Conteo y fractales

Claudia Patricia Orjuela Osorio
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
cporjuela@pedagogica.edu.co.

Clara Emilse Rojas Morales
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
crojas@pedagogica.edu.co.

Jorge Edgar Páez Ortegón
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jopaez@pedagogica.edu.co.

Resumen

Se presenta una propuesta de enseñanza - aprendizaje alrededor de la geometría fractal[1], por medio de actividades que permiten el estudio de los fractales a partir de un proceso iterativo. El documento muestra en el primer apartado la noción de fractal, seguido de la construcción de fractales clásicos y por último algunas conclusiones.

Con la introducción de los fractales como objeto de estudio, en particular en el aula permiten la exploración e investigación con reglas y estructuras matemáticas muy sencillas pero con resultados de complejidad y belleza extraordinarias. De manera similar se desarrollan procesos de inducción, generalización, elaboración y verificación de conjeturas, entre otros.

En primera instancia se intentará dar solución a la pregunta que aunque obvia pero no fácil de responder, qué es un fractal, retomando un poco de su recorrido histórico, sus características fundamentales y su posible trabajo en el aula de clase.

¿Qué es un fractal?

La idea de fractal, concebida por Mandelbrot (1977), es el punto de partida para el desarrollo de la geometría fractal en el último cuarto de siglo XX, y representa un concepto que ha permitido hablar de una geometría de la naturaleza, para hacer más explicita la afirmación anterior nos permitimos tomar como referencia las primeras palabras del libro Fractals Everywhere de Michael F. Barnsley: "*la geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas, seguir leyendo es peligroso, se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares*".

[1] Geometría fractal, llamada también "geometría de la naturaleza", es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computaciones, los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la matemática tradicional..Mandelbrot (1977).

Se entiende la Geometría Fractal, como un área de investigación reciente en matemáticas cuyo desarrollo se ha visto acelerado gracias a sus inmensas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia y la tecnología. Es un nuevo lenguaje, ya que los puntos, rectas, esferas, elipses y demás objetos de la geometría tradicional son reemplazados por algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos.

Para representar algunos fractales gráficamente, basta encontrar la ley de recursividad entre las formas que se repiten, es decir, mostrando el objeto inicial y la ley de formación, estableciendo el algoritmo que lo genera. La curva que se obtiene cuando se repite este proceso indefinidamente se llama fractal. De esta manera vale la pena aclarar, que los fractales son objetos matemáticos, por tanto lo que usualmente se conoce como fractal es solamente un paso finito de su iteración.

Es sorprendente que actualmente hay en uso diferentes definiciones de fractal, donde cada una de éstas tiene como base las siguientes dos nociones: *autosemejanza* y *dimensión no entera*. En este trabajo se asumirá éstas dos características para definir un objeto fractal.

Ser *autosemejante* significa que si teniendo un objeto, sus partes guardan una semejanza con el todo, prologándose la semejanza con las partes de las partes y así sucesivamente hasta el infinito, es decir, los fractales son objetos que son invariantes en su forma independiente de la escala que se este manejando. Para ser más explicita la afirmación anterior, se dará un ejemplo, si se observa dos fotografías de un objeto fractal con escalas diferentes (una en centímetros y otra en milímetros) sin nada que sirva de referencia para ver cual es el tamaño, no se podría decir cual de las ampliaciones es mayor o si son distintas; los elementos que aparecen vuelven a tener la misma forma independientemente de cual sea el número de veces de ampliación o reducción que se utiliza.

Veamos algunos ejemplos (Figura 1), en los cuales se vea reflejada la autosemejanza.

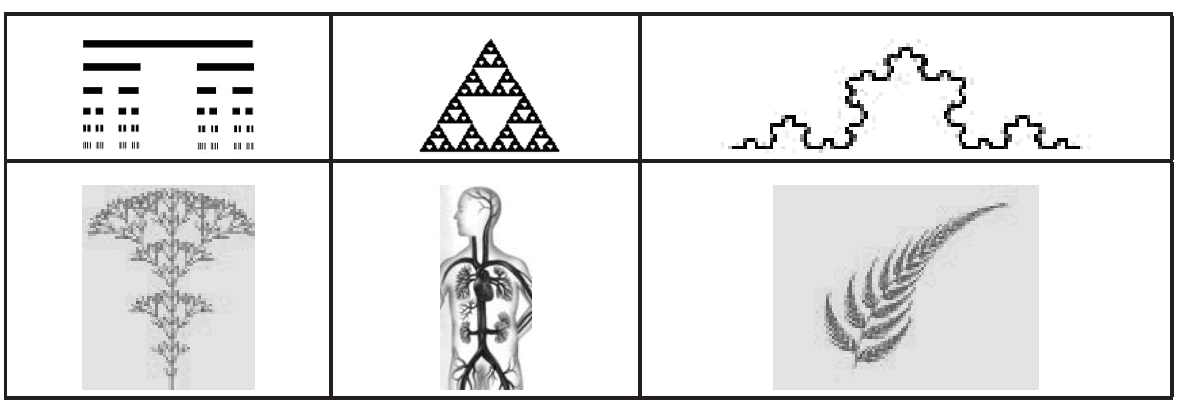

Figura 1.

En cualquiera de las imágenes anteriores cuando se comienza a “sumergirse”dentro de esos objetos siempre va a encontrar exactamente la misma estructura geométrica, sin distorsiones, es decir, objetos en los cuales los detalles más pequeños que lo componen tienen alguna relación con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de una manera infinita. Sin embargo, no toda figura autosemejante es un fractal, es necesario que su dimensión sea no entera.

Antes de que surgiera la geometría fractal se pensaba que todos los objetos existentes en la naturaleza tenían una, dos o tres dimensiones, es decir, se podían representar dentro de una línea, en el plano o en el espacio. De hecho las magnitudes existentes refuerzan esto, longitud para figuras unidimensionales, el área para figuras bidimensionales, o el volumen para figuras tridimensionales. A partir del surgimiento de la geometría fractal se ha reconocido la existencia de figuras con dimensiones distintas de 1, 2 o 3, a lo que se llamó *dimensión no entera*, es decir, objetos geométricos que podían habitar entre la línea y el plano; o entre el plano y el espacio.

Las actividades que se presentan a continuación, se diseñaron como un primer acercamiento a los fractales con el fin que el alumno conozca acerca de algunos fractales clásicos: conjunto de Cantor y Curva de Koch. La manera de construirlos será a partir de actividades en las cuales los estudiantes establezcan la ley de formación, los patrones geométricos y numéricos determinados a partir de la observación y elaboración de sus propias conjeturas, que posteriormente son validadas.

Fractales clásicos

Objetivo:

> *Fomentar un aprendizaje participativo, es decir, que los estudiantes indaguen, representen gráficamente el fractal en cada paso, realicen el conteo en la figura generada consignándolo en tablas, encuentren una expresión que generalice a partir del seguimiento de algoritmos y por último que intuyan y conjeturen lo que sucede al iterar infinitamente el proceso y puedan sacar conclusiones en cada fractal. En esta sesión también se estudiará el algoritmo para construir otros fractales clásicos como triángulo de Sierpinski, Curva de Koch, entre otros.*

Fractales geométricos clásicos

Durante los siglos XIX y XX fueron creados todos los fractales clásicos y fueron tachados de monstruos geométricos por algunos famosos matemáticos de la época como Poincaré. A la larga, alentaron la búsqueda rigurosa de conceptos como infinito, curva continua o dimensión.

El Conjunto de Cantor

Es uno de los fractales más antiguos, toma su nombre de Georg Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo matemático.

Se parte del intervalo $[0, 1]$, se divide en tres partes congruentes, y se quita el tercio central. Quedando dos intervalos cerrados de longitud $1/3$. Ahora, con estos dos intervalos se repite el proceso: cada uno de ellos se divide en tres partes congruentes y se quitan los segmentos centrales (Figura 2).

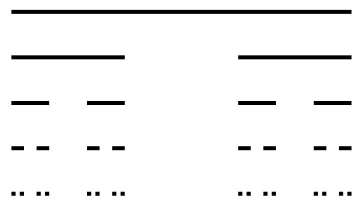

Figura 2.

Completa la tabla: ¿Cuánto suman las longitudes de los segmentos generados en las n

# de iteración	# de segmentos	Longitud	
		Fracción	Total de segmentos
0	1	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$	$2 \times \frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$	$4 \times \frac{1}{9}$
3			
4			
5			
6			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			
$n \to \infty$			

Tabla 1. Conteo en Conjunto de Cantor

primeras etapas? Después de infinitos pasos obtendremos el subconjunto de los números reales que denominamos conjunto de Cantor o polvo de Cantor. Calculemos cuál es la longitud final de los segmentos eliminados sucesivamente:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots =$$

Al llevar el proceso al infinito se tiene un conjunto no numerable de puntos. La dimensión del conjunto de Cantor es aproximadamente 0,63.

El triángulo de Sierpinski:

El matemático polaco Sierpinski introdujo este fractal en 1919. Se parte de un triángulo equilátero. Se divide en cuatro triángulos congruentes, uniendo los puntos medios de los lados. De estos cuatro triángulos, se elimina el triángulo central (Figura 3), resultando tres triángulos a escala 1/2 del original. Se continúa el mismo proceso con los triángulos que quedan.

Figura 3.

# de iteración	# de elementos	Longitud del lado	Perímetro	Área de cada elemento	Área de la figura	Área eliminada
0	1	1	3	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$
2	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{4}$			
3	27	$\frac{1}{8}$	$\frac{81}{8}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(3)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$3(3)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$			
$n \to \infty$						

Tabla 2. Conteo en Sierpinski

Completa la tabla

Al repetir el proceso indefinidamente se obtiene una figura con perímetro infinito y su área tiende a cero.

La dimensión es mayor que 1, es decir, es algo más que un conjunto de segmentos que no llegan a ser un plano.

La alfombra de Sierpinski

Su creador al igual que el caso anterior fue Sierpinski. Se parte de un cuadrado unidad y se divide en nueve cuadrados idénticos eliminando el central (Figura 4). Repitiendo el proceso en cada iteración.

Figura 4.

Completa la tabla:

# de iteración	# de elementos	Longitud del lado	Perímetro	Área de cada elemento	Área de la figura	Área eliminada
0	1	1	4	1	1	0
1	8	1/3				
2						
3						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n						
$n \to \infty$						

Tabla 3. Conteo en alfombra de Sierpinski

La alfombra de Sierpinski es tan porosa que su superficie es nula, esto no parece sorprendente, al menos hasta que se calcula su perímetro, que resulta ser infinito

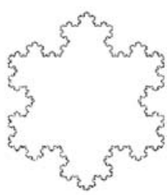

Figura 5.

Su creador Von Koch matemático sueco, en 1904. Se parte de un triángulo equilátero de lado unidad. Cada lado se divide en tres partes congruentes de longitud 1/3. Se sustituye el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un pico (Figura 5). La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch o copo de nieve.

Completa la tabla:

# de iteración	# de lados	Longitud del lado	Perímetro	Área de la figura
0				
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				
$n \to \infty$				

Tabla 4. Conteo en Isla de Koch

La isla de Von Koch ocupa una región limitada del espacio, un área finita y su perímetro es infinito.
Si se toma un trozo cualquiera de dicha figura, se observa que ésta figura no es estrictamente autosemejante a la figura total, pues si tomamos un trozo de la isla no tenemos la isla entera.

Para pasar el tiempo

1. La curva de Kock es una curva continua en todos sus puntos pero no derivable en ninguno.

    a) Describe el algoritmo de construcción

    b) Determina el perímetro y área de éste fractal.

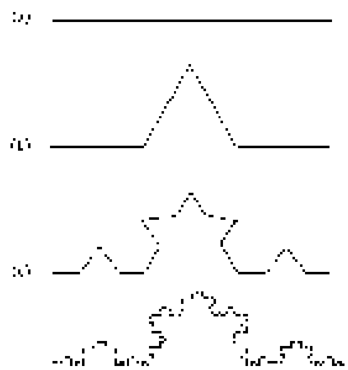

Figura 6.

Conclusiones

El trabajo con los fractales, permite reconocer que las propiedades básicas de los fractales y utilizarlos para el trabajo práctico en el aula, en la cual el papel mediador del docente es primordial, pues es, quien decide el grado de profundización que considere oportuno, tanto en el conocimiento de los fractales como en el nivel de estudio de los elementos conceptuales vistos en clase.

Algunos tópicos que se pueden dar para la exploración y discusión en la clase son el lenguaje asociado con los fractales y su construcción, al describir la regla de formación o ley de recursividad, e indagar sobre la relación entre las partes que se obtienen y el número de iteraciones.

Así mismo, los fractales solo existen en su estado infinito, pero en la práctica nos conformamos con visualizarlos en alguna etapa finita de su construcción. A partir de las representaciones obtenidas en el taller, se desarrollan conceptos matemáticos y geométricos propios del currículo de matemáticas.

Bibliografía

[1] OTTO, H.; JURGENS, H., *Fractals for the classroom, strategic activities.* Vol. 1. New York: Springer Verlag, 1991.

[2] VERA, S., *"Geometría Fractal y Geometría Euclidiana"*. En: Educación y pedagogía. No.35. Vol.XV. (enero-abril), 2003. pp.85-91.