PRESENTACIÓN DINÁMICA DE TEOREMAS DEL CÁLCULO: EL CASO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Benjamín Sarmiento Lugo
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
bsarmiento@pedagogica.edu.co

Resumen

El objetivo principal de esta conferencia es motivar a los futuros docentes a explorar y aprovechar los diferentes softwares educativos o no educativos, tanto libres como comerciales, que en la actualidad se usan en diversas instituciones nacionales y extranjeras para intermediar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos. Hago énfasis en que estos programas no sólo permiten diseñar construcciones y representaciones ejecutables de objetos geométricos sino también de objetos propios del análisis matemático y la estadística. Un software educativo se puede usar para efectos de hacer una mediación entre el estudiante y el objeto a enseñar, pero también se puede usar como apoyo del docente para ilustrar los objetos de conocimiento, en este sentido es que quiero mostrar el uso de Derive para ilustrar el teorema fundamental del cálculo. Inicialmente daré definiciones aproximadas de lo que llamamos mediación instrumental y representaciones ejecutables, luego presentaré el teorema fundamental del cálculo, su significado geométrico y finalmente, señalaré los pasos para el diseño de representación con Derive.

Introducción

Actualmente, a las herramientas computacionales se le vienen dando varios usos en la educación: como instrumentos de mediación para el aprendizaje de muchos objetos de conocimientos, como herramienta del docente para apoyar la enseñanza, como elementos fundamentales en la organización de la información, etc. En esta ocasión quiero mostrar la importancia que tiene el software educativo como herramienta para el profesor, en la que puede apoyarse para construir representaciones que permitan ilustraciones eficaces de los objetos de conocimiento que maneja en su clase.

En matemáticas tenemos muchos objetos en donde no es fácil hacer una representación geométrica y mucho menos una representación ejecutable, por cuanto se requiere que los elementos que forman dichos objetos se puedan representar geométricamente en forma individual y que se manejen variables. Usualmente se emplea un software de geometría dinámica para construir este tipo de representaciones, pero lo que quiero presentar es la posibilidad de usar software de cálculo simbólico para lo mismo. Trabajaré con Derive y tomaré como objeto al teorema fundamental del cálculo integral.

En lo que sigue quiero señalar los pasos básicos en el diseño de una presentación dinámica de este teorema, que permita a los estudiantes aclarar su significado geométrico. La validez del diseño de este tipo de apoyos está sustentada en el poder de las representaciones ejecutables en los procesos de visualización durante la enseñanza.

Mediación instrumental y representaciones ejecutables

No se pretende profundizar en los conceptos de instrumento, herramienta, mediación, visualización, mediación instrumental y representación ejecutable, sino aproximarnos al significado de los dos últimos.

Empezamos con una pregunta: ¿Para quién y para qué es el software educativo? La respuesta seguramente será: para el estudiante y para el profesor. Al estudiante le servirá para construir, explorar, conjeturar y visualizar propiedades de los objetos de conocimiento; al profesor le servirá para complementar la ilustración de los objetos y sus propiedades; es decir, un software educativo bien utilizado se convierte en un instrumento de mediación para favorecer la transposición del saber académico al saber a enseñar.

En la actualidad, al aprovechamiento eficaz de herramientas computacionales para desarrollar actividades cognitivas orientadas al aprendizaje, es decir, a facilitar procesos propios de la arquitectura de la mente humana para comprender un objeto de conocimiento, se le llama mediación instrumental. En el caso de las matemáticas, esta mediación se da cuando se pueden redefinir los objetos matemáticos en términos de construcciones ejecutables.

Las construcciones ejecutables de objetos matemáticos nos permiten hacer representaciones ejecutables de los mismos, es decir, representaciones procesables y manipulables en un ambiente computacional en donde se conserven las relaciones estructurales de la construcción y se visualicen los invariantes del objeto de conocimiento de tal manera que se contribuya al realismo del mismo.

Si hacemos una revisión rápida de los libros de texto de cálculo diferencial o integral más usados en la actualidad, encontramos representaciones gráficas de algunos teoremas que contienen varios objetos matemáticos que se pueden representar de varias maneras, es muy común encontrar en una sola imagen representaciones de intervalos, puntos de acumulación, funciones seccionalmente monótonas, rectas tangentes, etc. Estas imágenes estáticas no permiten ver la covariación que hay entre todos los elementos que componen la representación; es por esto, que las representaciones ejecutables revisten gran importancia en la ilustración de los teoremas del cálculo por cuanto dejan ver relaciones y covariaciones que no se pueden ver en una representación estática. Vale resaltar que para aprovechar la potencialidad de un software como herramienta del profesor para apoyar la enseñanza de un objeto matemático, es necesario que el se tenga mucha claridad sobre el significado geométrico del objeto que quiera ilustrar.

Teorema fundamental del cálculo (Newton-Leibniz)

Si f es continua en $[a,\, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in [a,\, b]$, entonces $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,\, b]$.

Significado geométrico:

Consideremos la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ y supongamos que el límite inferior a está fijo mientras que el límite superior b varía; es evidente que el valor de la integral variará conforme varíe el valor de b, esto indica que la integral será una función de su límite superior b.

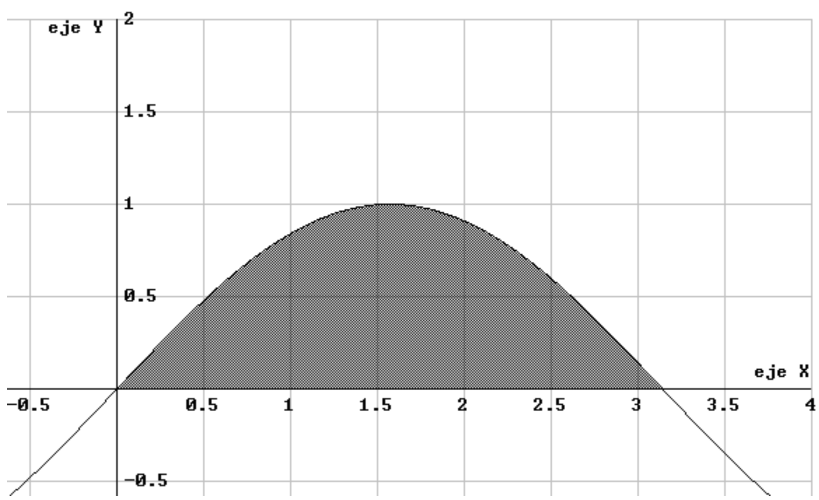
Al límite superior variable lo designaremos con x mientras que a la función la designaremos con F. Para evitar confusión con la función integrando usaremos t como variable de integración.

Así, si $f(t) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ será numéricamente igual al área bajo la curva, la cual varía a medida que varía x. Abusando un poco del vocabulario, llamaremos a F la función de áreas bajo la curva f.

Si derivamos a la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con respecto a x, se establece una relación entre la integral y la derivada que se conoce como teorema de Newton-Leibniz o Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Simulación de la variación con derive

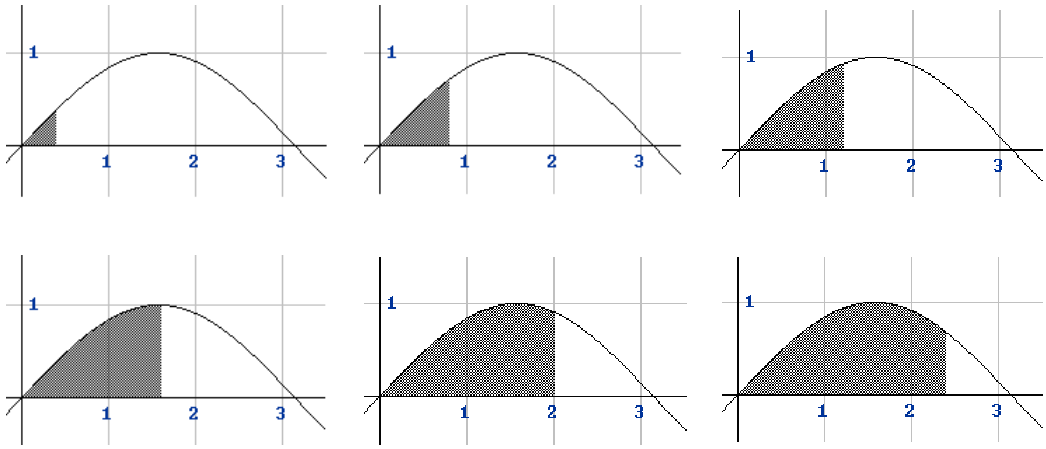
Para simular la variación del límite superior que hemos llamado x y la variación del área $A(x)$, usaremos inicialmente la función de derive AreaUnderCurve para representar una región sombreada limitada por la gráfica de f y el eje X entre a y b. Esta función se escribe AreaUnderCurve$(f(t), t, a, b)$. Para el caso de AreaUnderCurve$(Sin(t), t, 0, pi)$ el resultado que muestra Derive es el siguiente:



La instrucción en general debe escribirse AreaUnderCurve$(f(t), t, a, x)$, que para el caso que hemos puesto como ejemplo quedaría AreaUnderCurve$(f(t), t, 0, x)$. La pregunta que sigue es ¿cómo se maneja la x en el momento de ordenar a Derive la gráfica?

Para resolver este interrogante se construye con Derive un vector con parámetro x, en donde x varía desde a hasta b, con pasos de valor p. Para nuestro ejemplo será construir un vector con parámetro x que varía desde 0 hasta π con pasos de $\frac{1}{10}$.

La instrucción queda así: (VECTOR(AreaUnderCurve($SIN(t), t, 0, x), x, 0, pi, \dfrac{1}{10}$)). Se podrá apreciar como varía la región sombreada conforme varía x; la siguiente gráfica muestra seis momentos de esta situación:



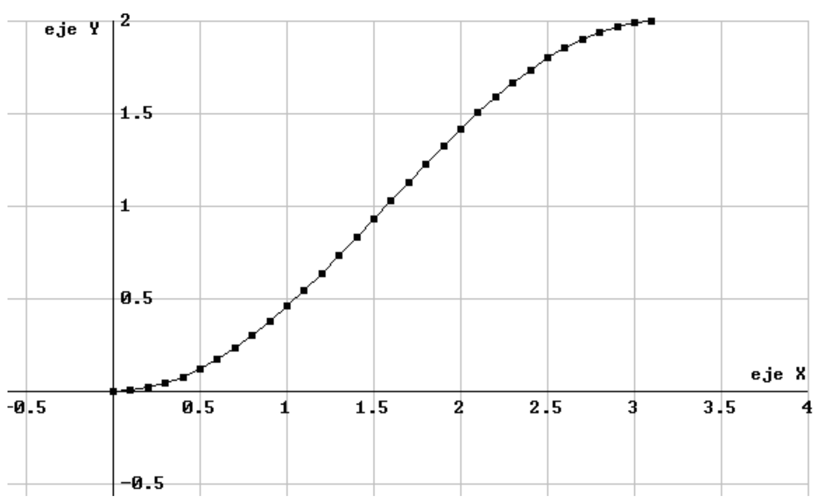
Por otro lado sabemos que la integral $\int_a^c f(t)dt = A(c) - A(a)$ representa el área acumulada desde $x = a$ hasta $x = c$, entonces $\int_a^x f(t)dt = A(x) - A(a)$ representa el área acumulada desde a hasta x.

Como la gráfica de un punto con Derive se obtiene a partir de la instrucción $[x,\ y]$, entonces para graficar la función A de las áreas acumuladas A, necesitamos graficar los puntos $[x,\ A(x)]$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Pero la imagen de x es el área $\int_a^x f(t)dt$, luego los puntos se escriben $[x,\ \int_a^x f(t)dt]$.

Para generar una serie de puntos que pertenezcan a la función de áreas debemos construir un vector con parámetro x, que esté variando desde $x = a$ hasta $x = b$ con paso de valor p.

La instrucción es VECTOR($[x,\ \int_a^x f(t)dt], x, a, b, p$), para nuestro ejemplo la instrucción queda asi: (VECTOR($[x, INT(SIN(t), t, 0, x)], x, 0, pi, \dfrac{1}{10}$)).

Al ejecutar la instrucción se obtiene el siguiente gráfico:



Si queremos ilustrar como se va construyendo la función de áreas a medida que varía el área bajo la curva, es decir, a medida que varía x, se debe construir un vector de la forma VECTOR($[Region, [x,\ A(x)]], x, a, b, p$), en donde:

Región es AreaUnderCurve($f(t), t, a, x, p$) y $[x,\ A(x)]$ es $[x,\ \int_a^x f(t)dt]$.

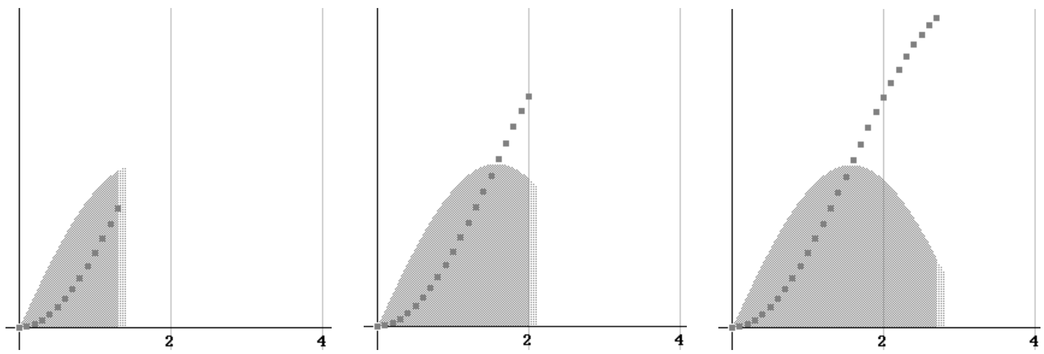
La instrucción completa queda así:

(VECTOR([AreaUnderCurve($f(t), t, a, x, p$), $[x, INT(f(t), t, a, x)]], x, a, b, p$))

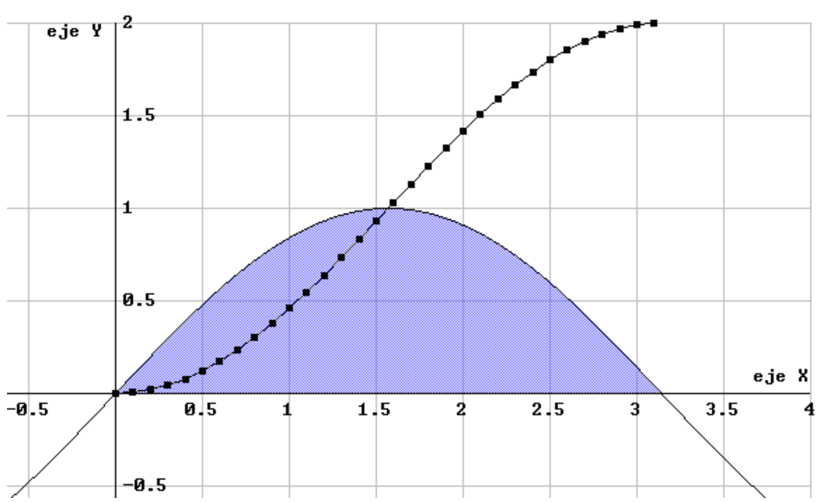
Para el ejemplo que venimos trabajando, la instrucción con Derive debe escribirse así:

(VECTOR([AreaUnderCurve($SIN(t), t, 0, x, 0{,}1$), $[x, INT(SIN(t), t, 0, x)]], x, 0, pi, 0{,}1$)).

En el siguiente gráfico se muestran tres momentos de esta ejecución:



Al finalizar la ejecución de la instrucción queda el siguiente gráfico:



Esta última presentación conjunta de las representaciones dinámicas tanto de la integral definida como de la primitiva o función de áreas, a mi parecer, es lo que ayudaría a que al estudiante le quede una mayor claridad sobre el significado geométrico del teorema fundamental del cálculo. Así como se diseñó una representación ejecutable para este teorema, se podrían diseñar representaciones similares para teoremas más complejos utilizando este u otras programas de cálculo simbólico o de geometría dinámica.