# La cuerda de bertrand: una paradoja sobre asignación de probabilidades

**Felipe Fernández**
*Profesor Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
fjfernandez@uni.pedagogica.edu.co

**Resumen**

Se presentan cuatro casos de asignación de probabilidades para el caso del problema de la cuerda de Bertrand. Dichas asignaciones ponen de manifiesto la existencia de una paradoja en el sentido de que no existe una única asignación de probabilidades si se considera como una asignación clásica de probabilidades en términos geométricos, en la que se respeta la condición de equiprobabilidad.

Joseph Bertrand (1822-1900), en su libro *Calcul des probabilitiés* (1899), publicó numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado depende del método de resolución del problema. Uno de los casos más nombrados es la *Paradoja de Bertrand*. Aquí se presenta el problema que conduce a dicha paradoja y se describen cuatro soluciones, tres basadas en argumentos geométricos de asignación de probabilidades y una, también basada en argumentos geométricos, pero obtenida con base en métodos de simulación.. Se muestra que las soluciones presentadas evidencian que las probabilidades asignadas a un evento dependen del método utilizado para generar el evento y se ilustra la posibilidad de resolver el problema por medio de de simulación. La paradoja en cuestión, como lo señalan (Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991), ilustra una de las varias dificultades inherentes que se presentan en la definición clásica de la probabilidad atribuida a Laplace. La paradoja se genera por el hecho de considerar que si lo aleatorio es determinado por la definición de equiprobabilidad de Laplace, solamente debería haber un conjunto de casos posibles de solución y en consecuencia una única asignación de probabilidad; sin embargo, en lo que sigue, se verá que cada una de las soluciones representa una manera inherente de generar sucesos equiprobables que conducen a asignaciones de probabilidad con diferentes valores.

**Problema.** *Un triángulo equilátero de lado $a$, se inscribe en una circunferencia de radio $R$ y se traza, "al azar", una cuerda sobre la circunferencia.*

*¿Cuál es la probabilidad de que la longitud $s$ del segmento de cuerda comprendido dentro del círculo, sea más grande que la longitud del lado $a$ del triángulo inscrito?*

## Métodos de generación de la cuerda

Cada una de los casos que se exponen representa una posibilidad diferente de trazar de manera "aleatoria"una línea. Los métodos para generarla son:

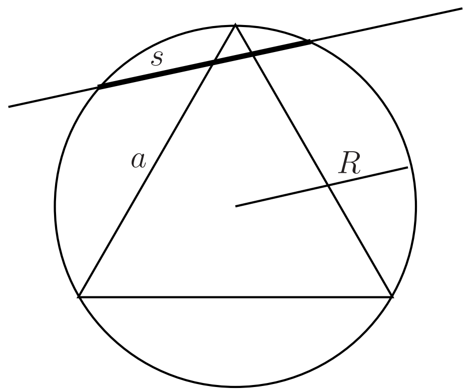



*Figura 1.* Círculo de radio $R$ que muestra un ejemplo de los segmento que se comparan: un segmento de línea $s$ y el lado $a$ del triángulo equilátero inscrito.

Primer caso. Elegir un punto cualquiera $M$ dentro del círculo, y considerar la cuerda perpendicular en $M$ al único radio que pasa por $M$.

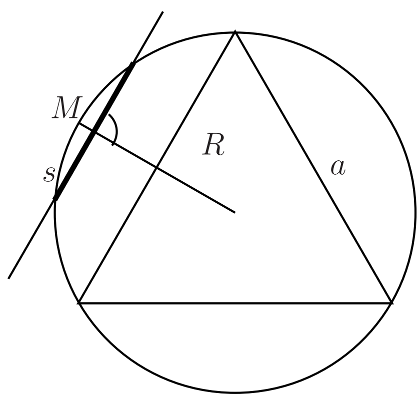



*Figura 2.* Elección del punto $M$ en el primer caso

Segundo caso. Fijar un punto $I$ en la circunferencia y elegir, con distribución uniforme, un punto $M$ del único diámetro $d$ que pasa por el punto $I$. Este punto $M$ determina de forma única una cuerda perpendicular en $M$ al diámetro.

Tercer caso. Fijar un extremo $Q$ de la cuerda en la circunferencia y elegir el otro extremo $P$ con distribución uniforme en la circunferencia.

## Descripción de las soluciones

Para simplificar la exposición supondremos que $R = 1$. Bajo este supuesto se puede deducir que $a = \sqrt{3}$ y que la altura del triángulo equilátero es $\frac{3}{2}$. Utilizaremos estos dos hechos en las soluciones que siguen.

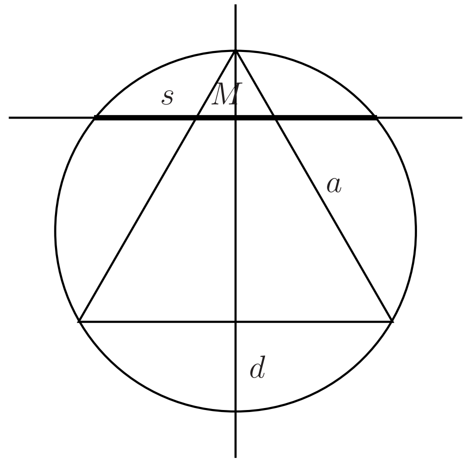



*Figura 3.* Elección del punto $M$ en el segundo caso

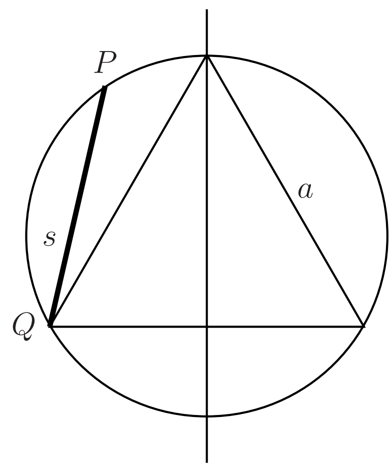


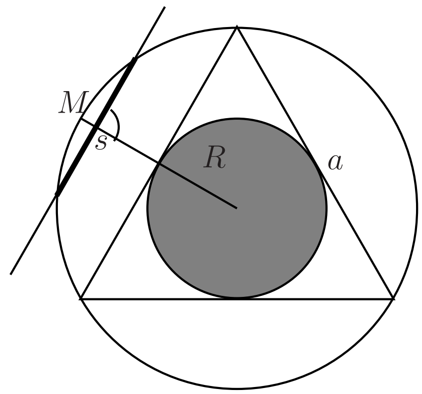

*Figura 4.* Elección de un punto $P$ de la cuerda $PQ$ en el tercer caso

## Primer caso

En este caso tenemos que considerar el círculo inscrito al triángulo equilátero. Si el punto $M$ cae dentro de este círculo la cuerda perpendicular a $OM$ es mayor que el lado del triángulo y viceversa. Por tanto, debemos escoger un punto al azar dentro de una figura de área $\pi$, el círculo de radio 1; para que el resultado sea favorable, dicho punto debe pertenecer a un subconjunto de área $\frac{\pi}{4}$, el círculo inscrito en el triángulo equilátero que posee radio $\frac{1}{2}$. Hay que señalar que en este caso suponemos que subconjuntos con la misma área tienen la misma probabilidad de ocurrir y, en consecuencia, la solución a nuestro problema aplicando la definición de probabilidad geométrica bajo esta hipótesis es de $\frac{1}{4}$.

## Segundo caso

Fijado un punto $I$ en la circunferencia, se elige un punto $M$ del diámetro $d$ y se traza la cuerda $AB$ perpendicular a dicho diámetro. Algunas de las cuerdas que obtenemos por




.

*Figura 5.* En este caso tenemos que considerar el círculo inscrito al triángulo equilátero.

este procedimiento son los segmentos paralelos que se muestran en la Figura . La cuerda será mayor siempre que el punto $M$ se encuentre dentro del segmento $FG$.

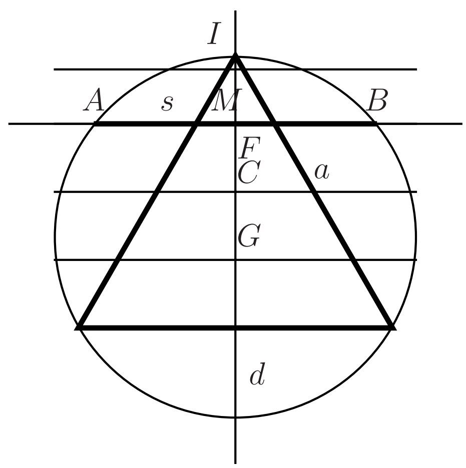



*Figura 6.* Cuerdas perpendiculares al diámetro $d$.

Tanto $OF$ como $OG$ tienen longitud $\frac{1}{2}$ ya que la altura del triángulo equilátero es de $\frac{3}{2}$. Aplicando la definición geométrica de la probabilidad, la probabilidad de que el punto $M$ pertenezca al segmento $FG$ es de $\frac{1}{2}$, pues la medida de $FG$ es 1, mientras que la medida del diámetro $d$ es 2. Nótese que estamos suponiendo la hipótesis de que segmentos con la misma longitud tienen la misma probabilidad de ocurrir.

## Tercer caso

Fijado un punto $Q$ sobre la circunferencia, que suponemos que coincide con un vértice del triángulo equilátero, hemos de seleccionar un punto $P$ sobre la circunferencia y trazar la cuerda $QP$ que los une. Este problema es equivalente a considerar segmentos que parten desde el punto $Q$, como en la Figura de abajo, con final en la circunferencia.

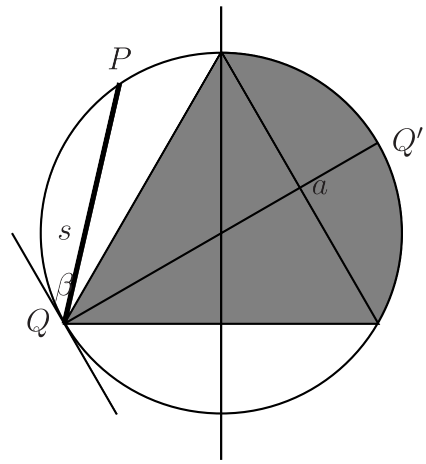



*Figura 7.* La región sombreada representa los segmentos que parten de $Q$ y su otro extremo esta en la circunferencia.

Cada cuerda $QP$ forma un ángulo con el diámetro $QQ'$. La cuerda será mayor que el lado del triángulo siempre que el punto $P$ se encuentre en el arco de circunferencia que está entre $A$ y $B$, los otros dos vértices del triángulo inscrito; o también ,y de manera equivalente, siempre que el ángulo $\beta$ que forma dicha cuerda con la recta tangente a la circunferencia que pasa por $Q$, sea superior a 60º e inferior a 120º.

Otra vez, si se aplica la definición de probabilidad geométrica, y en este caso para la medida angular, debemos seleccionar un ángulo al azar entre 0º y 180º y el resultado es favorable siempre que el ángulo se encuentre entre 60º y 120º. El resultado de la probabilidad es entonces $\frac{1}{3}$. Por último, y en similitud a como se sugirió en los casos anteriores, se ha hecho el supuesto de que sectores con el mismo ángulo tienen la misma probabilidad de ocurrir.

# Algoritmo para una estrategia de simulación

El proceso que se propuso se basa en obtener una pareja de números seudo aleatorios sobre un círculo unitario, medir la longitud de cada uno de los segmentos generados y comparar dicha longitud con el valor $\sqrt{3}$ y hacer un cociente entre el número de casos posibles y el número de cuerdas generadas por medio del método de simulación. Denotaremos esta pareja de puntos como $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$. La secuencia detallada de pasos es el siguiente:

1. Se genera "aleatoriamente"y de manera uniforme un número en el intervalo abierto $(-1, 1)$; este valor lo asignamos a $x_1$.

2. Se calcula, con la fórmula cartesiana del círculo unitario, el valor absoluto de $y_1$ en función del valor $x_1$, obtenido en el paso 1.

3. Se genera "aleatoriamente"de manera uniforme un número en el intervalo $(-1, 1)$; para decidir el signo de $y_1$, si el número es mayor que cero se asigna un valor positivo

a $y_1$, sino se le asigna un valor negativo, excepto cuando el número inicialmente generado fuera cero, en cuyo caso se hace $y_1 = 0$.

4. Se repite el proceso anterior para generar la pareja $(x_2, y_2)$

5. Se calcula la distancia euclidiana entre $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ y se compara con el valor $\sqrt{3}$; si la distancia calculada es mayor que $\sqrt{3}$, entonces el resultado se considera favorable.

6. Se recuenta después de $n$ "simulaciones"el número de casos favorables sobre el número de simulaciones y el resultado es la probabilidad del evento pedido.

# Resultados de la simulación

Al final se anexa una tabla con un ejemplo de posibles resultados de asignaciones de probabilidad frecuencial al generar la simulación con $n = 2000, 4000$ y luego 12000 cuerdas de Bertrand. Obsérvese que las probabilidades obtenidas son estables hasta el segundo decimal y presentan variaciones menores que 0,004 en el tercer decimal, lo cual sugiere una precisión aceptable al menos de dos decimales, como convergente hacia una probabilidad teórica, pero no establecida formalmente en esta discusión, bajo una asignación clásica de probabilidades en términos de medidas de áreas.

En la parte inferior de la tabla en la que se ilustra la simulación, se describen las instrucciones con base en las que se generaron las cuerdas, tal como se escribieron en el lenguaje de Excel. Por otra parte, en las cuatro últimas columnas, debajo del lugar en donde se presentaron los resultados de las probabilidades de la simulación, se exhibe la implementación de un mecanismo de control, con base en el cual se verifica que las coordenadas de los puntos generados guardan una relación aproximada de 1 a 4, de acuerdo con la ubicación del punto generado en alguno de los cuatro cuadrantes o sectores circulares que conforman el círculo unitario. En efecto, puede observarse que la máxima diferencia entre las probabilidades frecuenciales o empíricas con respecto a las probabilidades de asignación clásica, es decir la de $\frac{1}{4}$ es de 0,005. Este hecho justifica, al menos de manera numérica o estadística, que la generación de las cuerdas sigue un patrón aleatorio y equiprobable.

# Discusión y conclusiones

Con la "Cuerda de Bertrand"se ha planteado un problema de asignación de probabilidades que podemos resolver de diferentes maneras obteniendo soluciones con diferentes valores. Se ha evidenciado de esta manera un resultado que es paradójico si se interpreta desde el punto de vista de una asignación clásica de probabilidad.

También debe señalarse que las soluciones que se han ilustrado aquí, son quizás las más conocidas y elementales; sin embargo, existen más y diferentes métodos de construcción de soluciones. De hecho, asociado a cada uno de los tres métodos propuestos puede definirse un mecanismo de simulación a través del cual se podría verificar de manera empírica, los resultados de las asignaciones probabilidad obtenidas desde una perspectiva clásica.

El cuarto resultado, el que se obtiene con el método de simulación, sirve para contrastar con las tres soluciones presentadas en varios sentidos. Por un lado, aunque fue construida por medio de un enfoque frecuentista, está también basada en un método geométrico de generación de cuerdas, no equivalente a los tres presentados. Ello se puede sustentar en parte, si se observa que el resultado de la simulación no sugiere una convergencia hacia alguno de los resultados de asignación de probabilidad derivados de los tres métodos inicialmente presentados.

La pregunta que se debe discutir es dónde radica la paradoja y cuál es la solución al problema? La paradoja radica en qué es lo que consideramos por trazar una cuerda "al azar ". En el problema de Bertrand, distintos métodos de seleccionar una cuerda "al azar"conducen a diferentes medidas de probabilidad no equivalentes. En realidad, las distribuciones de probabilidad no son objetivas ya que siempre que definamos una medida de probabilidad, dicha medida de probabilidad se basa en un conjunto de hipótesis. El concepto de probabilidad clásico o de Laplace se basa en la equiprobabilidad de los resultados elementales. Sin embargo, este método sólo es aplicable para espacios muestrales finitos. El concepto de probabilidad geométrica, generaliza el concepto de probabilidad de Laplace, en el sentido de que conjuntos que posean la misma medida geométrica deben de tener la misma probabilidad y de esta manera podemos generalizar la probabilidad para aplicarla a espacios infinitos. Sin embargo, no es una generalización objetiva, pues todo depende de que medida consideremos, como hemos visto aquí. De igual manera sobre un conjunto finito de elementos podemos definir otras medidas de probabilidad, basándonos en otras hipótesis, no coincidentes con la probabilidad clásica o de Laplace.

Finalmente, en cuanto al interrogante de cual sería la verdadera solución al problema o si es mejor una solución que otra, la respuesta es que ninguna y todas. El interrogante formulado sería equivalente a preguntarse acerca de todas las distribuciones de probabilidad que podemos asignar sobre un conjunto finito de números, digamos del 0 al 9, o sobre los números enteros positivos, ¿cuál es la mejor? No existe una respuesta a esta pregunta. Cada asignación de probabilidad se basa en un conjunto de hipótesis diferentes que nos determinan unas medidas de probabilidad diferente. Nosotros deberemos saber cuales son estas hipótesis y ver cuales de ellas están en mejor consonancia con el problema real que queremos resolver.

# Bibliografía

[1] BERTRAND, J., *Calcul des Probabilités*. Paris: Gauthier-Villars, 1899.

[2] BOROVCNIK, M.; BENTZ, H.; KAPADIA, R., *A Probabilistic Perspective.* En R. 1991.

[3] KAPADIA.; BOROVCNIK, M., (Eds.) *Chance encounters: probability in education*, pp. 27-71. London: Kluwer Academic Publishers.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Con | P1 x | P1y+ | sig | P1 y | R | P2 x | P2y+ | sig | P2y | R |
| 2 | 1 | -0,585 | 0,811 | -0,9 | -0,811 | 1 | -0,273 | 0,962 | -0,2 | -0,962 | 1 |
| 3 | 2 | 0,883 | 0,469 | 0,0 | -0,469 | 1 | 0,647 | 0,762 | -0,4 | -0,762 | 1 |
| 4 | 3 | -0,551 | 0,834 | -0,6 | -0,834 | 1 | -0,780 | 0,625 | 0,3 | 0,625 | 1 |
| 5 | 4 | -0,592 | 0,806 | -0,9 | -0,806 | 1 | -0,400 | 0,917 | -0,5 | -0,917 | 1 |
| 6 | 5 | 0,377 | 0,926 | 0,1 | 0,926 | 1 | -0,234 | 0,972 | -0,4 | -0,972 | 1 |
| 7 | 6 | -0,180 | 0,984 | 0,3 | 0,984 | 1 | -0,082 | 0,997 | 0,9 | 0,997 | 1 |
| 8 | 7 | 0,258 | 0,966 | 0,3 | 0,966 | 1 | -0,920 | 0,392 | -0,3 | -0,392 | 1 |
| 9 | 8 | 0,946 | 0,325 | -0,3 | -0,325 | 1 | -0,382 | 0,924 | 0,7 | 0,924 | 1 |
| 10 | 9 | 0,616 | 0,788 | 0,7 | 0,788 | 1 | 0,411 | 0,912 | 0,4 | 0,912 | 1 |
| 11 | 10 | 0,754 | 0,657 | -0,6 | -0,657 | 1 | 0,001 | 1,000 | 0,8 | 1,000 | 1 |
| 12 | 11 | 0,913 | 0,409 | 0,3 | 0,409 | 1 | 0,243 | 0,970 | 0,9 | 0,970 | 1 |
| 13 | 12 | -0,555 | 0,832 | 0,4 | 0,832 | 1 | -0,803 | 0,596 | -0,9 | -0,596 | 1 |
| 14 | 13 | -0,663 | 0,749 | -0,5 | -0,749 | 1 | 0,308 | 0,951 | -0,5 | -0,951 | 1 |
| 15 | 14 | 0,964 | 0,266 | 0,5 | 0,266 | 1 | -0,222 | 0,975 | -0,7 | -0,975 | 1 |
| 16 | 15 | -0,055 | 0,999 | 0,1 | 0,999 | 1 | 0,380 | 0,925 | 0,7 | 0,925 | 1 |
| 17 | 16 | 0,247 | 0,969 | -0,8 | -0,969 | 1 | -0,189 | 0,982 | -0,1 | -0,982 | 1 |
| 18 | 17 | -0,851 | 0,525 | 0,8 | 0,525 | 1 | 0,536 | 0,844 | -0,7 | -0,844 | 1 |
| 19 | 18 | -0,225 | 0,974 | 0,0 | 0,974 | 1 | 0,492 | 0,871 | 0,4 | 0,871 | 1 |

| L | M | N | O | P | V | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D(P1,P2) | R(3) | D>R(3) | c1 | c2 | c4 | | | | |
| 0,346 | 1,732 | 0 | 0 | 0 | 0 | P(seg>a) | | | |
| 0,377 | 1,732 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,36700 | n=2000 | | |
| 1,477 | 1,732 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,36450 | n=4000 | | |
| 0,222 | 1,732 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,36550 | n=12000 | | |
| 1,994 | 1,732 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | |
| 0,098 | 1,732 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | |
| 1,798 | 1,732 | 1 | 1 | 0 | 0 | Con P1 | Emp | Teor | Dif-Abs |
| 1,823 | 1,732 | 1 | 0 | 0 | 0 | Cuad 1 | 0,25025 | 0,25 | 0,0002 |
| 0,239 | 1,732 | 0 | 1 | 0 | 0 | Cuad 2 | 0,24825 | 0,25 | 0,0018 |
| 1,820 | 1,732 | 1 | 0 | 0 | 0 | Cuad 3 | 0,24642 | 0,25 | 0,0036 |
| 0,873 | 1,732 | 0 | 1 | 0 | 0 | Cuad 4 | 0,25508 | 0,25 | 0,0051 |
| 1,449 | 1,732 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 1,00000 | | |
| 0,992 | 1,732 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 1,717 | 1,732 | 0 | 1 | 0 | 0 | Con P2 | Emp | Teor | Dif-Abs |
| 0,440 | 1,732 | 0 | 0 | 1 | 0 | Cuad 1 | 0,24558 | 0,25 | 0,0044 |
| 0,437 | 1,732 | 0 | 0 | 0 | 0 | Cuad 2 | 0,25567 | 0,25 | 0,0057 |
| 1,949 | 1,732 | 1 | 0 | 1 | 1 | Cuad 3 | 0,25400 | 0,25 | 0,004 |
| 0,724 | 1,732 | 0 | 0 | 1 | 0 | Cuad 4 | 0,24558 | 0,25 | 0,0044 |

*CONVENCIONES*
R(3)=Raíz(3)
Con=Control
Cuad=Cuadrante
Emp=Empírico
Teor=Teórico
*Instrucciones para Excel (OfficeXP)*

$A2 := 1(yA3 := A2 + 1) \rightarrow$ Contador del número de simulaciones.

$B2 := 2 * ALEATORIO() - 1 \rightarrow$ Genera número "pseudoaleatorio"entre -1 y 1; su valor es la coordenada $x_1$.

$C2 := RAIZ(1 - B2 * B2) \rightarrow$ Calcula coordenada $y_1$ en un círculo trigonométrico "sin signo".

$D2 := 2 * ALEATORIO() - 1 \rightarrow$ Genera número "pseudoaleatorio"entre -1 y 1 para decidir signo de $y_1$.

$E2 := SI(D2 < 0; -C2; C2) \rightarrow$ Condicional que asigna el signo de $y_1$.

$F2 := B2 * B2 + E2 * E2 \rightarrow$ Verificación de que $(x_1, y_1)$ en el círculo de radio 1 y centro $(0, 0)$.

$G2 := 2 * ALEATORIO() - 1 \rightarrow$ Genera número "pseudoaleatorio"entre -1 y 1; su valor es la coordenada $x_2$.

$H2 := RAIZ(1 - G2 * G2) \rightarrow$ Calcula coordenada $y_2$ en un círculo trigonométrico "sin signo".

$I2 := 2 * ALEATORIO() - 1 \rightarrow$ Genera número "pseudoaleatorio"entre -1 y 1 para decidir signo de $y_2$.

$J2 := SI(I2 < 0; -H2; H2) \rightarrow$ Condicional que asigna el signo de $y_2$.

$K2 := G2 * G2 + J2 * J2 \rightarrow$ Verificación de que $(x_2, y_2)$ está en el círculo de radio 1 y centro $(0, 0)$.

$L2 := RAIZ((B2 - G2) * (B2 - G2) + (E2 - J2) * (E2 - J2)) \rightarrow$ Distancia entre el par de puntos generados.

$M2 := RAIZ(3) \rightarrow$ Calcula la raíz de 3.

$N2 := SI(L2 > M2; 1; 0) \rightarrow$ Condicional que mira si cuerda es mayor que lado del triángulo, 1 verdad, 0 falso.

$O2 := SI(Y(B2 > 0; E2 > 0); 1; 0) \rightarrow$ Se mira si el punto está en el primer cuadrante, 1 verdad, 0 = falso.

$P2 := SI(Y(B2 < 0; E2 > 0); 1; 0) \rightarrow$ Se mira si el punto está en el segundo cuadrante, 1 verdad, 0 = falso.