Una visión alternativa de las relaciones entre conjuntos

José Ángel Bautista
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jangel@uni.pedagogica.edu.co

Oscar Molina Jaime
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ojmolina@uni.pedagogica.edu.co

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

En el desarrollo intuitivo de la teoría de conjuntos es usual partir de nociones como la de conjunto y la de pertenencia, para con ellas establecer relaciones entre conjuntos y colecciones, como la contenencia y la igualdad, construyendo con éstas nuevos conjuntos como el de partes y el producto cartesiano.
Pretendemos en este escrito presentar un desarrollo análogo al de las relaciones entre conjuntos, nombradas anteriormente, utilizando la estructura de sus definiciones pero cambiando los conectores; por ejemplo, retomando la definición de contenencia, y reemplazando el conector $\wedge$ por alguno de los otros 15, de lógica bivalente.
Con ello deseamos presentar una visión alternativa acerca de la teoría de conjuntos, abriendo nuevas posibilidades de estudio de la misma, generando inquietudes sobre los conceptos usuales de relación, función, etc., que surgen de los resultados que se pueden obtener a partir de un análisis reflexivo sobre el desarrollo que presentamos.

Introducción

Alrededor de cualquier teoría matemática, se ha visto la necesidad de construir un lenguaje que permita expresar sin ambigüedades, todos los conceptos, definiciones, teoremas, relaciones y en si hechos de la teoría; sin embargo, esto conlleva una debilidad estructural, por la razón de que no todos los conceptos usados pueden definirse. Supongamos, por ejemplo, que definimos el término *Conjunto*: "Un *conjunto* es una colección bien definida de objetos". Es necesario preguntarse de inmediato el significado de *colección*. Quizá definamos entonces: "Una *colección* es un agregado de cosas". ¿Y que es un agregado? Ahora, como nuestro lenguaje es finito, después de algún tiempo se nos acabaran las palabras nuevas y tendremos que repetir algunas de las ya cuestionadas. Entonces, la definición es circular y, obviamente, carece de sentido.

Si deseamos comenzar un estudio pretendiendo suponer lo menos posible y tratando de fijar los significados de cada una de las palabras que usamos, una opción bastante corriente es iniciar con la palabra *conjunto*, viéndola como una noción primitiva que no discutimos, y *pertenece*, como la noción que permite establecer si dado un elemento (que notaremos con letras minúsculas) y un conjunto (que notaremos con letras mayúsculas), el elemento pertenece (que notamos con el símbolo) o no al conjunto, en símbolos:

$$x \in A \text{ o } x \notin A$$

Ahora, si A es un conjunto y x es un objeto, decimos que A *esta bien definido* si podemos afirmar que x pertenece o no al conjunto.

Además de las definiciones intuitivas de conjunto y pertenencia, tomaremos como base la axiomática de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel[1], y particularmente la existencia del conjunto vació (notado $\emptyset$) y de conjuntos referenciales o universales (notados X)

A continuación presentaremos en primera instancia, las relaciones de contenencia y de igualdad, y a partir de ellas algunas como las de conjunción y disyunción, entre otras.

1. Relaciones entre conjuntos y partes de A

1.1. Contenencia de conjuntos y partes de A

Sea X el conjunto de referencia. Un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B si y sólo si todo elemento de A es elemento de B y se nota $A \subset B$. En símbolos se tiene

$$(A \subset B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \rightarrow x \in B))$$

Por ejemplo, si tomamos el conjunto de los números naturales, encontramos que los números pares forman un subconjunto de $\mathbb{N}$, los múltiplos de 17 forma otro subconjunto de $\mathbb{N}$.

Al trabajar con conjuntos y con las relaciones y operaciones entre ellos, es útil disponer de un sistema de representación gráfica que permita visualizar lo que ocurre e interpretar con diagramas las deducciones lógicas correspondientes.

El procedimiento usual[2] consiste en dibujar rectángulos, círculos u otras figuras geométricas, según un procedimiento que se conoce como "diagramas de Venn", o "diagramas de Venn - Euler[3]". Particularmente la figura 1correspondiente a la contenencia $A \subset B$, es: La contenencia, y por tanto la definición de subconjunto, permite construir un nuevo conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de un conjunto dado. Al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A se le llama *el conjunto*[4] *de partes de* A y se nota $\wp(A)$, en símbolos

$$\wp(A) = \{B : B \subset A\}$$

[1]ZEHNA P., JOHNSON R., Elements of set theory. Allyn and Bacon, Inc. Estados Unidos, 1975.

[2]Otro método distinto al de Venn Euler, se conocen como gráficos existenciales Alfa, Beta y Gama de Peirce (1839-1914), los cuales proporcionan un enfoque novedoso para presentar y controlar el cálculo preposicional clásico, y por ende pueden aplicarse para el calculo de predicados. (Zalamea F., Lógica topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. 1997)

[3]En honor del matemático y lógico inglés John Venn (1834-1882), quien perfeccionó la idea original del matemático suizo Leonardo Euler (1707-1783).

[4]La existencia del conjunto de partes de un conjunto, esta justificado por el axioma del conjunto potencia dentro de la axiomatización de la teoría de conjuntos propuesta por E. Zermelo (1908), la cual tomaremos como referencia y estudiaremos posteriormente.

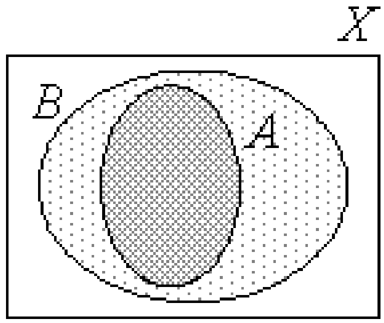

Figura 1: Diagrama de Venn para la contenencia $A \subset B$

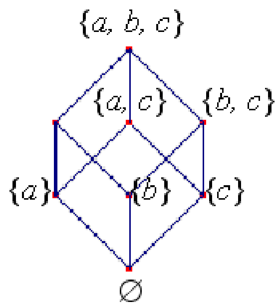

Figura 2: Diagrama de Hesse para $\wp(A)$

Ejemplo:

Formemos el conjunto de partes del conjunto $A = \{a, b, c\}$, con $X = \{a, b, c, d, e\}$

Como con cada elemento podemos formar un subconjunto de un elemento y con cada dos elementos podemos formar un subconjunto con dos elementos, y además tanto el conjunto $\emptyset$ como el conjunto A son subconjuntos de A, entonces el conjunto partes de A, esta dado por:

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Representando gráficamente el conjunto de subconjuntos de un conjunto dado, por medio de los diagramas de *Hasse*(Figura 2)[5] (o también llamados lattices), tenemos En donde se observa que la contenencia define una relación de orden parcial en $\wp(A)$.

Con base en lo anterior, también, se observan conjuntos con los mismos elementos, luego se da lugar a la definición de igualdad entre conjuntos.

1.2. Igualdad de conjuntos y conjunto de partes de $\wp(A)$

Dados los conjuntos A y B, en X, se define la igualdad entre conjuntos a partir del conector $\leftrightarrow$, a saber

$$(A = B) \text{ si y sólo si } ((\forall x \in X)(x \in A \leftrightarrow x \in B))$$

[5]WOLF, R., Proof, logic and conjecture. The mathematician's toolbox. W. H. Freman and Company, New Cork, 1997.

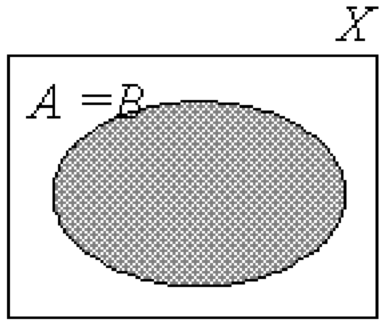

Figura 3: Diagrama de Venn para la igualdad $A = B$

de tal definición se infiere que la relación de igualdad puede expresarse a partir de la contenencia:

$$(A = B) \text{ si y sólo si } (A \subset B \text{ y también } B \subset A)$$

En la figura 3 se muestre el diagrama de Venn que representa estal relación de igualdad. Es costumbre hablar sólo del conjunto de partes que se genera a partir de la definición de contenencia, buscando los subconjuntos de un conjunto dado, sin embargo ¿Por qué no hablar del conjunto de conjuntos iguales a uno dado?

Aunque resulta trivial buscar los conjuntos en X que son iguales a uno dado A, puesto que el único conjunto igual a A es A, es interesante hacer el ejercicio, además de que permite construir un nuevo conjunto. Al conjunto de partes de A por doble implicación, lo notaremos $\wp_{\leftrightarrow}(A)$.

Es de observar que la igualdad entre conjuntos es una relación de equivalencia en $\wp_{\leftrightarrow}(A)$.

Al ser usual el estudio de las relaciones de contenencia e igualdad, se dejan como transparentes los significados de cada una de ellas, por lo que no hacemos un análisis minucioso acerca de la estructura de las definiciones de estas relaciones; sin embargo, estas son sólo un caso particular de una situación general : Una expresión de la forma

$$((\forall x \in X)(x \in A \copyright x \in B))$$

donde $\copyright$ es un conector lógico cualquiera[6].

Es de notar que para el caso de la contenencia, el conector empleado es la implicación $(\rightarrow)$, y para la igualdad es la doble implicación $(\leftrightarrow)$, pero ¿Qué significado tendría la expresión anterior si utilizamos los conectores $\wedge$ y $\vee$?

1.3. Conjunción de conjuntos y partes de A

Sean A y B elementos del conjunto de referencia X, definamos la *conjunción universal* a partir de $\wedge$, como:

$$(A \subset_{\wedge} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \wedge x \in B))$$

[6] Aunque es posible utilizar cualquier conector lógico, nos limitaremos a trabajar los definidos en lógica bivalente.

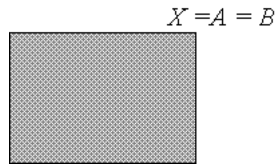

Figura 4: Diagrama de Venn para la conjunción universal

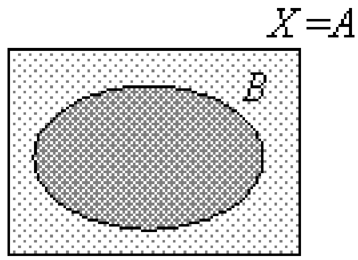

Figura 5: Diagrama de Venn para dos conjuntos que no están en conjunción universal

Hemos utilizado el símbolo $\subset_\wedge$ en vez de $\subset$, con el motivo de hacer alusión a que se ha usado el conector $\wedge$ en lugar[7] de $\rightarrow$.

De esta definición, podemos interpretar que si $A \subset_\wedge B$ entonces todo elemento de A debe ser también elemento de B y todo elemento de B debe ser también elemento de A, luego $A = B$ (con la definición de igualdad usual), además, en A tienen que estar todos los elementos del universo, ¿por qué?.

La figura 4 muestra la representación en diagramas de Venn de la conjunción universal entre conjuntos. Un ejemplo del diagrama de Venn para dos conjuntos que no están en conjunción universal (A y B) es el mostrado en la figura 5 De manera similar a lo realizado con la contenencia y la igualdad, también para la conjunción es posible construir el conjunto de todos los conjuntos que están en conjunción con A, al cual llamaremos conjunto de partes por conjunción, que notamos $\wp_\wedge(A)$.

Ejemplo:

Si retomamos el conjunto $A = \{a, b, c\}$, con $X = \{a, b, c, d, e\}$, por la definición de conjunción universal, tenemos que

$$\wp_\wedge(A) = \emptyset$$

Sin embargo

$$\wp_\wedge(X) = \{X\}$$

1.4. Disyunción de conjuntos y partes de A

Ahora utilicemos el conector lógico $\vee$, y definamos la *disyunción universal* como:

$$(A \subset_\vee B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \vee x \in B))$$

[7]El subíndice no se colocara cuando el conector sea $\rightarrow$

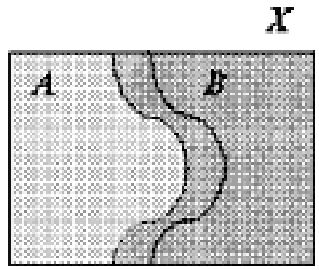

Figura 6: Diagrama de Venn para la conjunción universal entre A y B

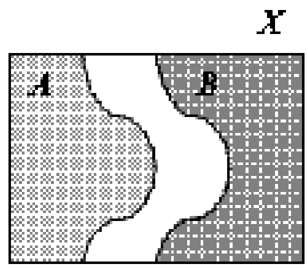

Figura 7: A y B no están en conjunción universal

Para determinar bajo qué condiciones un conjunto A esta en disyunción universal con otro B, es mejor si observamos cuándo tal expresión no es cierta, es decir:

$$\begin{aligned} A \not\subset_{\vee} B \leftrightarrow & \neg((\forall x \in X)(x \in A \vee x \in B)) \\ \leftrightarrow & (\neg(\forall x \in X)\neg(x \in A \vee x \in B)) \\ \leftrightarrow & ((\exists x \in X)(x \notin A \wedge x \notin B)) \end{aligned}$$

De donde un conjunto A esta en disyunción universal con otro B, si todos los elementos del universo están en A o en B, es decir en su unión.

Un hecho interesante que surge de tal definición, es que el conjunto universal esta en disyunción universal con todo conjunto en él, pero el conjunto vacío no.

La representación en diagramas de Venn para la conjunción universal entre los conjuntos A y B se muestra en la figura 6 Un ejemplo del diagrama de Venn para dos conjuntos (A y B) que no están en conjunción universal es como en la figura 7 El conjunto partes de A por disyunción universal, es decir el conjunto de conjuntos que están en disyunción con A, lo notamos $\wp \vee (A)$.

Ejemplo:

Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ el conjunto universal, determinemos el conjunto de partes por disyunción del conjunto vacío:

Atendiendo a la definición de disyunción universal, sabemos que el único conjunto que esta en disyunción con $\emptyset$ es X, luego

$$\wp_{\vee}(\emptyset) = \{X\}$$

De manera similar, para $A = \{a, b, c\}$, $\wp_\vee(A)$ es el conjunto

$$\{X, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}\}$$

Es de notar que en $\wp_\vee(A)$ aparece el mismo número de elementos que en el conjunto de partes usual. *¿Cómo se sabe el número de elementos del conjunto de partes por disyunción, para un conjunto dado?*

De la definición de disyunción universal se tiene que

$$\wp_\vee(X) = \wp(X)$$

Ahora, *¿la conjunción y la disyunción universal entre conjuntos definen relaciones de orden o de equivalencia?*

1.5. Otras relaciones

Hasta el momento hemos utilizado 4 de los 16 conectores definidos en lógica bivalente, para establecer relaciones entre conjuntos, como la relación de contenencia (conector 13) igualdad (conector 9), conjunción (conector 1) y disyunción (conector 7), y a partir de ellas construimos conjuntos de partes; enseguida presentaremos algunas relaciones que utilizan los restantes conectores, y dejamos la construcción del conjunto de partes al lector.

1.5.1. Con el conector 2

Utilizando el conector lógico 2 es decir[8]:

© $_2$	0	1
0	0	0
1	1	0

definimos la *relación* © $_2$ *universal* como:

$$(A \subset_{©_2} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A ©_2 x \in B))$$

Para determinar bajo qué condiciones un conjunto A esta en © $_2$ universal con otro B, utilizamos la tabla de verdad del conector lógico, de tal forma que los elementos 0 y 1 del encabezado vertical representen a los elementos $a \notin A$ y $a \in A$ respectivamente, mientras que los elementos 0 y 1 del encabezado horizontal representen a los elementos $b \notin B$ y $b \in B$ respectivamente(Véase figura 8). De ella podemos observar que un conjunto A esta en © $_2$ universal con otro B, cuando todo elemento de X esta en A pero no en B, es decir cuando $A = X$ y $B = \emptyset$ (figura 9.

1.5.2. Con el conector 3

Definimos la *relación* © $_3$ *universal* como:

$$(A \subset_{©_3} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A ©_3 x \in B))$$

Cuya representación grafica es la mostrada en la figura 10

[8] El número de la operación corresponde en la tabla a un número de 4 cifras escrito en base 2, dispuestas en la forma matricial a_{00}, a_{01}, a_{10} y a_{11}.

$$\begin{array}{ccc} & & \overbrace{\qquad\qquad}^{B} \end{array}$$

$$A\left\{\begin{array}{c|cc} \copyright_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

Figura 8: La relación $\copyright_2$

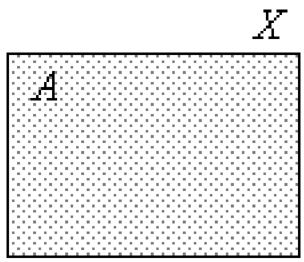

Figura 9: A esta en $\copyright_2$ universal con otro B...

Es de observar que $A\copyright_3 B$ cuando $A = X$ y $B \subset A$.

1.5.3. Con el conector 6 o $\veebar$

Definimos la *relación* $\veebar$ *universal* como:

$$(A \subset_{\veebar} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \veebar x \in B))$$

Cuya representación grafica es como en la figura 11: Es de notar que $A \subset_{\veebar} B$ cuando $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$

1.5.4. Con el conector 11

Definimos la relación $\copyright_{11}$ universal como:

$$(A \subset_{\copyright_{11}} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \copyright_{11} x \in B))$$

Cuya representación grafica es como en la figura **??**. De la definición, $A \subset_{\copyright_{11}} B$ cuando $B - A = \emptyset$, es decir $B \subset A$.

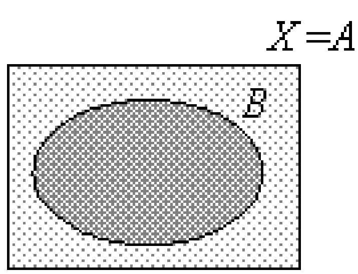

Figura 10: La relación $\copyright_3$ universal

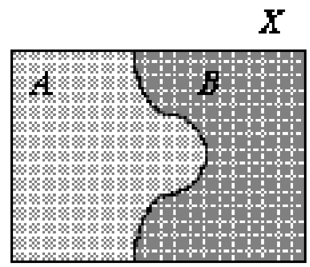

Figura 11: La relación $\veebar$ universal

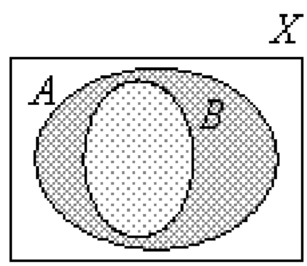

Figura 12: La relación $\copyright_{11}$ universal

1.5.5. Con el conector 14

Definimos la *relación* $\copyright_{14}$ *universal* como:

$$(A \subset_{\copyright_{11}} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \copyright_{11} x \in B))$$

Cuya representación grafica es la dada en la figura 13. Es de notar que $A \subset_{\copyright_{14}} B$ cuando $A \cap B = \emptyset$.

1.6. Operaciones en $\wp_{\copyright}(A)$

Usualmente cuando se habla de operaciones entre conjuntos, se hace alusión a la unión definida a partir del conector $\vee$, la intersección a partir de $\wedge$, la diferencia a partir de la negación de la implicación y la diferencia simétrica a partir del $\veebar$; sin embargo, como ya se dijo, hay otros 12 conectores que nos permiten definir nuevas operaciones entre conjuntos de $\wp(A)$, pero *¿algunas de ellas se podrán definir en* $\wp_{\copyright}(A)$?

Tal pregunta implica un estudio que desborda el escrito, pero es un buen ejercicio para el lector.

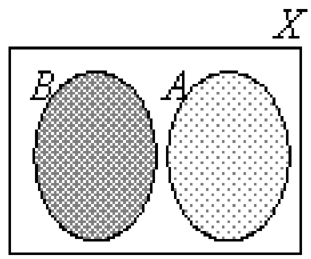

Figura 13: La relación $\copyright_{14}$ universal

2. Productos Cartesianos

Diremos que dados dos elementos a y b de un universo X, se forma una pareja ordenada[9] (a, b), con a el primer elemento y b el segundo elemento, si

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Es de observar que (a, b) no es igual a la pareja (b, a), a menos de que $a = b$.
Teniendo la noción de parejas ordenadas, definimos el conjunto $X \times X$ como

$$X \times X = \{(a, b) : a, b \in X\}$$

es decir, el conjunto de todas las parejas ordenadas del universo X, llamado el producto cartesiano $X \times X$.
Por ejemplo, si $X = \{a, b, c\}$, el producto cartesiano $X \times X$, esta dado por

$$\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Obsérvese que $X \times X$ no es un subconjunto de X, pero si lo es del conjunto $\wp(\wp(X))$, puesto que para cualesquiera $a, b \in X$.

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

y

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\wp(X))$$

Ahora, teniendo como base la definición de producto cartesiano, si tomamos dos subconjuntos cualesquiera A, B de X, entonces definimos el producto cartesiano de A con B, notado $A \times B$, como

$$A \times B = \{\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}\}$$

De manera similar a la metodología empleada hasta el momento, partiremos de que la definición de producto cartesiano es sólo un caso particular de una situación general, es decir una expresión de la forma

$$A \times \copyright B = \{\{(a, b) : a \in A \copyright b \in B\}\}$$

donde © es un conector lógico cualquiera[10]. Para el caso del producto cartesiano usual, el conector empleado es $\wedge$, y corresponde al producto cartesiano por conjunción.

2.1. Producto por disyunción

Definamos un nuevo producto cartesiano a partir del conector lógico $\vee$ como

$$A \times_{\vee} B = \{\{(a, b) : a \in A \vee b \in B\}\}$$

[9]MUÑOS J., Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional, Bogotá 1983.

[10]Aunque es posible utilizar cualquier conector lógico, nos limitaremos a trabajar los definidos en lógica bivalente.

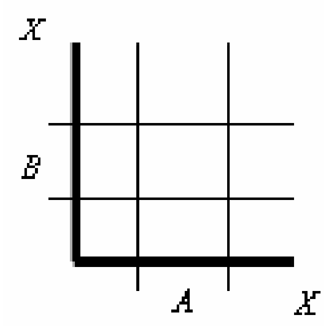

Figura 14: El producto cartesiano

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad\quad}^{A}} \\ & \wedge & 0 & 1 \\ \hline B & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Figura 15: La tabla de verdad de ©$_2$

Como ejemplo tomemos los conjuntos $X = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$, $A = \{a\}$ y $B = \{1, 2\}$, y veamos qué es $A \times_{\vee} B$:

Por un lado están todas las parejas ordenadas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir $(a, 1)$ y $(a, 2)$; también están las parejas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir (a, a), (a, b), (a, c) y $(a, 3)$; además están las parejas (a, b) donde $a \notin A$ y $b \in B$, es decir $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$, finalmente se tiene que $A \times_{\vee} B$ es

$$\{(a, 1), (a, 2), (a, a), (a, b), (a, c), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (1, 1),$$

$$(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

Nótese que $A \times_{\vee} B$ es totalmente diferente de $A \times B$. Tales productos cartesianos se pueden representar gráficamente usando un plano cartesiano, de la siguiente manera:

- El primer paso es representar gráficamente el plano cartesiano $X \times X$, con el conjunto A, por ejemplo, en el eje horizontal y con el conjunto B en el eje vertical(Figura 14):

- A continuación utilizamos la tabla de verdad del conector lógico, interpretándola como se expuso anteriormente (Figura 15):

- Ahora, observando la tabla y teniendo en cuenta que $a \in A \wedge b \in B$, es verdadera para cualesquiera elementos a, b de X, siempre que tanto $a \in A$ como $b \in B$,

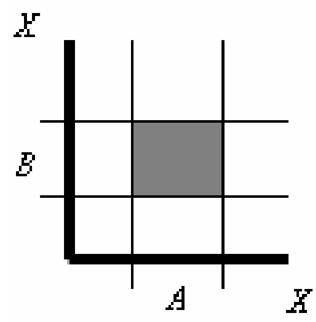

Figura 16: El producto cartesiano $A \times_{\copyright_2} B$

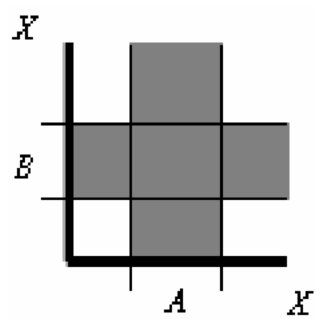

Figura 17: El producto cartesiano $A \times_{\vee} B$

entonces sombreamos la zona del diagrama para la cual se cumple tal condición, en este caso obtenemos:

De igual forma, para el conector logico $\vee$, tenemos que el producto cartesiano $A \times_{\vee} B$ esta representado por (zona sombreada): Observando estas dos últimas representaciones, vemos que los productos cartesianos cambian notablemente; puesto que aparte de los conectores lógicos ya usados, los más usuales son la implicación y la doble implicación, veamos sus respectivas representaciones graficas y dejemos como tarea para el lector los demás:

2.2. Producto por implicación

Para el conector lógico $\rightarrow$ el producto cartesiano $A \times_{\rightarrow} B$ esta dado por la figura 18

2.3. Producto por doble implicación

Para el conector lógico $\leftrightarrow$ el producto cartesiano $A \times_{\leftrightarrow} B$ esta dado por la figura 19

3. Relaciones

Los diferentes productos cartesianos que se pueden formar a partir de dos conjuntos, así como todas las posibles combinaciones de éstos, por medio de operaciones como la unión, la intersección y la diferencia, entre otros, presentan caminos para construir nuevos conjuntos; sin embargo, no se han presentado maneras para relacionar elementos con

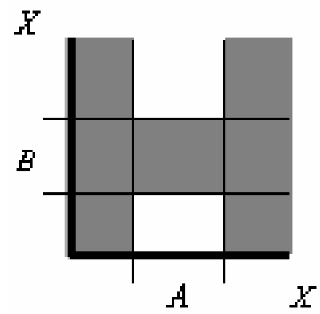

Figura 18: El producto cartesiano por implicación

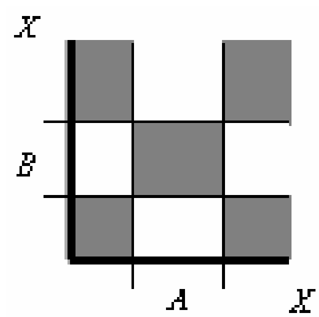

Figura 19: El producto cartesiano por doble implicación

elementos que conformen nuevos conjuntos (de parejas), llamados usualmente relaciones. Por ejemplo la contenencia genera una relación dada por un conjunto de parejas ordenadas, en donde la primera componente es subconjunto de la segunda.

De manera formal, diremos que una relación R de un conjunto A en un conjunto B, es un subconjunto de $A \times B$, esto es, un elemento del conjunto de partes $\wp(A \times B)$; la colección de todas las relaciones de A en B es precisamente $\wp(A \times B)$. Dicho de otra forma, si S es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos A y B, decimos que S es una relación de A en B. Cuando $A = B$, decimos que S es una relación en A.

Hasta el momento, hemos trabajado de manera particular un tipo de relación binaria, pues dado un universo X, definimos una relación R como un subconjunto de un producto cartesiano, es decir

$$R \subset A \times B$$

Observemos que en esta definición, están inmersos dos componentes fundamentales, uno dado por la definición de contenencia y el otro dado por la definición de producto cartesiano; sin embargo, ya sabemos que estas definiciones no son únicas, pero si las usuales, luego es natural que pensemos en definir y ver el comportamiento de otras relaciones, definidas a partir de otras contenencias y otros productos cartesianos, ejercicio que, como es usual en este escrito, queda para el lector.

Bibliografía

[1] HRBACEK, K., JACH, T., *Introduction to Set Theory*. Third edition, Marcel Dekker, Inc. New York, 1999

[2] LUQUE, C.; PAEZ, J.; DONADO, A., *H-relaciones: una generalización de la noción de relación a partir de álgebras de Heyting*. XV Coloquio Distrital de matemáticas y estadística, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 1998.

[3] MUÑOZ, J., *Introducción a la teoría de conjuntos*. cuarta edición, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[4] SUPPES, P., *Teoría axiomática de conjuntos*. Norma, 1968.

[5] WOLF, R., *Proof, logic and conjecture. The mathematician's toolbox*. W. H. Freman and Company, New Cork, 1997.

[6] ZALAMEA, F., *Lógica topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. 1997

[7] ZEHNA, P.; JOHNSON, R., *Elements of set theory*. Allyn and Bacon, Inc. Estados Unidos, 1975.