentación

Hacia el año 1965, Lotfi A. Zadeh introdujo las primeras ideas de una teoría de conjuntos difusos con el objeto inicial de encontrar en las matemáticas modelos apropiados para el estudio de problemas complejos de control que se presentan en la teoría de la información; estas ideas permitieron superar la rigidez de la teoría clásica de conjuntos y en consecuencia, clasificar objetos de un universo conocido que responden a una determinada propiedad de manera que no solo la verifican o no, sino que la pueden verificar parcialmente.

En un lenguaje más técnico, la teoría clásica de conjuntos se construye con funciones características que toman valores en un conjunto con dos elementos dotado de una estructura de retículo, dichos elementos se suelen interpretar con los apelativos de *verdad* (la pertenencia) y *falsedad* (la no pertenencia); en las teorías de conjuntos difusos, las funciones características se reemplazan por otras que toman valores en retículos más generales, lo que da lugar a contar con varios grados posibles de pertenencia.

Así, desde los albores de los conjuntos difusos, fue clara la estrecha relación entre la teoría de los conjuntos difusos y la lógica multi-valuada; en verdad, el advenimiento de la teoría de conjuntos difusos, demandó cambiar la lógica a algo más que un espectro de varios valores de verdad.

El objeto de esta presentación es dar una perspectiva de las lógicas que subyacen en los conjuntos difusos desde el punto de vista algebraico siguiendo esencialmente a S. Gottwald (cf. [4]), Ulrich Höhle (cf. [6]) y Alexander Šostak (cf. [10]). En la sección 1 nos ubicamos en la estructura Booleana de la lógica clásica, su lenguaje e interpretaciones, en la sección 2 se presentan algunos conjuntos de valores de verdad, una pequeña discusión en torno a la designación de valores de verdad se da en la sección 3; en la sección 4 se trata la noción de consecuencia lógica, algunas funciones conectivos se exhiben en la sección 5, en la sección 6 se presenta una estructura algebraica que incluye en esencia las nociones dadas en las secciones previas y en la sección 7 se da una perspectiva de los conjuntos difusos.

1. Introducción

Los sistemas lógicos están basados en general por un lenguaje formal que incluye una noción de fórmula bien formada, y en consecuencia están determinados bien sea semántica o sintácticamente.

Se dice que un sistema lógico está semánticamente determinado si cada fórmula bien formada tiene un valor de verdad o representa una función en el conjunto de los valores de verdad.

Se dice que un sistema lógico está sintácticamente determinado si hay una noción de prueba y de fórmula probable, esto es, de teorema (formal) como derivación de un conjunto de premisas.

Desde un punto de vista epistemológico, el aspecto semántico de la lógica clásica precede al sintáctico pues tal como se presenta en [3] *un teorema o una consecuencia formal de ciertas premisas es una propiedad que depende solamente de la forma y las relaciones estructurales entre fómulas.*

El la lógica clásica se tienen dos principios fundamentales: Bivalencia y Composición. Por el principio de *Bivalencia* se tiene que cada proposición tiene exáctamente uno de los dos valores de verdad: $\perp$ (falso) o $\top$ (verdadero) que usualmente se codifican con 0 y 1 respectivamente; por el principio de *Composición*, el valor de verdad de cada fórmula bien formada compuesta es función del valor de verdad de sus componentes.

Considerando las funciones de valor de verdad que caracterizan los conectivos, nos lleva a estudiar la estructura algebraica con el conjunto de valores de verdad como soporte; por otro lado, sabiendo que todos los conectivos clásicos son definidos a partir de la conjunción, disyunción y negación, significa que se debe considerar el conjunto de valores de verdad $\{0, 1\}$ junto con las funciones mín, máx y $1 - \ldots$ obteniéndose un *Álgebra Booleana* particular. La noción semántica de validez de una fórmula bien formada H con respecto a una interpretación, significa que H tiene valor de verdad 1 en esa interpretación particular.

Las nociones de valor de verdad, interpretación y validez se genaralizan de tal manera que la estructura de valores de verdad puede ser un álgebra Booleana $\mathcal{B} = \{B, \wedge, \vee, ^c, 0, 1\}$, una interpretación es una función del conjunto de todas las variables proposicionales en B, que las funciones de verdad para conjunción, disjunción y negación son escogidos de acuerdo a $\wedge, \vee, ^c$ respectivamente y que validez de una fórmula bien formada H con respecto a una interpretación dada significa que H tiene el valor 1 de B en esa interpretación.

La lógica multi-valuada solamente cambia el principio de bivalencia; así, se trata de un sistema S y un lenguaje formal $\mathcal{L}_S$ que comprende:

- Una familia (no vacía) de conectivos proposicionales,
- Una familia (posiblemente vacía) de constantes de grados de verdad,
- Un conjunto de cuantificadores,

y la adopción usual de definir la clase de las fórmulas bien formadas con respecto a esas premisas sintácticas y paralelo a esto el correspondiente enfoque semántico:

- Un conjunto (no vacío) de grados de verdad,
- Una familia de funciones de grados de verdad en correspondencia con los conectivos proposicionales del lenguaje formal,
- Una familia (posiblemente vacía) de operaciones anulativas, i. e. elementos de los grados de verdad con una correspondencia uno a uno entre los miembros de esta familia y los grados de verdad constantes del lenguaje formal.
- Un conjunto de funciones que interpretan cuantificadores de $\wp(\mathcal{W}^S)$ en $\mathcal{W}^S$ junto con una correspondencia uno a uno entre esas funciones y los cuantificadores del lenguaje formal.

Usualmente se asume que los valores de verdad clásicos están incluidos en los grados de verdad de un sistema S de lógica multi-valuada, es decir,

$$\{0,1\} \subseteq \mathcal{W}^S. \tag{1.0.1}$$

2. De los grados de verdad

En general, para un sistema S de lógica multi-valuada, no hay restricciones para el conjunto $\mathcal{W}^S$ de grados de verdad de S; sin embargo la elección de $\mathcal{W}^S$ como conjunto de números es ampliamente aceptada, por lo menos cuando no se está interesado en considerar un orden en los valores de verdad donde se puedan presentar situaciones no comparables. En tal sentido es usual tener además de (1.0.1) la estructura

$$\mathcal{W}^S \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.0.2}$$

en este ambiente, es común usar para los conjuntos infinitos de valores de verdad enumerables o no enumerables los siguientes conjuntos respectivamente:

$$\mathcal{W}_0 =: \{\ x \in \mathbb{Q} \ \mid\ 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{o} \quad \mathcal{W}_\infty =: \{\ x \in \mathbb{R} \ \mid\ 0 \leq x \leq 1\}, \tag{2.0.3}$$

ahora, si se trata de caso finito, se asume que los valores de verdad forman un conjunto de puntos equidistantes del intervalo $[0,1]$, esto es, para algún entero $n \geq 2$ es

$$\mathcal{W}_n =: \{\ \frac{k}{n-1} \ \mid\ 0 \leq k \leq n-1\}, \tag{2.0.4}$$

3. Designando valores de verdad

En la lógica clásica se cuenta con los valores de verdad $\top$ y $\bot$, dada una fórmula bien formada, estamos interesados en aquellas interpretaciones para el sistema de lógica multivaluada en que la fórmula bien formada es verdadera.

El conjunto de valores de verdad $\mathcal{W}^S$ de un sistema S de lógica multi-valuada incluye valores de verdad equivalentes a $\top$ y $\perp$ respectivamente; teniendo en cuenta (1.0.1) se puede pensar que 1 es equivalente a $\top$ pero tal idea no siempre se satisface. Surge entonces la cuestion de determinar qué valores de verdad corresponden a $\top$; esto es en cada sistema S de valores de verdad multi-valuado se tiene un conjunto $\mathcal{D}^S$ de valores de verdad designados en donde se asume que

$$1 \in \mathcal{D}^S \subseteq \mathcal{W}^S, \quad \text{y} \quad 0 \notin \mathcal{D}^S. \tag{3.0.5}$$

Un paso posterior, es generalizar considerando los valores de verdad correspondientes a $\perp$ obteniéndose los valores de verdad designados positivos y los valores de verdad designados negativos determinando dos conjuntos disjuntos $\mathcal{D}^{S_+}$ y $\mathcal{D}^{S_-}$ tales que

$$\mathcal{D}^{S_+} \cup \mathcal{D}^{S_-} \subseteq \mathcal{W}^S, \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^{S_+} \cap \mathcal{D}^{S_-} = \emptyset,$$

con frecuencia se asume que $1 \in \mathcal{D}^{S_+}$ y $0 \in \mathcal{D}^{S_-}$.

4. Validez y consecuencia lógica

Por una proposición entendemos una fórmula bien formada en el caso de un lenguaje proposicional $\mathcal{L}_S$ o bien, una fórmula bien formada sin variables individuales libres de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_S$; una proposición P es válida en una interpretación si tiene un grado de verdad designado en esa interpretación, y una proposición P es lógicamente válida si es válida en cada interpretación posible.

En esta dirección, una fórmula P de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_S$ es válida en una interpretación $\mathfrak{A}$ si tiene designado un grado de verdad con respecto a una valuación de las variables individuales del lenguage. Por otro lado; una interpretación $\mathfrak{A}$ es un modelo de una fórmula bien formada P, si esta fórmula es válida en $\mathfrak{A}$, esta situación se nota con $\mathfrak{A} \models P$; y $\mathfrak{A}$ es un modelo para un conjunto Σ de fórmulas bien formadas si es un modelo para cada $P \in \Sigma$, este hecho se nota $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Esta noción se generaliza en lógica multi-valuada como sigue: Dados un valor de verdad α y una proposición P, una interpretación $\mathfrak{A}$ es un α-modelo de P si el valor de verdad de P en la interpretación $\mathfrak{A}$ es igual a α o es mayor o igual que α[1]. De esta forma, se extiende la noción de $(\geq \alpha)$-modelo a un conjunto de proposiciones, es decir, una interpretación$\mathfrak{A}$ es un $\geq \alpha$-modelo para un conjunto de proposiciones Σ si $\mathfrak{A}$ es un $(\geq \alpha)$-modelo para cada $P \in \Sigma$.

Basados en estos preliminares, la noción de consecuencia lógica proviene de nuevo de dos intuiciones básicas ligeramente diferentes; se dice que una proposición P es una consecuencia lógica de un conjunto Σ de proposiciones y se escribe $\Sigma \models P$ si

- *Versión 1* Cada modelo de Σ es también un modelo para P,
- *Versión 2* Cada $(\geq \alpha)$-modelo de Σ es también un $(\geq \alpha)$-modelo para P.

[1] Ambas variantes se usan, se debe prestar atención al contexto. A veces cuando se trata del último caso que se menciona, se prefiere decir que es un $(\geq \alpha)$-modelo

5. De los conectivos

Siguiendo un paralelo con el procedimimiento clásico, en el ambiente de la lógica multivaluada se tienen los conectivos que se describen a continuación:

5.1. Conectivos conjunción

Un ejemplo bien conocido de estos conectivos proviene de Lukasiewicz y Gödel, es la operación binaria

$$et_1(u,v) =: \text{mín}\{u,v\}, \tag{5.0.6}$$

la tabla de verdad correspondiente para $\mathcal{W}_4$ es

et_1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

otro ejemplo procedente de Lukasiewicz es

$$et_2(u,v) =: \text{máx}\{0, u+v-1\}, \tag{5.0.7}$$

y la la tabla de verdad correspondiente para $\mathcal{W}_4$ es

et_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Nótese que en ambos casos, la definición es independiente del número de valores de verdad. En tiempos recientes se ha considerado la conjunción

$$et_3(u,v) =: u \cdot v, \tag{5.0.8}$$

esto con inspiración en el comportamiento de la conjunción clásica y $\mathcal{W}_2$; en otra situación, para que et_3 sea cerrada es necesario que el conjunto de valores de verdad sea infinito. Además de estos tres ejemplos, existe un gran número de estos conectivos, estas funciones son las t-normas.

Definición 5.1. *Una Operación binaria t en el intervalo unitario $[0,1]$ es una t-norma si*

T1 t es asociativa y conmutativa,

T2 t es no creciente en cada uno de sus argumentos,

T3 1 es elemento neutro para t, es decir, $t(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Es inmediato que para todo $x \in [0,1]$, $t(x,0) = 0$ pues

$$t(x,0) = t(0,x) \leq t(0,1) = 0.$$

Desde el punto de vista algebraico, el intervalo $[0,1]$ con la operación t se constituye en un monoide.

5.2. Conectivos negación

Desde el punto de vista histórico(cf.[4]), Gödel y Lukasiewicz proponen las negaciones non_0 y non_1 para el conjunto $[0,1]$:

$$non_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad non_1(x) = 1 - x; \tag{5.1.1}$$

Post propone non_2 para $\mathcal{W}_m$:

$$non_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ x - \frac{1}{m-1} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

esta última es considerada hoy en día algo extraña y se tiende a excluir de consideraciones generales. En la actualidad prevalece la siguiente definición:

Definición 5.2. *Una función* $\mathbf{n} : [0,1] \to [0,1]$ *es una negación si es no creciente y satisface* $\mathbf{n}(0) = 1$ *y* $\mathbf{n}(1) = 0$. *Una negación es etricta si es estrictamente decreciente y continua, es fuerte si es estricta y es una involución, es decir, satisface* $\mathbf{n}(\mathbf{n}(x)) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Así, non_2 no es una negación para $m > 2$, non_0 es una negación y non_1 es una negación fuerte. Otro ejemplo de negación no estricta es

$$non^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \quad x < 1 \\ 0 \text{ si } x = 1, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

toda función negación n satisface $non_0 \leq n \leq non^*$. Un ejemplo de una negación estricta que no es fuerte es

$$non_3(x) = 1 - x^2, \tag{5.2.2}$$

un surtidor de negaciones fuertes lo constituye la familia de funciones

$$n_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \tag{5.2.3}$$

donde $\lambda > -1$. Esta familia fue introducida por M. Sugeno (cf.[4]); a n_λ se le denomina λ-complemento. Para caracterizar las negaciones fuertes se exhibe el siguiente resultado

Teorema 5.3. *Sea* $\mathbf{n} : [0,1] \to [0,1]$ *entonces,*

1. $\mathbf{n}$ *es una negación fuerte si y solamente si existe un automorfismo* ϕ *del intervalo* $[0,1]$ *tal que para todo* $x \in [0,1]$ *es*

$$\mathbf{n}(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)), \tag{5.3.1}$$

2. $\mathbf{n}$ *es una negación estricta si y solamente si existen automorfismos* ϕ, ψ *del intervalo* $[0,1]$ *tales que para todo* $x \in [0,1]$ *se tiene que*

$$\mathbf{n}(x) = \psi(1 - \phi(x)). \tag{5.3.2}$$

Un resultado (cf.[4]) que relaciona las t-normas con las negaciones es,

Teorema 5.4. *Sean* t *una* t*-norma continua y* $\mathbf{n}$ *una negación estricta, para todo* $x \in [0,1]$ *se tiene que* $t(x, \mathbf{n}(x)) = 0$ *si y solo si existe un automorfismo* ϕ *del intervalo* $[0,1]$ *tal que para todo* $x, y \in [0,1]$ *es*

$$t(x,y) = \phi^{-1}(et_2(\phi(x), \phi(y))) \quad y \quad \mathbf{n}(x) \leq \phi^{-1}(1 - \phi(x)). \tag{5.4.1}$$

Una situación típica la presentan et_2 y non_1.

5.3. Conectivos disyunción

Hay dos maneras de entrar a estudiar estos conectivos, una de ellas es reflexionar en torno a las propiedades que deben ser satisfechas para establecer un paralelo con los conectivos conjunción y la otra, desde la consideración de una conjunción y una negación, incluyendo desde luego reglas análogas a las leyes de De Morgan; se presentarán ambas perspectivas. Las propiedades satisfechas por los conectivos disyunción corresponden a las de las t-*conormas* como funciones de grado de verdad.

Definición 5.5. *Una operación binaria* $\mathbf{s}$ *en el intervalo* $[0,1]$ *es una* t*-conorma si*

S1 *Es asociativa y conmutativa,*

S2 *Es no decreciente en cada argumento,*

S3 0 *es elememto neutro, es decir;* $\mathbf{s}(x, 0) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Es claro que para todo $x \in [0,1]$, $\mathbf{s}(x,1) = 1$ pues

$$\mathbf{s}(x,1) = \mathbf{s}(1,x) \geq \mathbf{s}(0,1) = 1.$$

Desde el punto de vista algebraico, el intervalo $[0,1]$ con la operación $\mathbf{s}$ se constituye en un monoide.

Ahora, en conección con las leyes de DeMorgan, se introduce una función $\mathbf{s} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ a partir de una negación $\mathbf{n}$ y de alguna t-norma $\mathbf{t}$ así:

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{n}(\mathbf{t}(\mathbf{n}(x), \mathbf{n}(y))), \qquad \forall x, y \in [0,1]. \tag{5.5.1}$$

o definiendo,

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{n}^{-1}(\mathbf{t}(\mathbf{n}(x), \mathbf{n}(y))), \qquad \forall x, y \in [0,1]. \tag{5.5.2}$$

Ambas visiones coinciden en el siguiente resultado (cf.[4]):

Teorema 5.6. *Si* $\mathbf{n}$ *es una negación fuerte y* $\mathbf{s}$ *y* $\mathbf{t}$ *son dos operaciones binarias relacionadas por*

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{n}(\mathbf{t}(\mathbf{n}(x),\mathbf{n}(y))), \qquad \forall x,y \in [0,1],$$

entonces $\mathbf{t}$ *es una t-norma y* $\mathbf{s}$ *es una t-conorma.*

Es usual que se considere la negación fuerte non_1; así, para una t-norma $\mathbf{t}$ se tiene la t-conorma:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{t}}(x,y) = 1 - \mathbf{t}(1-x, 1-y), \qquad \forall x,y \in [0,1], \tag{5.6.1}$$

para obtener las t-conormas más populares

$$vel_1(x,y) = \text{máx}\{x,y\}, \tag{5.6.2}$$

$$vel_2(x,y) = \text{mín}\{1, x+y\} \ \text{ y} \tag{5.6.3}$$

$$vel_3(x,y) = x + y - x \cdot y \tag{5.6.4}$$

en correspondencia con las t-normas definidas en (5.0.6), (5.0.7) y (5.0.8) quedando para el lector la discusión y elaboración de las tablas de verdad en el ambiente $\mathcal{W}_4$.

5.4. Conectivos implicación

De los primeros ejemplos que aparecen de este tipo de conectivos es la implicación de Lukasiewicz definida por

$$seq_2(x,y) = \text{mín}\{1, 1 - x + y\}, \tag{5.6.5}$$

otro ejemplo importante fue introducido por Gödel, que se define

$$seq_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq y, \\ y & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.6.6}$$

Como es de esperarse, uno tiende a escribir las implicaciones en términos de otros conectivos, uno de los caminos usuales es hacerlo con disyunción y negación o con conjunción y negación, así en el caso de (5.6.5) es

$$seq_2(x,y) = vel_2(non_1(x), y) = non_1(et_2(x, non_1(y))), \tag{5.6.7}$$

esta conección es la que motiva que a vel_2 se le llame la disyunción (aritmética) de Lukasiewicz y et_2 la conjunción (aritmética) de Lukasiewicz; pero en lo que concierne a seq_1 el intento es infructuoso, ante esto, existe otro tipo de reducción, es

$$seq_1(x,y) = \sup\{w \mid et_1(x,w) \leq y\} \tag{5.6.8}$$

introducida por Gödel (cf.[4]) cuando relaciona la lógica multi-valuada y la lógica intucionista en donde la implicación es interpretada como pseudocomplemento, la situación expuesta en (5.6.8) es equivalente a

$$w \leq seq_1(x,y) \Leftrightarrow et_1(x,w) \leq y, \tag{5.6.9}$$

de donde se dice que et_1, seq_1 forman un par adjunto, nótese que et_2, seq_2 presentan el mismo comportamiento.

6. Hacia una generalización

Cuando se observa por ejemplo $([0,1], et_1, vel_1)$, surge de inmediato la estructura de un retículo enriquecido con el par adjunto (et_1, seq_1) y se tiene la tendencia feliz y exitosa de considerar la estructuras algebraicas que generalizan esta fenomenología; así, se estudia la lógica monoidal en [6] y la estructura de $GL-$monoide que ahora va a centrar nuestra atención.

Sea $(L, \leqslant)$ un retículo infinitamente distributivo y completo, esto es, $(L, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo $A \subset L$ el extremo superior $\bigvee A$ y el extremo inferior $\bigwedge A$ están definidos y para todo $\alpha \in L$ se satisface

$$\Big(\bigvee A\Big) \wedge \alpha = \bigvee\{a \wedge \alpha \ \mid \ a \in A\} \qquad \text{y} \tag{6.0.10}$$

$$\Big(\bigwedge A\Big) \vee \alpha = \bigwedge\{a \vee \alpha \ \mid \ a \in A\}. \tag{6.0.11}$$

En particular, $\top := \bigvee L$ y $\bot := \bigwedge L$ son el máximo y el mínimo de L respectivamente. Se asume además que $\bot \neq \top$ lo que significa que L tiene por lo menos dos elementos. Un $GL-$monoide (ver [10]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria $\otimes$ constituyéndose en una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, es decir, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$ $\alpha \leqslant \beta$ implica $\alpha \otimes \gamma \leqslant \beta \otimes \gamma$;

(2) $\otimes$ es conmutativa, i.e. $\forall \alpha, \beta \in L$, $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$,

(3) $\otimes$ es asociativa, esto es $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(4) $(L, \leqslant, \otimes)$ es entero, i.e. $\top$ actúa como elemento unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(5) $\bot$ actúa como elemento cero en $(L, \leqslant, \otimes)$, es decir $\alpha \otimes \bot = \bot$, $\forall \alpha \in L$;

(6) $\otimes$ se distribuye sobre extremos superiores arbitrarios, esto significa que $\alpha \otimes (\bigvee_j \beta_j) = \bigvee_j (\alpha \otimes \beta_j)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_j : j \in J\} \subset L$;

(7) $(L, \leqslant, \otimes)$ is divisible, i.e. $\alpha \leqslant \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ tal que $\alpha = \beta \otimes \gamma$.

Por otro lado, todo $GL-$monoide es residuado, i.e. existe una operación binaria adicional $\longmapsto$ (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leqslant \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leqslant (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L. \tag{6.0.12}$$

La implicación está dada por:

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee\{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leqslant \beta\}, \tag{6.0.13}$$

en este punto, Usted puede comparar (5.6.8) y (5.6.9) con (6.0.12) y (6.0.13) respectivamente[2], note además que $\beta \leq (\alpha \longmapsto \beta)$.

[2] En un álgebra de Boole, se tiene que para todo x, y y z, es

$$z \leq (\mathbf{n}(x) \vee y) \quad \text{sí y solamente sí} \quad z \wedge x \leq y,$$

por tanto, $(x \longmapsto y) = \mathbf{n}(x) \vee y$. En lógica clásica, cuando p y q son proposiciones, $p \longmapsto q$ es $\mathbf{n}(p)$ o q.

Las propiedades más usuales de los $GL-$monoides, exhibidas en [10], son

(i) $\alpha \longmapsto \beta = \top \Longleftrightarrow \alpha \leqslant \beta$;

(ii) $\alpha \longmapsto (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i(\alpha \longmapsto \beta_i)$;

(iii) $(\bigvee_i \alpha_i) \longmapsto \beta = \bigwedge_i(\alpha_i \longmapsto \beta)$;

(v) $\alpha \otimes (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i(\alpha \otimes \beta_i)$;

(vi) $(\alpha \longmapsto \gamma) \otimes (\gamma \longmapsto \beta) \leqslant \alpha \longmapsto \beta$;

(vii) $\alpha \otimes \beta \leqslant (\alpha \otimes \alpha) \vee (\beta \otimes \beta)$.

Ejemplos importantes de GL-monoides son las álgebras de Heyting y las MV-álgebras. En verdad (ver [8] y [9]), un *álgebra de Heyting* es un GL-monoide del tipo $(L, \leqslant, \wedge, \vee, \wedge)$, es decir, en un álgebra de Heyting $\wedge = \otimes$; además allí se define la negación de x (cf. [8]) como $\mathbf{n}(x) = (x \longmapsto \bot)$, con base en la definición de $\longmapsto$ en (6.0.12) es,

$$\beta \leq \mathbf{n}(\alpha) \quad \text{sí y solamente sí} \quad \beta \wedge \alpha = \bot,$$

en un álgebra de Heyting, $\mathbf{n}$ satisface entre otras las siguientes propiedades:

1. $\alpha \leq \mathbf{n}(\mathbf{n}(\alpha))$
2. Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathbf{n}(\beta) \leq \mathbf{n}(\alpha)$
3. $\mathbf{n}(\alpha) = \mathbf{n}(\mathbf{n}(\mathbf{n}(\alpha)))$

Por otro lado (ver [10]), un GL-monoide es una *MV-algebra* si

$$(\alpha \longmapsto \bot) \longmapsto \bot = \alpha \quad \forall \alpha \in L. \tag{6.0.14}$$

Así, en una MV-algebra existe una involución $\mathbf{n} : L \to L$ que invierte el orden y que se define de manera natural como

$$\mathbf{n}(\alpha) := \alpha \longmapsto \bot \quad \forall \alpha \in L. \tag{6.0.15}$$

7. De los conjuntos difusos

Si X es un conjunto no vacío y L es un GL-monoide, el conjunto de L-partes de X es

$$L^X := \{f \mid f : X \to L\}$$

L^X hereda la estructura de GL-monoide; esto es, todas las operaciones algebraicas de L pueden ser extendidas puntualmente a L^X como sigue: Para todo $f, g \in L^X$,

1. $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$,

2. $(f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x)$,

en particular, los L-conjuntos 1_X y 0_X definidos por

$$1_X(x) := \top \quad \text{y} \quad 0_X(x) := \bot$$

para todo $x \in X$ son el máximo y el mínimo en L^X respectivamente Ahora, dada $\psi : X \to Y$, ψ produce los operadores $\overrightarrow{\psi_L} : L^X \to L^Y$ y $\overleftarrow{\psi_L} : L^Y \to L^X$ definidos por

$$\overrightarrow{\psi_L}(f)(y) = \bigvee_{x \in \overleftarrow{\psi}(\{y\})} f(x) \quad \text{y} \quad \overleftarrow{\psi_L}(g) = g \circ \psi$$

donde $\overleftarrow{\psi} : \wp Y \to \wp X$ es el operador imagen recíproca usual. Estas ideas y método de trabajo pueden ser extendidas como

1. El operador $\overrightarrow{\overrightarrow{\psi}_{LL}} : L^{(L^X)} \to L^{(L^Y)}$ que se nota por comodidad con $\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1$ y actúa como sigue: Para todo $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y para todo $g \in L^Y$, es

$$\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1(\mathcal{U})(g) = \overrightarrow{\overrightarrow{\psi}_{LL}}(\mathcal{U})(g) = \bigvee_{g = \overrightarrow{\psi_L}(f)} \mathcal{U}(f).$$

2. El operador $\overleftarrow{\overleftarrow{\psi}_{LL}} : L^{(L^X)} \to L^{(L^Y)}$ que se nota por comodidad con $\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2$ y actúa como sigue: Para todo $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y para todo $g \in L^Y$, es

$$\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2(\mathcal{U})(g) = \overleftarrow{\overleftarrow{\psi}_{LL}}(\mathcal{U})(g) = \mathcal{U} \circ \overleftarrow{\psi_L}(g).$$

3. El operador $\overrightarrow{\overleftarrow{\psi}_{LL}} : L^{(L^Y)} \to L^{(L^X)}$ que se nota por comodidad con $\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1$ y está definido así: Para todo $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y para todo $f \in L^X$, es

$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1(\mathcal{V})(f) = \overrightarrow{\overleftarrow{\psi}_{LL}}(\mathcal{V})(f) = \bigvee_{f = \overleftarrow{\psi_L}(g)} \mathcal{V}(g).$$

4. El operador $\overleftarrow{\overrightarrow{\psi}_{LL}} : L^{(L^Y)} \to L^{(L^X)}$ que se nota con $\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2$ y se define así: Para todo $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y para todo $f \in L^X$, es

$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2(\mathcal{V})(f) = \overleftarrow{\overrightarrow{\psi}_{LL}}(\mathcal{V})(f) = \mathcal{V} \circ \overrightarrow{\psi_L}(f).$$

Teorema 7.1. *Los parejas de operadores* $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$, *y* $(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1, \overset{\rightrightarrows}{\psi}_2)$ *son pares adjuntos*[3].

[3] Aunque ya se ha enunciado el concepto de adjunción, aquí lo volvemos a presentar: Sean $f : M \to N$ y $g : N \to M$ morfismos de conjuntos ordenados, se dice que f es adjunto a izquierda de g, que g es adjunto a derecha de f y que (f, g) forman un par adjunto si para $a \in M$ y $b \in N$ se satisface $f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b)$. De manera equivalente, (f, g) es un par adjunto si y solo si $1_M \leq g \circ f$ y $f \circ g \leq 1_N$.

Demostración. Es evidente que los cuatro operadores son morfismos de conjuntos ordenados. Para el caso de $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$ sean $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y $g \in L^Y$, entonces

$$\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1\left(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2(\mathcal{V})\right)(g) = \bigvee_{g=\overrightarrow{\psi_L}(h)} \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2(\mathcal{V})(h) = \bigvee_{g=\overrightarrow{\psi_L}(h)} \mathcal{V}(\overrightarrow{\psi_L}(h)) = \mathcal{V}(g);$$

por otro lado, sean $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y $f \in L^X$ entonces

$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2\left(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1(\mathcal{U})\right)(f) = \overset{\rightrightarrows}{\psi}_1(\mathcal{U})(\overrightarrow{\psi_L}(f)) = \bigvee_{\overrightarrow{\psi_L}(f)=\overrightarrow{\psi_L}(g)} \mathcal{U}(g) \geq \mathcal{U}(f),$$

de donde se sigue que $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$ es un par adjunto. Con respecto al otro par, sean $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y $f \in L^X$ entonces

$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1\left(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2(\mathcal{U})\right)(f) = \bigvee_{\overleftarrow{\psi_L}(h)=f} \mathcal{U}(\overleftarrow{\psi_L}(h)) = \mathcal{U}(f);$$

ahora, si $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y $g \in L^Y$, entonces

$$\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2\left(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1(\mathcal{V})\right)(g) = \overset{\leftleftarrows}{\psi}_1(\mathcal{V})(\overleftarrow{\psi_L}(g)) = \bigvee_{\overleftarrow{\psi_L}(h)=\overleftarrow{\psi_L}(g)} \mathcal{V}(h) \geq \mathcal{V}(g),$$

por tanto, $(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1, \overset{\rightrightarrows}{\psi}_2)$ es un par adjunto. ∎

Haciendo las rextricciones adecuadas, un ejercicio de calistenia es estudiar el par $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$.

7.1. Debilitando el retículo L

El trabajo con GL-monoides se hace bastante agradable gracias a su gran abanico de propiedades, entre ellas la de incluir la implicación (o exponencial), pero para quien estudia esta fenomenología, es imperativo tratar de disminuir el número de condiciones; es así que en [5], el soporte de las teorías son los *retículos cuasi-monoidales completos*; en ese contexto, un retículo cuasi-monoidal completo o *cqm-lattice* es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface:

1. $(L, \leqslant)$ es un retículo completo donde $\top$ denota la cota superior universal y $\perp$ denota la cota inferior universal.

2. $(L, \leqslant, \otimes)$ es un grupoide parcialmente ordenado, i. e. $\otimes$ es una operación binaria sobre L que satisface el axioma de isotonía

$$a \leqslant b \text{ and } c \leqslant d \quad \text{implica} \quad a \otimes c \leqslant b \otimes d.$$

3. $\alpha \leqslant \alpha \otimes \top$, $\alpha \leqslant \top \otimes \alpha$, para todo $\alpha \in L$.

Dados los retículos cuasi-monoidales completos $(L_1, \leqslant_1, \otimes_1)$ y $(L_2, \leqslant_2, \otimes_2)$, un morfismo ϕ entre $(L_1, \leqslant_1, \otimes_1)$ and $(L_2, \leqslant_2, \otimes_2)$ es una función $\phi : L_1 \to L_2$ que satisface:

m1. ϕ conmuta con extremos superiores arbitrarios.

m2. $\phi(\alpha \otimes_1 \beta) = \phi(\alpha) \otimes_2 \phi(\beta)$.

m3. ϕ preserva cotas superiores universales, i. e. $\phi(\top) = \top$.

Tenemos la categoría **CQML** donde los objetos son los retículos cuasi-monoidales completos (cqm-lattices) y los morfismos son los morfismos entre los retículos cuasi-monoidales completos.

Un grupoide parcialmente ordenado $(L, \leqslant, \otimes)$ es un *cl*-grupoide si $\otimes$ se distribuye sobre extremos superiores arbitrarios no vacíos, i. e.

4. Para $J \neq \emptyset$,

$$\left(\bigvee_{j\in J} \alpha_j\right) \otimes \beta = \bigvee_{j\in J} (\alpha_j \otimes \beta) \quad \text{y} \quad \beta \otimes \bigvee_{j\in J} \alpha_j = \bigvee_{j\in J} (\beta \otimes \alpha_j)\,.$$

8. La categoría L – FTOP

Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una *topología L-difusa* sobre X es una función $\tau : L^X \to L$ que satisface:

o1. $\tau(1_X) = \top$,

o2. Para $f, g \in L^X$, $\tau(f) \otimes \tau(g) \leqslant \tau(f \otimes g)$,

o3. Para todo subconjunto $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de L^X se tiene la desigualdad

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \tau(f_\lambda) \leqslant \tau(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda).$$

Si τ es una topología L-difusa sobre X, el par (X, τ) es un espacio topológico L-difuso. Como el conjunto X es no vacío, L^X consiste en por lo menos dos elementos. En particular, el extremo inferior universal en $(L^X, \leqslant)$ está dado por $1_\emptyset$. Cuando tomamos el subconjunto vacío de L^X y aplicamos el axioma o3, obtenemos

o1'. $\tau(1_\emptyset) = \top$.

Dados (X, τ) y (Y, η) espacios topológicos L-difusos; una función $\phi : X \to Y$ es *LF-contínua* sii para toda $g \in L^Y$, ϕ satisface

$$\eta(g) \leqslant \tau(g \circ \phi).$$

Por tanto, tenemos la categoría $\mathbf{L - FTOP}$ donde los objetos son espacios topológicos L-difusos y los morfismos son las funciones LF-continuas.

9. La categoría L – FIL

Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una función $F : L^X \to L$ es un *L-filtro* en X sii F satisface las siguientes propiedades:

F0. $F(1_X) = \top$,

F1. Si $f \leqslant g$, entonces $F(f) \leqslant F(g)$,

F2. Para $f, g \in L^X$, $F(f) \otimes F(g) \leqslant F(f \otimes g)$,

F3. $F(1_\emptyset) = \bot$.

El par (X, F) recibe el conjunto *L-filtrado*. De las propiedades [cf. [7]] de los L-filtros se resaltan las siguientes,

Proposition 9.1. *Si $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una colección de L-filtros en un conjunto fijo X, entonces la función $F = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda : L^X \to L$ definido por $F(g) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda(g)$ es un L-filtro en X.*

En otras palabras, tenemos que la colección $\mathbf{L-FIL}_X$, de todos los L-filtros sobre un conjunto fijo X, es cerrado bajo la formación de extremos inferiores arbitrarios.
Ahora, de un L-filtro $F : L^X \to L$ y de una función $\phi : X \to Y$, obtenemos un L-filtro en Y y una topología L-difusa sobre X como sigue:

Proposition 9.2 (cf. [7]). *Si $F : L^X \to L$ es un L-filtro y $\phi \in Y^X$, entonces*

1. *$G : L^Y \to L$ definido por $G(g) = F(g \circ \phi)$ para toda $g \in L^Y$, es un L-filtro.*

2. *Cada conjunto L-filtrado (X, F) produce un espacio topológico L-difuso $(X, \mathcal{T}_F)$.*

Demostración. 1. G satisface F0 ya que $G(1_Y) = F(1_Y \circ \phi) = \top$, además si $g_1 \leqslant g_2$ en L^Y entonces

$$g_1 \circ \phi \leqslant g_2 \circ \phi \Rightarrow F(g_1 \circ \phi) \leqslant F(g_2 \circ \phi) \Leftrightarrow G(g_1) \leqslant G(g_2)$$

i. e. G satisface F1; con respecto a F2 y F3, sean g_1, g_2 en L^Y, entonces

$$\begin{aligned} G(g_1) \otimes G(g_2) &= F(g_1 \circ \phi) \otimes F(g_2 \circ \phi) \\ &\leqslant F((g_1 \circ \phi) \otimes (g_2 \circ \phi)) \\ &= F((g_1 \otimes g_2) \circ \phi) \\ &= G(g_1 \otimes g_2), \end{aligned}$$

además,

$$G(1_\emptyset) = F(1_\emptyset \circ \phi) = F(1_\emptyset) = \bot.$$

2. Si comparamos las condiciones para L-filtros y LF-topologías, vemos que F1 implica o3: Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un subconjunto de L^X, entonces $f_\lambda \leqslant \bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$; por F1 se tiene que $F(f_\lambda) \leqslant F(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, así
$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F(f_\lambda) \leqslant F(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda).$$
Además, si cambiamos F3 por o1', obtenemos la LF-topología $\mathcal{T}_F$ definida por
$$\mathcal{T}_F(g) = \begin{cases} F(g), & \text{if } g \neq 1_\emptyset, \\ \top, & \text{if } g = 1_\emptyset. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Un *morfismo* $f : (X,F) \to (Y,G)$ entre los conjuntos L-filtrados (X,F) y (Y,G) es una función $f : X \to Y$ tal que para toda $\beta \in L^Y$,
$$G(\beta) \leqslant F(\beta \circ f).$$
En esta dirección, obtenemos la categoría $\mathbf{L-FIL}$ donde los objetos son los conjuntos L-filtrados (X,F) y los morfismos son los exhibidos anteriormente.

Así, si tenemos un conjunto L-filtrado (X,F), obtenemos el espacio LF-topológico $(X,\mathcal{T}_F)$; además, si ϕ es un morfismo entre (X,F) y (Y,G) en $\mathbf{L-FIL}$, la *misma función* ϕ es también un morfismo en $\mathbf{L-FTOP}$. De paso, también se observa que $\phi \neq \psi$ son morfismos en $\mathbf{L-FIL}$ entonces $\phi_* \neq \psi_*$. En otras palabras [cf. [7]],

Proposition 9.3. *La función* $\mathcal{T} : \mathbf{L-FIL} \to \mathbf{L-FTOP}$ *que asigna a cada objeto* (X,F) *de* $\mathbf{L-FIL}$ *el objeto* $(X,\mathcal{T}_F)$ *de* $\mathbf{L-FTOP}$*, y a cada morfismo* ϕ *en* $\mathbf{L-FIL}$ *el morfismo* ϕ_* *en* $\mathbf{L-FTOP}$ *es un functor fiel entre la categoría* $\mathbf{L-FIL}$ *de los conjuntos* L*-filtrados, y la categoría* $\mathbf{L-FTOP}$ *de los espacios* L*-Ftopológicos.*

De la caracterización de la fidelidad dada en [1] tenemos que todo epimorfismo $\phi : (X,F) \to (\hat{X},\hat{F})$ en $\mathbf{L-FIL}$, considerado como una flecha $\mathcal{T}$-estructurada $(\mathcal{T}(\phi),(\hat{X},\hat{F}))$ es generating. Sin embargo, el functor $\mathcal{T}$ no tiene adjunto. Para ver esto, consideramos el conjunto $X = \{a,b\}$ y el objeto $\mathbf{2} = (\{0,1\},\leqslant,\wedge,\vee)$ de la categoría $\mathbf{CQML}$. Los objetos de la fibra sobre X en $\mathbf{2-FIL}$ son (X,F_j) donde, para las funciones características χ_A,

1. $F_1 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definida como $F_1(\chi_A) = 1$ para $A = X$ y $F_1(\chi_B) = 0$ para $B \in \mathbf{2}^X$, $B \neq X$,
2. $F_2 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definida como $F_2(\chi_A) = 1$ para $A = X$ o $A = \{a\}$, y $F_2(\chi_B) = 0$ para $B = \{b\}$ o $B = \emptyset$,
3. $F_3 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definida como $F_3(\chi_A) = 1$ para $A = X$ o $A = \{b\}$, y $F_3(\chi_B) = 0$ para $B = \{a\}$ o $B = \emptyset$.

Los objetos de la fibra sobre X en $\mathbf{2F-TOP}$ son (X,τ_{F_i}), donde τ_i, $i=1,2,3$, son las LF-topologías asociadas a cada uno de los L-filtros anteriores, y $\tau_4:\mathbf{2}^X\to\mathbf{2}$, definido por $\tau_4(\chi_A)=1$ para todo $A\in\mathbf{2}^X$.
Si existiera un functor adjunto $\mathcal{F}$ para $\mathcal{T}$, se tendría la siguiente propiedad para L-filtros y LF-topologías:

$$\mathcal{F}(\tau)\leqslant F\Leftrightarrow\tau\leqslant\mathcal{T}(F)$$

y, en consecuencia:

$$\mathcal{F}(\tau)=\bigwedge\{F\in FIL_X\mid\tau\leqslant\mathcal{T}(F)\};$$

pero en nuestro caso, tenemos que

$$\mathcal{F}(\tau_4)=\bigwedge\{F\in FIL_X\mid\tau_4\leqslant\mathcal{T}(F)\}=\bigwedge\emptyset,$$

i. e. $\mathcal{F}(\tau_4)$ no existe. Sin embargo, $\mathcal{T}$ conmuta con extremos inferiores arbitrarios i. e. si $\{(X,F_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos L-filtrados en X y $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(X,F_\lambda)=(X,\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda)=(X,F)$ entonces

$$\mathcal{T}(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(X,F_\lambda))=\mathcal{T}(X,F)=(X,\mathcal{T}_F).$$

Dado un conjunto unitario $Y=\{p\}$ (cf. [7]), vemos que hay un isomorfismo entre L^Y y L, donde, en particular, 1_Y y $\top$ están identificados. En este contexto podemos definir el L-filtro $\mathbb{F}:L^Y\approx L\to L$ como sigue:

$$\mathbb{F}(g)=\begin{cases}\bot, & \text{si } g\neq 1_Y,\\ \top, & \text{si } g=1_Y.\end{cases}$$

Además,

Proposition 9.4. *El conjunto L-filtrado $(Y,\mathbb{F})$ es un objeto terminal en $\mathbf{L-FIL}$.*

Demostración. Sea (X,F) un conjunto L-filtrado, existe una única función $\phi:X\to Y$; veamos que ϕ produce un morfismo en $\mathbf{L-FIL}$. Para $g\in L^Y$ tenemos que $g=1_Y$ o $g\neq 1_Y$; si $g\neq 1_Y$ entonces

$$\mathbb{F}(g)=\bot\leqslant F(g\circ\phi),$$

si $g=1_Y$ entonces $\mathbb{F}(g)=\top$, por otro lado, $g\circ\phi=1_X$, luego

$$\top=\mathbb{F}(g)\leqslant F(g\circ\phi)=F(1_X)=\top$$

y la conclusión se sigue. ■

Es fácil ver que $(Y,\mathcal{T}_{\mathbb{F}})$ es un objeto terminal en $\mathbf{L-FTOP}$ por tanto, el functor $\mathcal{T}$ preserva objetos terminales.

Bibliografía

[1] ADAMEK, J.; HERRLICH, H.; STRECKER, GEORGE., *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[2] BIRKHOFF, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1940.

[3] CAICEDO, X., *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Una Empresa Docente - Universidad de los Andes, Bogotá, 1990

[4] GOTTWALD, S., *Many-valued logic* In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[5] HÖHle, U.; ŠOSTAK, A., *Fixed-Basis Fuzzy Topologies*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Massachusetts, 1999.

[6] HÖHLE, U., *Commutative, residuated l-monoids* In: Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1995.

[7] JOHNSTONE, P., *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[8] LUNA, J.; OCHOA, C., *L-filters and LF-topologies*, Fuzzy Sets ans Systems, 140 (2003).

[9] MAC LANE, S.; MOERDIJK, I., *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[10] ŠOSTAK, A., *Fuzzy functions and an extension of the category L-Top of Chang-Goguen L-topological spaces*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, Prague, Czech Republic, 2001.