Actividades de matemáticas recreativa

Oscar Molina
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ojmolina@uni.pedagogica.edu.co

Brigitte Sánchez
Profesora Instituto Pedagógico Nacional
Bogotá D.C, Colombia
juanitasan82@gmail.com

Resumen

En este escrito se presentarán actividades de Matemática Recreativa acerca de temáticas relacionadas con teoremas elementales sobre algunas propiedades de los triángulos, construcción de algunos polígonos regulares y de cónicas además de la manipulación de la banda de Moebius, todas ellas con base en procedimientos que se realizan al plegar papel.

Introducción

En Educación Matemática, existen metodologías para la enseñanza de las matemáticas que no pretenden ser lineales, pues a partir de diversas actividades con cierto material didáctico, se intentan desarrollar habilidades procedimentales y actitudinales en las que se potencie la aplicación o construcción de algunos tópicos del currículo de matemáticas en la educación básica y de algunos métodos de razonamiento matemático. Además, se fomenta el trabajo cooperativo y por ende, el respeto de opiniones distintas a la propia.

Es así, que particularmente las siguientes actividades[1] con papel plegado pretenden dar una visión general de las diferentes habilidades matemáticas que los estudiantes pueden desarrollar, por ejemplo:

- Verificar o conjeturar respecto a propiedades o relaciones geométricas relativas a los objetos aquí tratados
- Abordar situaciones problema relacionadas con la matemática recreativa, identificando patrones y argumentando matemáticamente, según el contexto en que se encuentren.

Por otro lado, establece sugerencias a los profesores sobre:

- La presentación de manera alternativa de temáticas de la educación básica.
- La introducción de temáticas no usuales del currículo de matemáticas como los relacionados con la topología elemental.
- El desarrollo de sus clases utilizando materiales que están al alcance de los estudiantes, particularmente el papel.

[1] Presentadas en el cursillo Taller de Matemática Recreativa realizado en este encuentro.

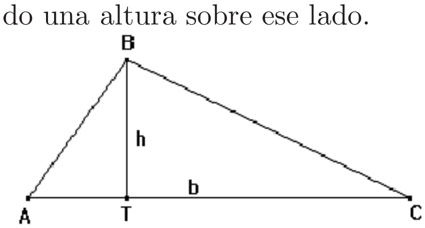
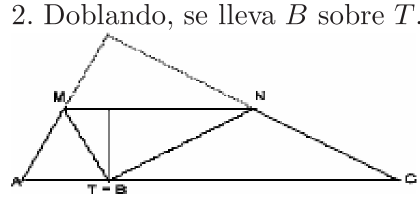
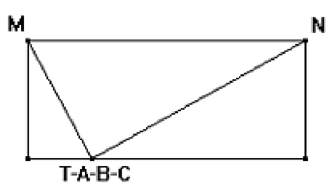
Actividades

El origami es clasificado de acuerdo a diversos aspectos: el tipo de papel utilizado, la finalidad y la cantidad de piezas utilizadas. De acuerdo a la finalidad, se clasifica en *artístico* si la construcción de figuras es para un ornamento y *educativo* si es para el estudio de propiedades de los "objetos"que se construyen; dependiendo el tipo de papel, se clasifica en *papel completo* y *tiras*, si el trozo de papel inicial tiene forma rectangular o triangular, ó si el trozo de papel inicial tiene forma de tiras largas; dependiendo la cantidad de trozos, se clasifica en *tradicional* si la cantidad de trozos es una o a lo más tres y *modular* si son varios trozos de papel inicial que se pliegan para formar unidades.

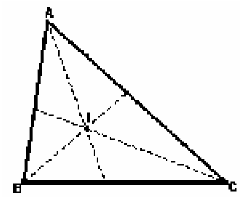
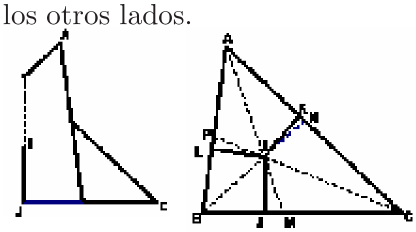
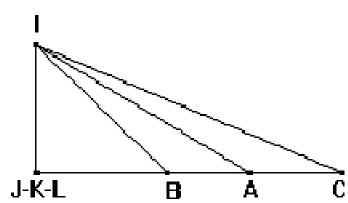
1. Acerca de triángulos

En las siguientes actividades se trabajará origami educativo con papel completo, con la finalidad de construir un triángulo equilátero y verificar o conjeturar respecto de algunas propiedades de los triángulos.

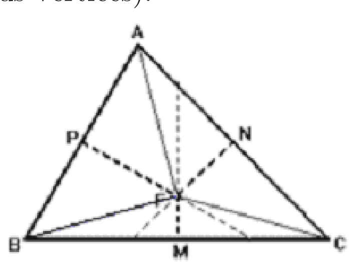
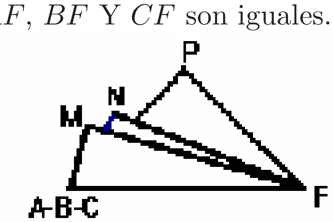
Actividad 1: Comprobación de la suma de los ángulos de un triángulo. Área del triángulo.

1. Se recorta un triángulo cualquiera y se apoya sobre el lado más largo. Se dobla trazando una altura sobre ese lado. 	2. Doblando, se lleva B sobre T. 
3. Se lleva también A y C sobre T. 	A partir de aquí, se infiere que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180 y que el área es el producto de la base y la altura, dividido entre dos.

Actividad 2: Trazado del incentro. Igualdad de la distancia del incentro a los lados.

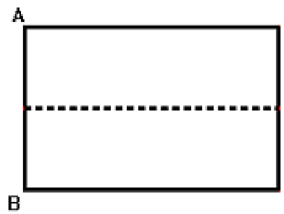
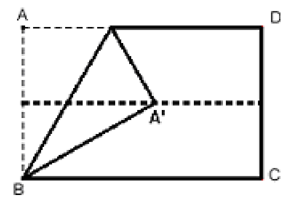
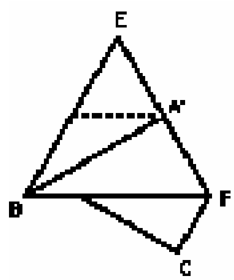
<table>
<tr>
<td>1. Se recorta un triángulo cualquiera, se trazan sus bisectrices uniendo de dos en dos los lados que forman los distintos ángulos. Se marca por las dos caras el punto I de intersección entre las tres líneas. I recibe el nombre de incentro del triángulo.
</td>
<td>2. Se trazan segmentos perpendiculares desde I a los lados. Se hace resbalar un lado sobre él mismo doblando el papel, aplastando sin marcar hasta ver que aparece en el doblez el punto I. Sin perder la guía del lado, se marca el doblez desde I hasta el lado. Se repite la operación en los otros lados.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Inicialmente, se doblan los segmentos IA, IB e IC en forma de colina (hacia fuera) y los segmentos IJ, IK e IL en forma de valle (hacia dentro).

</td>
<td>¿Qué se ha verificado con la última construcción? ¿Por qué?</td>
</tr>
</table>

Actividad 3: Trazado del circuncentro. Igualdad de la distancia a los vértices.

<table>
<tr>
<td>1. Se recorta un triángulo acutángulo escaleno y se trazan sus mediatrices doblando papel (hacer coincidir de dos en dos sus vértices).

</td>
<td>2. Con un lápiz se trazan los segmentos AF, BF y CF. Doblando en forma de valle por FM, FN y FP y en forma de colina por AF, BF y FC se obtendrá una estrella de tres puntas que es posible cerrar juntando los tres brazos, comprobando que los segmentos AF, BF Y CF son iguales.

</td>
</tr>
</table>

¿Qué se ha verificado con la última construcción? ¿Por qué?

Actividad 4: Construcción del triángulo equilátero

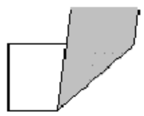
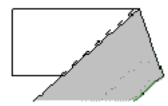
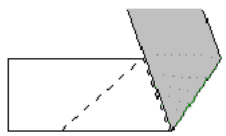
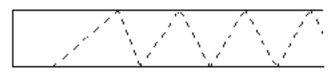
<table>
<tr>
<td>1. Doblando, se traza la paralela media en el sentido largo del rectángulo.
</td>
<td>2. Con un doblez que pase por B se lleva A sobre la paralela media.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Sin desdoblar la figura anterior, con un nuevo doblez, se prolonga el lado más corto del triángulo.
</td>
<td>
¿Dónde quedó el punto D?
¿Qué ángulo forma el rayo que contiene $\overline{BA'}$ con el rayo que contiene $\overline{EF}$? ¿Por qué? ¿Qué es $\overline{BA'}$ en el $\triangle EBF$? ¿Qué es A' en $\overline{EF}$? ¿Por qué?.
Con base en la relación que tienen $\overline{BA'}$ y $\triangle EBF$, ¿Cómo es ?EBF?
De acuerdo al resultado que se obtuvo en el paso 2, ¿Es posible construir un triángulo equilátero de lado congruente al menor del rectángulo?
</td>
</tr>
</table>

2. Acerca de construcción de polígonos regulares

En las siguientes actividades[2] se trabajará origami educativo con papel de tiras largas, con la finalidad de construir polígonos regulares, identificar patrones y argumentar matemáticamente dicha construcción.

[2]Actividad basada en el taller Polígonos con papel del profesor Víctor Larios expuesto en el II Congreso Regional del Noroeste de la enseñanza de las matemáticas. México. 2001

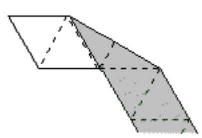
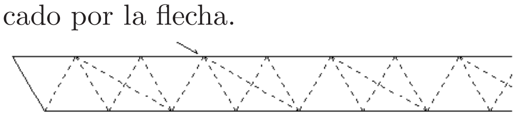
Actividad 1: Plegar y torcer I

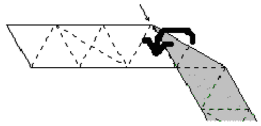
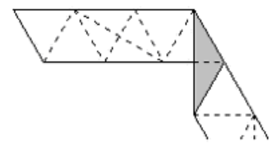
1. Se toma una tira de papel y se dobla hacia ARRIBA en cualquier ángulo: 	2. Se desdobla y dobla hacia abajo siguiendo el doblez anterior: 
3. Se desdobla nuevamente y vuelve a doblar hacia arriba siguiendo el doblez anterior: 	4. En forma repetida, se continúa doblando alternativamente hacia arriba y hacia abajo, siguiendo siempre el doblez anterior: 

El procedimiento que se acaba de realizar con la tira de papel se denomina $A^1 - B^1$.

a) ¿Cómo son los triángulos que se obtienen a medida que se realizan los dobleces? ¿Por qué? Eliminando los triángulos que se desee y doblando por las marcas obtenidas de los pliegues anteriores,

b) ¿qué figuras geométricas se pueden realizar? Dibujarlas y describir el procedimiento necesario para doblar y obtener las figuras que se construyeron.

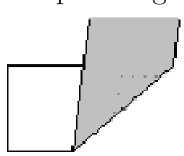
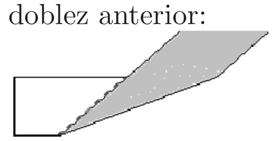
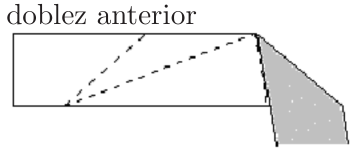
5. Se realiza un doblez secundario, para lo cual dobla hacia abajo exactamente como se muestra: 
6. A intervalos regulares se realiza el mismo doblez secundario. Como se ve en la figura de abajo. Luego, se pliega la tira siguiendo el doblez indicado por la flecha. 

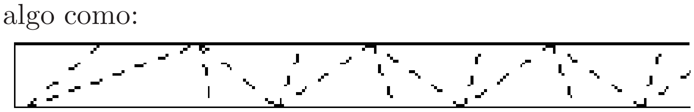
7. Ahora, se pliega siguiendo el doblez indicado por la flecha delgada, como si se estuviera torciendo la tira 	8. El resultado es como el que se muestra, en la figura: 

c) Repitiendo los tres pasos anteriores a intervalos regulares (procedimiento denominado Pliega y Tuerce), ¿qué figura geométrica se obtiene? ¿Por qué?

Actividad 2: Plegar y torcer II

Se realizará $A^2 - B^2$, esto es:

1. Se toma una tira de papel y se dobla hacia ARRIBA en cualquier ángulo: 	2. Se desdobla y se pliega nuevamente hacia arriba siguiendo el doblez anterior: 
3. Se desdobla y pliega hacia abajo siguiendo el doblez anterior: 	4. Nuevamente se desdobla y pliega hacia abajo, siguiendo el doblez anterior 

5. Se desdobla y continúa doblando consecutivamente dos veces hacia arriba y dos veces hacia abajo ($A^2 - B^2$), siempre siguiendo el doblez anterior, te queda algo como: 
6. Posteriormente, se eliminarán los primeros triángulos (irregulares) de tal forma que se pueda plegar la tira siguiendo diferentes dobleces, ya sea los cortos o los largos.

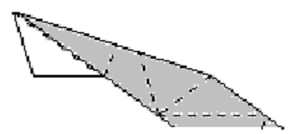
a.) ¿Qué figura se obtiene si se pliega por los segmentos más cortos?

b.) ¿Qué figura se obtiene si se pliega por los segmentos más largos?

c.) Si se realiza el procedimiento de pliega y tuerce, ¿Qué figura se obtiene?

Actividad 3: Plegar y torcer III

1. Inicialmente, se debe realizar un doblez secundario en la tira anterior (pentágono), similar al pliegue del punto 5 de la primera actividad así:



2. Se desdobla y pliega nuevamente realizando el mismo doblez, hasta obtener:

- ¿Cuál es la figura que se obtiene si se realiza el procedimiento pliegue y tuerce?.

Con $A^3 - B^3$ ¿Qué figura se obtendrá?. Si se utiliza el pliegue auxiliar ¿Qué figura? Se verificará haciendo pliegues

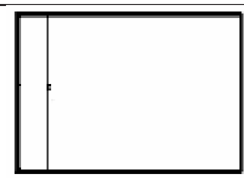
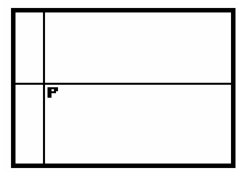
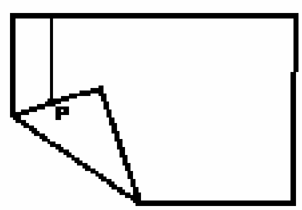
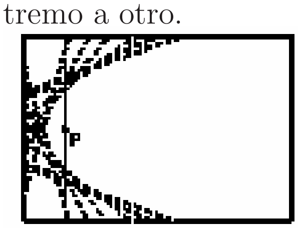
a.) Si se pliega una tira con el procedimiento $A^n - B^n$, ¿Cuál será el número de lados que tendrá el polígono realizado a partir de dicha tira?

3. Acerca de construcción de cónicas

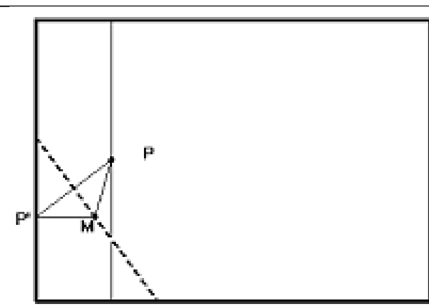
Las siete primeras actividades tenían como finalidad construir y justificar ciertas características que se cumplen en los triángulos, y construir polígonos convexos regulares, justificando con herramientas provenientes del papel plegado los resultados de tales construcciones; la segunda parte de papel plegado, tiene como objetivo construir las cónicas justificando su construcción[3].

[3]Actividades basadas en el artículo Estudio cónicas con papel de Antonio Ledesma publicado en Revista Educación Matemática. 1994.

Actividad 1: Construcción de una parábola

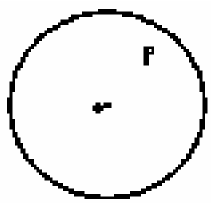
1. Se toma una hoja rectangular y a cierta distancia de uno de los lados menores, se pliega de tal forma que se marque un doblez paralelo a éste. 2.Se une los lados largos de la hoja mediante un pliegue, de tal forma que se construye la mediatriz del doblez realizado en el numeral 1. Se nombra P al punto de intersección de estos dos dobleces.	 
3. Se dobla la hoja de forma que un punto cualquiera del lado señalado pase por el punto P.  	4. Se desdobla y repite el numeral 3 variando el punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro. 

Como se puede observar, la figura que se va delimitando es una parábola:

a. ¿Cuál es su foco? ¿Cuál su eje? ¿Cuál su vértice? ¿Cuál su directriz? Utilizando la figura de la casilla del lado, se puede mostrar que efectivamente se obtiene una parábola	

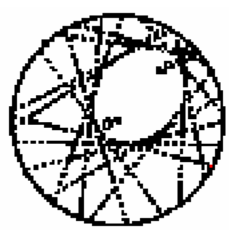
Actividad 2: Construcción de una elipse

1. Se toma una hoja y se dibuja dentro, una circunferencia de la longitud que se desea. Se recorta el círculo y se marca un punto P un poco más cerca del borde que del centro O. Se marca el punto y el centro por los dos lados del círculo, para facilitar la visión al doblar.



2. Se dobla el círculo de forma que un punto cualquiera de la circunferencia pase por P y se desdobla.

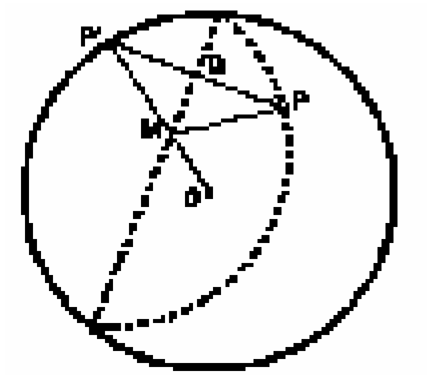
3. Se repite el numeral 2 variando el doblez de forma que tome varios puntos de la circunferencia. Los dobleces que se marcan van delimitando una elipse.



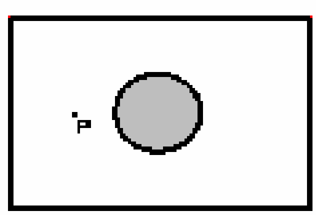
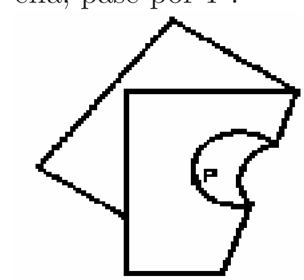
a.) ¿Cuáles son los focos de la elipse? ¿Cuál es su centro?

b.) Si el radio de la circunferencia es r y la distancia de P a O es d, ¿cuál es la distancia focal?, ¿Cuánto mide el semieje mayor?. Con esos datos calcula el semieje menor.

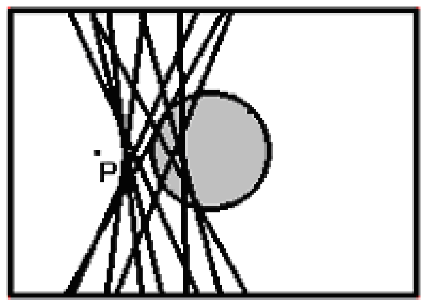
c.) Utilizando la siguiente figura, se puede demostrar que efectivamente se obtiene una elipse



Actividad 3: Construcción de una hipérbola

<table>
<tr>
<td>1. Se toma una hoja y aproximadamente en el centro de la misma, se dibuja una circunferencia. Se separa cortando el círculo y dejando intacto el resto de la hoja; en este punto se recomienda que se doble el papel pasando por el centro de la circunferencia y se recorte por la línea de semicircunferencia. Se marca un punto de la hoja agujereada a cierta distancia de la circunferencia y de tal forma que queden equidistantes de los lados largos de la hoja.
</td>
<td>2. Se dobla la circunferencia, de tal manera que un punto de ella, pase por P.
</td>
</tr>
</table>

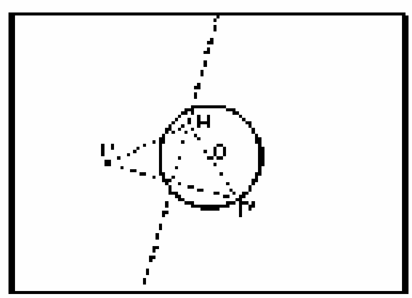
3. Se desdobla (tener presente el doblez) y se repite el numeral 2 variando el doblez de forma que tome varios puntos de la circunferencia. Los dobleces que se marcan van delimitando una hipérbola.



a.) ¿Cuáles son los focos de la hipérbola? ¿Cuál es su centro?

b.) Si el radio de la circunferencia es r y la distancia de P a O es d, ¿cuál es la distancia focal?, ¿Cuánto mide el semieje real?. Con esos datos se calcula el semieje imaginario.

c.) Utilizando la siguiente figura, se muestra que efectivamente se obtiene una hipérbola.



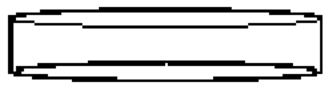
4. Banda de Moebius

Las anteriores actividades estaban encaminadas a proponer y justificar conjeturas acerca de ciertos objetos que surgen a partir de las construcciones plegando papel. Las siguientes actividades pretenden desvirtuar las conjeturas que se hagan, antes de realizar como tal dichas actividades[4].

[4] Actividad basada en las propuestas del taller de matemáticas de Ruiz, Blanco y Corchete. Junta de Extremadura, Mérida. 1998

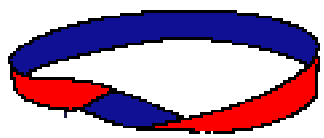
Actividad 1: Los cilindros y las bandas

a.) Divida a lo largo una hoja de papel (tamaño carta) en partes iguales de 1.5 cm de ancho y recórtelas. Con una tira de papel puede construir un cilindro pegando los extremos o una cinta de Moebius dando media vuelta (semigiro) a un extremo antes de pegarlo con el otro.



Conteste las preguntas antes de realizar como tal la actividad

b.) ¿Cuántos colores distintos necesita para colorear las caras del cilindro? ¿Cuántos para colorear las caras de la banda de Moebius?



c.) El cilindro y la banda de Moebius, ¿cuántas caras y bordes tienen?

d.) Cortando por la mitad: Dibuje en una cinta de papel (a lo largo) una línea que la divida en dos partes iguales. Si forma con ella un cilindro y los corta por la línea, ¿cuántas superficies obtendrá? ¿con cuántas caras y bordes?

Repita el proceso con la banda de Moebius y responda las mismas preguntas.

e.) Cortando a un tercio: Dibuje por las dos caras de una cinta de papel, dos líneas que la divida en tres partes iguales. Forme con ella una banda de Moebius. Córtela por las líneas hasta que llegue al punto de partida, ¿qué obtiene? ¿Quizá una banda de Moebius?

Actividad 2: Un poco de profundización

a.) Construya una superficie girando un extremo una vuelta completa, es decir dando dos semigiros. ¿cuántos bordes y caras tiene? ¿qué pasa cuando corta por la mitad y a un tercio?

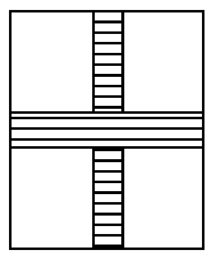
b.) Construya una superficie girando un extremo una vuelta y media (tres semigiros), ¿cuántos bordes y caras tiene? ¿qué pasa cuando corta por la mitad y a un tercio?

c.) Para obtener alguna generalidad, complete la siguiente tabla:

Nº de semigiros	Sin cortar		Cortando por la mitad		Cortando a un tercio	
	Nº de caras	Nº de bordes	Nº de caras	Nº de bordes	Nº de caras	Nº de bordes
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Actividad 3: Las cruces de Moebius

a.) Los cuatro cruces de Moebius: Realice una cruz (figura de abajo) y trace a lo largo de una de las caras, líneas que dividan por la mitad cada aspa. Una las aspas opuestas formando dos cilindros.



- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?
- Conjeture acerca de la figura que va a obtener al cortar por las líneas tarazadas.
- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?

b.) Tome otra cruz de Moebius, trace a lo largo y por las dos caras, líneas que dividan cada aspa por la mitad. Una dos aspas opuestas formando un cilindro y las otras dos bandas formando una banda de Moebius.

- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?
- Conjeture acerca de la figura que va a obtener al cortar por las líneas tarazadas.
- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?

c.) Tome otra cruz de Moebius, trace líneas a lo largo, por las dos caras que dividan cada aspa por la mitad. Una las parejas de aspas opuestas formando dos bandas de Moebius.

- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?
- Conjeture acerca de la figura que va a obtener al cortar por las líneas tarazadas.
- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?

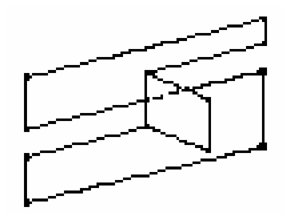
- *¿Qué hay que hacer para obtener "dos corazones juntos"? ¿Y para obtener dos superficies separadas?*

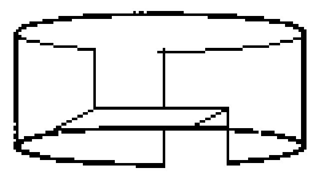
d.) Tome otra cruz de Moebius, trace una línea recta que vaya de una de las aspas y su opuesta. Dibuje dos líneas rectas que dividan entre partes iguales las otras dos aspas (estas trazas debe hacerlas por ambas caras del papel). Una las aspas con una sola traza, formando un cilindro y las que tienen dos, una banda de Moebius.

- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?
- Conjeture acerca de la figura que va a obtener al cortar por las líneas trazadas, empezando por la banda de Moebius.
- ¿Qué características topológicas tiene la mueva superficie?

Actividad 4: Lo imposible, posible

a.) Con una hoja y tijeras (sin usar pegamento), construya de una sola pieza las superficies que se muestra.





Bibliografía

[1] LARIOS, V., *Taller Polígonos con papel.* II Congreso Regional del Noroeste de la enseñanza de las matemáticas. México. 2001.

[2] LEDESMA, A., *Estudio cónicas con papel.* Revista Educación Matemática. 1994.

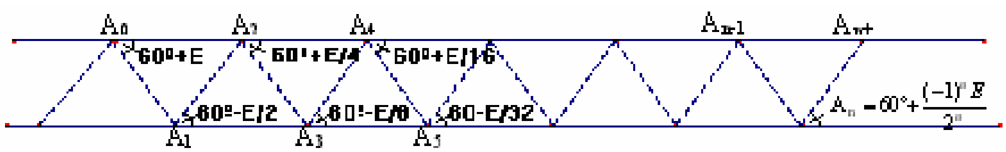
[3] RUIZ, A.; BLANCO, M.; CORCHETE, A., *Taller de matemáticas.* Junta de Extremadura, Mérida. 1998.

Anexo 1

Sugerencias para Solucionar algunas actividades

Actividad 1: Plegar y torcer I

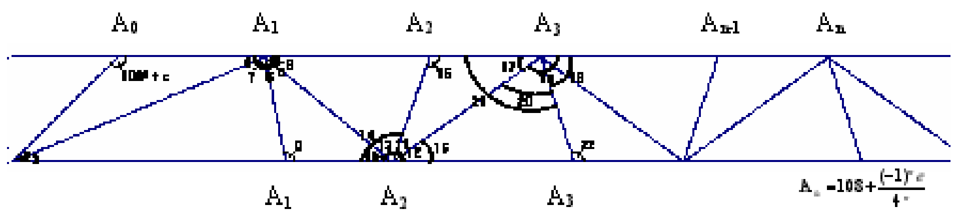
a.) Considérese la siguiente figura



c.) La figura que se obtiene es un hexágono, ya que los ángulos internos que se obtienen son de 120º, 60º de uno de los triángulos equiláteros y dos ángulos de 30º al plegar y torcer.

Actividad 2: Plegar y torcer II

a.) La figura que se vislumbra al hacer los diferentes pliegues, es un pentágono regular.



Partimos del hecho de que los ángulos externos de un polígono regular de n lados es $\dfrac{360^{\circ}}{n}$, en este caso, $\dfrac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$. Por tanto, los ángulos externos de éste polígono miden 72º

$m\angle 1 = 108^{\circ} + e$

$m\angle 2 = 180^{\circ} - (108^{\circ} + e) = 72^{\circ} - e$

$m\angle 3 = \dfrac{(72^{\circ} - e)}{2} = 36^{\circ} - \dfrac{e}{2}$

$m\angle 4 = m\angle 3$

$m\angle 5 = (180^{\circ} - m\angle 4) = 180^{\circ} - (36^{\circ} - \dfrac{e}{2}) = 144^{\circ} + \dfrac{e}{2}$

$m\angle 6 = \dfrac{m\angle 5}{2} = \dfrac{144^{\circ} + \dfrac{e}{2}}{2} = 72^{\circ} + \dfrac{e}{4}$

$m\angle 7 = m\angle 4 + m\angle 6 = \left(36^{\circ} - \dfrac{e}{2}\right) + \left(72^{\circ} + \dfrac{e}{4}\right) = 108^{\circ} - \dfrac{e}{4}$

$$m\angle 8 = \frac{m\angle 6}{2} = \frac{\left(72^{\text{o}} + \dfrac{e}{4}\right)}{2} = \left(36^{\text{o}} + \frac{e}{8}\right)$$
$$m\angle 9 = m\angle 7$$
$$m\angle 10 = m\angle 8$$
$$m\angle 11 = 180^{\text{o}} - m\angle 10 = 180^{\text{o}} - \left(36^{\text{o}} + \frac{e}{8}\right) = 144^{\text{o}} - \frac{e}{8}$$
$$m\angle 12 = \frac{m\angle 11}{2} = \frac{\left(144^{\text{o}} - \dfrac{e}{8}\right)}{2} = 72^{\text{o}} - \frac{e}{16}$$
$$m\angle 13 = m\angle 12$$
$$m\angle 14 = m\angle 10 + m\angle 13 = \left(36^{\text{o}} + \frac{e}{8}\right) + \left(72^{\text{o}} - \frac{e}{16}\right) = 108^{\text{o}} + \frac{e}{16}$$

c.) En general, a partir de un polígono de n lados y el procedimiento de plegar y torcer, se puede obtener un polígono de $2n$ lados.

Actividad 3: Plegar y torcer III

a.) Considérese la tabla

Valor de $m = n$ (procedimiento $A^m - B^n$)	Número de ángulos que bisecan	Número de lados del polígono
$A^1 - B^1$	1	3
$A^2 - B^2$	2	5
$A^3 - B^3$	3	9
$A^n - B^n$	n	$2^n + 1$

Actividad 1: Construcción de una parábola

a.) Se debe mostrar que $\overline{P'M} \cong \overline{PM}$.

Por doblez,

$$\overline{P'M} \cong \overline{PX} \text{ y } \overline{PP'} \perp \overline{MX}$$

Por criterio de congruencia LAL,

$$\triangle P'MX \cong \triangle PXM$$

así

$$\overline{P'M} \cong \overline{PM}$$

Actividad 2: Construcción de una elipse

a.) Se debe mostrar que $P'O = PM + MO$. (Se sabe que $P'O = r$, r el radio del círculo)

Por doblez,
$$\overline{P'Q} \cong \overline{PQ} \text{ y } \overline{PP'} \perp \overline{MQ}$$
Por criterio de congruencia LAL,
$$\triangle P'QM \cong \triangle PQM$$
así
$$\overline{P'M} \cong \overline{PM}$$
es decir
$$P'M = PM$$
luego
$$P'M + MO = PM + MO$$
Así
$$P'O = PM + MO$$

Actividad 3: Construcción de una hipérbola

c.) Se debe mostrar que $P'O = PM - MO$. (Se sabe que $P'O = r$, r el radio del círculo)

Por doblez,
$$\overline{P'Q} \cong \overline{PQ} \text{ y } \overline{PP'} \perp \overline{MQ}$$
Por criterio de congruencia LAL,
$$\triangle P'QM \cong \triangle PQM$$
así
$$\overline{P'M} \cong \overline{PM}$$
es decir
$$P'M = PM$$
luego
$$P'M - MO = PM - MO$$
Así
$$P'O = PM - MO$$