El descenso infinito y la representación de enteros como suma de cuadrados: una visión elemental[1]

Oscary Ávila Hernández
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
oavilahe@matematicas.uis.edu.co

Resumen

El objetivo de esta conferencia es presentar tres resultados clásicos de la teoría aditiva de números, dos de ellos demostrados por el gran Leonard Euler y el tercero por Lagrangre. Junto con algunas consecuencias elementales.

1. Introducción

En un artículo de *The Mathematical Intelligencer (1998)* el matemático inglés David Wells propuso la idea de escoger el más bello teorema entre 24, el resultado apareció 2 años más tarde. En la decisión de los matemáticos pudo influir el hecho de que algunos enunciados son más mencionados que otros. Algunos ejemplos:

- El conjunto de los números primos es infinito.
- $e^{i\pi} + 1 = 0$
- No existe un número racional cuyo cuadrado es igual a 2.
- Hay 5 poliedros regulares.
- π es trascendente.
- Fórmula de Euler para poliedros: $V - A + C = 2$

Dentro del grupo de los 24 teoremas se encuentra un resultado enunciado por Fermat y demostrado por Leonard Euler alrededor del año 1746.

" Todo primo de la forma $4n + 1$ es la suma de 2 cuadrados de forma única"
El *teorema de pitágoras* afirma que si a,b, c son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, siendo c la longitud de la hipotenusa entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

[1] A mi maestra y consejera, María Antonia Cardozo

Si quisiéramos caracterizar todas los triángulos rectángulos de lados enteros, el problema consistirá en hallar todas las triplas (a, b, c) de la ecuación (1).
Este teorema es uno de los primeros resultados que conciernen a la representación de enteros como suma de cuadrados; es fácil ver que $(3k,\ 4k,\ 5k)$ con $k \in \mathbb{N}$ es solución de (1). La siguiente pregunta a resolver sería como hallar todas las triplas pitagóricas y se puede demostrar que:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \quad \text{con} \quad (m, n) = 1$$

determinan todas las ternas pitagóricas, por ahora lamentablemente este resultado no es uno de los objetivos de la charla.

2. Suma de cuadrados

Como primeras verificaciones notemos que:

$$\begin{aligned}
2 &= 1^2 + 1^2 \\
3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\
4 &= 2^2 \\
5 &= 2^2 + 1^2 \\
6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 \\
7 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Y 7 no es suma de menos de cuatro cuadrados. Uno de los objetivos de esta sección es mostrar que *Cada entero positivo se puede representar como la suma de cuatro cuadrados perfectos*(Lagrangre)

2.1. El descenso infinito de fermat

El método del descenso infinito nos permite afirmar que ecuaciones diofánticas no poseen soluciones enteras positivas o bajo ciertas condiciones nos permite hallar todas las soluciones de ciertas ecuaciones. Dada una ecuación con coeficientes enteros $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, si el conjunto de soluciones de f es distinto de vacío, entonces esta ecuación en cierto sentido tendrá una solución "minima" $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ siendo A el conjunto solución de la ecuación. Esto significa que podemos construir una función $\Delta : A \to \mathbb{N}$ y que esta solución cumple que el mínimo número en el recorrido de Δ es $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. La idea consiste en construir a partir de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ otra solución entera que en cierto sentido sea menor que la anterior, lo cual es claramente una contradicción.

Teorema 1 (Euler). *Sea p un número primo. La ecuación*

$$x^2 + y^2 = p,$$

admite una solución entera (x, y) si solo si $P \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$

Demostración. Como $2 = 1+1$, supongamos que $p > 2$. Si la ecuación $x^2+y^2 = p$ admite aun solución entera (x, y), entonces alguno de los dos números tiene que ser par. Como cada cuadrado perfecto es congruente con 0 módulo 4 o con $1 \bmod 4$ (si el numero es impar) luego la anterior ecuación implica que $P \equiv 1 (\bmod 4)$.
Sea $P \equiv 1 (\bmod 4)$, primero se **tendrá que probar que** existe una solución (x, y) de la ecuación $x^2 + y^2 \equiv 0 (\bmod p)$ con p que no divide a x.
Y posteriormente **aplicar Método del Descenso Infinito.** □

Teorema 2 (Lagrange). *Cada entero positivo se puede expresar como la suma de cuatro cuadrados perfectos.*

Demostración. Será suficiente probar que la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = p$$

admite una solución entera x_1, x_2, x_3, x_4 para cada primo $p > 2$. □

Corolario 1.

Sea $n \in Z_+$. La ecuación

$$x^2 + y^2 = n$$

admite una solución (x, y) entera si y solo si cada número primo $p \equiv 3 (\bmod 4)$ que divide a n aparece a una potencia par en la factorización de n en factores primos.

Teorema 3 (Unicidad de Euler). *Sea un primo* $P = c^2 + d^2$*, si* $q > 1$ *con* $pq = a^2 + b^2$*,* $(a, b) = 1$*, entonces* q *es la suma de dos enteros cuadrados relativamente primos.*

2.2. Consecuencias elementales

Proposición 1. *Todo primo de la forma* $4m + 1$ *posee representación única como suma de cuadrados.*

Proposición 2. *Ningún entero de la forma* $4^n(8k+7)$ *puede ser expresado como la suma de tres cuadrados.*

Agradecimientos.

Agradezco al Doctor Florian Luca del Instituto de Matemáticas Unam-Morelia por la bibliografía recomendada.Y a los estudiantes Edwin Flórez Gómez y Carlos Alberto Cardozo Delgado (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá) por las valiosas T_EX*-sugerencias* e indicaciones proporcionadas.

Bibliografía

[1] APOSTOL, T., *Introducción a la teoría analítica de números,* Editorial Reverte 1984.

[2] BAKER, A., *Breve introducción a la Teoría de Números*. Alianza Editorial 1986.

[3] ERDÖS, P.; SURANYI, J., *Topics in the Theory of Numbers*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer 2003.

[4] LUCA, F. *Ecuaciones Diofantinas*. Memorias de la Escuela de Verano de matemáticas, Morelia-México. 27 al 31 de agosto de 2001.

[5] SANTOS, J, *Introdução à Teoria dos Números*. Publicação: IMPA, 2000.

[6] SHANKS, D., *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*. CHELSEA Publishing company, 1978