ANÁLISIS DE ALGUNOS DOBLECES DE ORIGAMI MEDIANTE CABRI GÉOMETRE

Erica Parra Sánchez
Licenciada Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ericamayari@yahoo.es

Miguel Valdivieso Colmenares
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
alfa_mavc@yahoo.es

Resumen

Al ver las sorprendentes figuras de origami, por ejemplo, los dodecaedros regulares o flores de simetría pentagonal entre otros, se observa en sus diagramas la poca o nula utilización de elementos de medición exactos, aunque sus resultados, parecieran indicar que hay una relación bien determinada en su elaboración . Ante esto surge la pregunta : ¿Porqué funcionan estos modelos ? En la presente ponencia, desarrollamos un análisis referente a las operaciones y dobleces desarrollados con las técnicas de origami y su respectiva equivalencia a algoritmos de regla y compás, y se realiza a partir de estos elementos un análisis de diferentes construcciones geométricas que se hacen en origami mediante Cabrí.

1. Introducción

Las relaciones entre matemáticas y origami son hoy en día fuente de investigación e inspiración, en el ámbito de las matemáticas aplicadas, [5] y en el arte propio del origami. Por un lado desde las construcciones realizadas en origami se puede hacer la elaboración de un sistema propio de axiomas concernientes a la posibilidad de construcciones geométricas (los llamados Axiomas de Huzita véase la sección 2), y del área de origami, el análisis de qué figuras pueden construirse, ha llevado al desarrollo de los patrones de plegado (Crease Patterns CP, en inglés) y al diseño de figuras utilizando elementos de software (por ejemplo el Programa TreeMaker de Robert J. Lang.)

Entre esta conexiones, nos llamo bastante la atención la elaboración de figuras geométricas y sólidos regulares, que se pueden realizar por medio de algoritmos o diagramas de origami. Un ejemplo de tal construcción es la foto de un dodecaedro regular diseñado por Lewis Simon. 1

Figura 1. Dodecaedro regular en Origami

Esta figura se elaboró en origami, a partir del cursillo dictado en este evento unos años atrás [2], con ninguna medida de regla y compás, o con un transportador. Este es solo una muestra. Hay construcciones geométricas y modelos de origami que son espectaculares y reproducen formas bidimensionales y tridimensionales de manera exacta. Movidos por esta idea, nos dimos a la tarea de hacer un análisis geométrico de porque funciona el modelo, cual es el paso clave de la construcción – cual es el doblez que produce un ángulo determinado –.

Para realizar este análisis partimos primero de ver como se puede hacer una equivalencia entre el doblez de origami y las construcciones de regla y compás. Luego con base en la elaboración y de los diagramas de algunos modelos de origami mostramos el efecto de las operaciones en un diagrama de Cabri . En el proceso estamos comentando los resultados de los dobleces, como ángulos, proporciones, el margen de error respecto a la medida idealizada por el modelo.

¿Por qué utilizar Cabri? Cabri es un software de Geometría Dinámica y como tal permite centrarse en el análisis de las formas geométricas más que en su construcción. Ello permite centrarse en el análisis de la operación geométrica a realizar y no embrollarse en su construcción.

2. Operaciones de origami traducidas a Cabri

2.1. Axiomas de Huzita

Con el fin de realizar la equivalencia entre las construcciones realizadas en origami y las construcciones de regla y compás mediante Cabri, tomamos en cuenta los axiomas de Huzita. Estos axiomas fueron presentados por el matemático italo-japonés Humiaki Huzita en “Understanding Geometry through Origami Axioms” in the Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), J. Smith ed., British Origami Society, 1992, pp. 37-70). Estos axiomas dan una representación de la variedad de construcciones con los métodos de origami, en términos de una estructura axiomática. [1] Los axiomas son:

1. Dados dos puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ se puede doblar una línea que los conecte, véase la figura 2

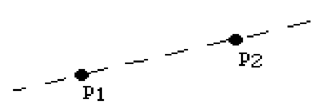

Figura 2. Primer Axioma de Huzita

2. Dados dos puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ se puede doblar $\mathbf{P_1}$ sobre $\mathbf{P_2}$. Véase la figura 3.

[1] Véase el articulo de Alperin, R. [1], para un desarrollo elaborado sobre las construcciones geométricas y campos numéricos que se pueden realizar a partir de los axiomas de Huzita

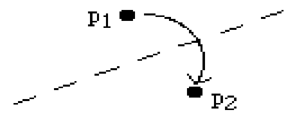

Figura 3. Segundo Axioma de Huzita

3. Dadas dos líneas $\mathbf{l_1}$ y $\mathbf{l_2}$ podemos doblar $\mathbf{l_1}$ sobre $\mathbf{l_2}$.Véase la figura 4.

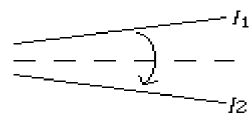

Figura 4. Tercer Axioma de Huzita

4. Dados un punto $\mathbf{P_1}$ y una línea $\mathbf{l_1}$ podemos hacer un doblez perpendicular a $\mathbf{l_1}$ que pase por $\mathbf{P_1}$. Véase la figura 5.

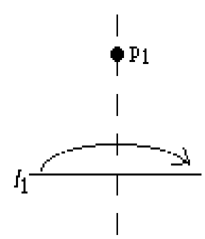

Figura 5. Cuarto Axioma de Huzita

5. Dados dos puntos, $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ y una línea $\mathbf{l_1}$ podemos hacer un doblez, que coloque a $\mathbf{P_1}$ sobre $\mathbf{l_1}$ y que pase sobre el punto $\mathbf{P_2}$. Véase la figura 6

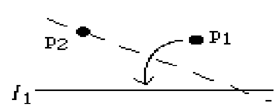

Figura 6. Quinto Axioma de Huzita

6. Dados dos puntos, $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ y dos líneas $\mathbf{l_1}$ y $\mathbf{l_2}$podemos hacer un doblez, que coloque a $\mathbf{P_1}$ sobre $\mathbf{l_1}$ y a $\mathbf{P_2}$ sobre $\mathbf{l_2}$. Véase la figura 7

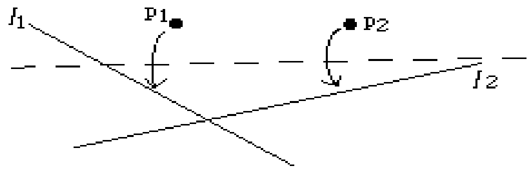

Figura 7. Sexto Axioma de Huzita

2.2. Equivalencia entre las operaciones de origami y el trabajo de regla y compás

A partir de los dobleces específicos, – no si es un valle o montaña sino del efecto del doblez en la geometría de la figura – se puede hacer de la equivalencia entre un doblez o serie de instrucciones realizadas en origami, con operaciones de regla y compás. Como dice Hull [3]:

> Las construcciones geométricas se pueden hacer con el origami, usando a semejanza el lado del papel, y los dobleces realizados como una línea recta, y la ejecución del doblez para simular el uso del compás.

En este sentido, aquí esbozamos que operación de origami produce que efecto, en la hoja de papel.

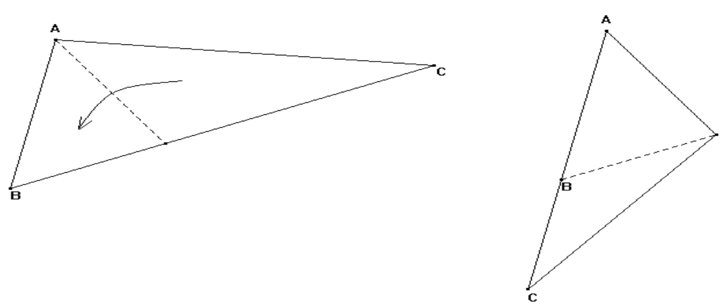

Figura 8. Llevar $\overline{BC}$ sobre la línea $\overline{AC}$. Operación en Origami.

Al hacer el doblez indicado por la figura 8, se está doblando la bisectriz del ángulo $\angle ABC$. El resultado de este doblez se ve en la segunda parte de la imagen, donde la bisectriz se convierte en el borde de la figura y se traza en el papel.

Al llevar el punto A sobre el punto B, figura 9, se traza la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, y se ubica el punto medio. Si los dos puntos están en la misma arista o línea, el punto medio se obtiene de inmediato.

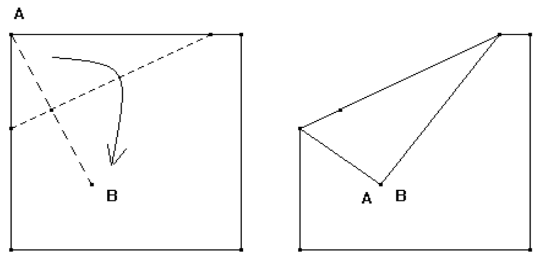

Figura 9. Llevar un punto sobre otro

Al doblar una sección de la hoja de papel sobre otra y si se toman puntos de referencia, esto equivale a realizar una simetría axial sobre la línea que se doble, véase la figura 10 Estos elementos combinados con los elementos de geometría euclidiana y los axiomas de

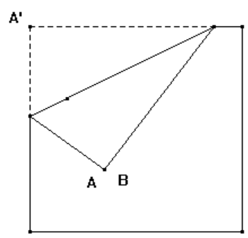

Figura 10. Elementos de simetría en un doblez

Huzita, – por ejemplo la intersección de dos dobleces es un punto construible y es visible – nos permiten hacer el siguiente análisis.

3. Un caso básico. Crear triángulos equiláteros

3.1. Construcción de regla y compás de un triángulo equilátero

1. Trazamos el segmento $\overline{AB}$

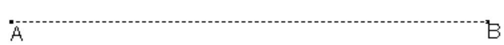

Figura 11. Primer Paso Para Construir el Triángulo Equilátero

2. Trazamos la perpendicular en el punto medio **C** de $\overline{AB}$

3. Con radio AB y centro en **A** (o en **B**). Trazamos un arco que corte la perpendicular y así obtenemos el punto **D**.

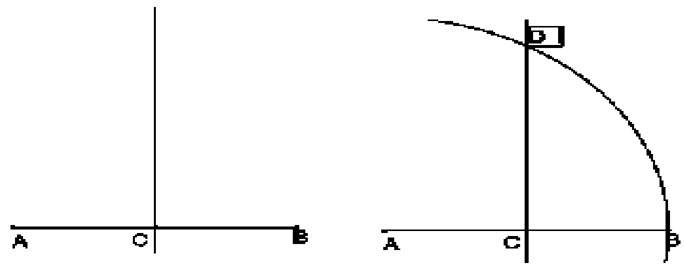

Figura 12. Segundo y Tercer Paso del Triángulo Equilátero

4. El punto **D** es equidistante a **A** y a **B**. Se trazan los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. Tenemos el triángulo equilátero completo.

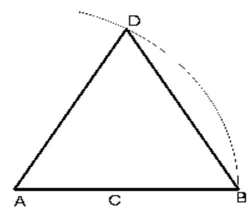

Figura 13. Triángulo Equilátero

3.2. Método de origami

La construcción elaborada en Origami se presenta en la figura 14 con los respectivos símbolos:

3.3. Análisis del doblez de origami

- El paso 1 de origami es equivalente al paso 2 de la construcción de regla y compás, al levantar la perpendicular.

- El paso 2 de origami es el paso 3 de regla y compás. El mismo papel sirve de compás; el resultado de trazo de líneas se muestra en la figura 15

- Ahora si se siguiera el mismo procedimiento de la construcción por regla y compás, se marcaría el punto O y el triángulo resultante sería el $\triangle ACO$. El detalle es que está construcción es poco útil para obtener el mayor número de piezas, por ejemplo al trabajar en origami modular, con un gran número de triángulos, se desperdiciaría mucho papel con este tipo de corte.

- Desde aquí empieza una variación respecto de la construcción de regla y compás.

  Por construcción $\angle OAC$ es igual a $60.^0$ Al llevar $\overline{AC}$ sobre $\overline{AO}$ se bisecta $\angle OAC$. De esta forma $\angle GAC = 30.^0$, y $\angle AGC = 60$ž

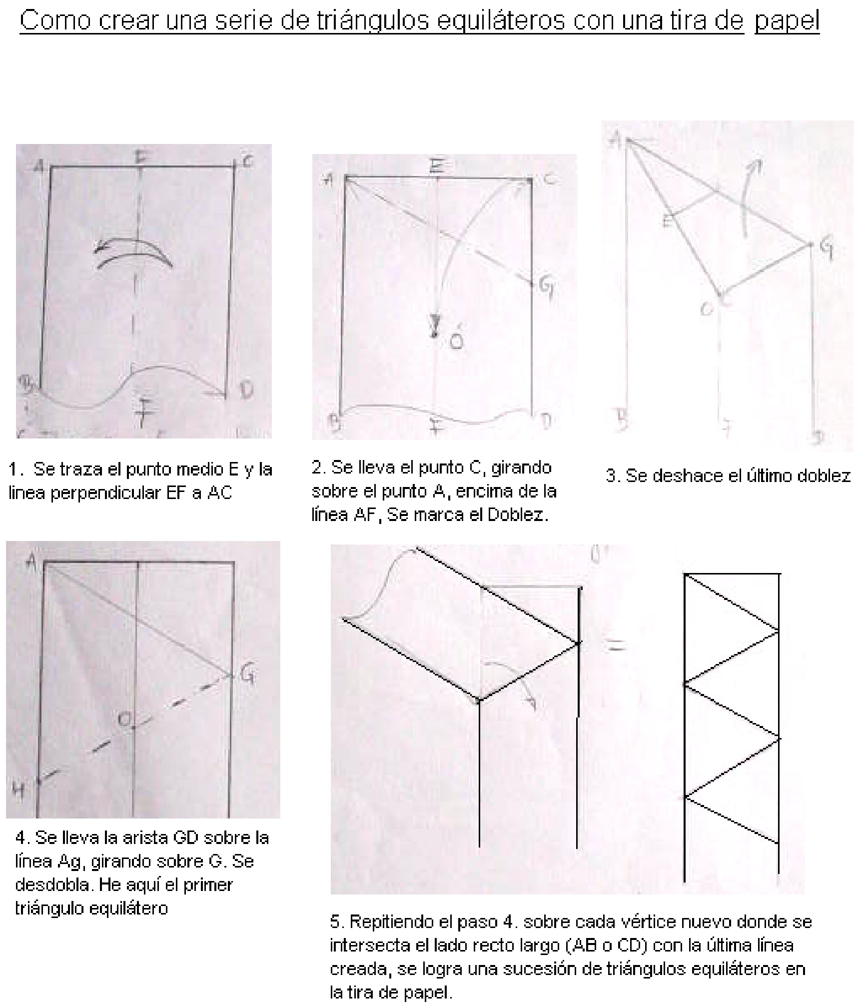

Figura 14. Triangulo Equilátero. Diagrama de Origami

- Al llevar $\overline{DG}$ sobre $\overline{AG}$ se bisecta $\angle AGD = 120$ž., y se obtiene el punto H. El triángulo $\triangle AGH$ es equilátero y construido por medio de sólo tres dobleces (EF), (AG), y (GH), a partir de una tira de papel bien cortada, es decir que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen que ser paralelos.

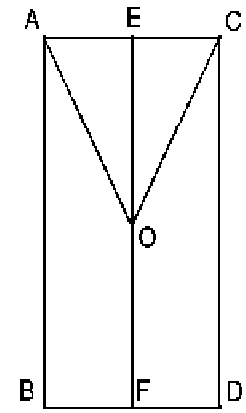

Figura 15. Primer Punto Marcado en Origami

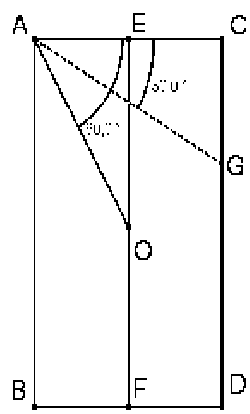

Figura 16. Referencia de Ángulos y Líneas Generados

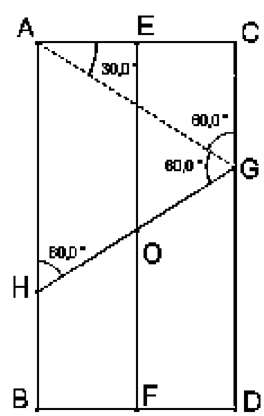

Figura 17. Creación del Triángulo en Origami. Ultima etapa

4. Pentágonos regulares

Entre las construcciones más sorprendentes esta la elaboración de polígonos regulares, sin la toma de medidas aparentes. Entre la formas que mas nos atrajeron, está la elaboración de un pentágono regular. Encontramos dos formas. El diagrama de origami está en la figura y el diagrama final de cabri siguiendo las instrucciones está en

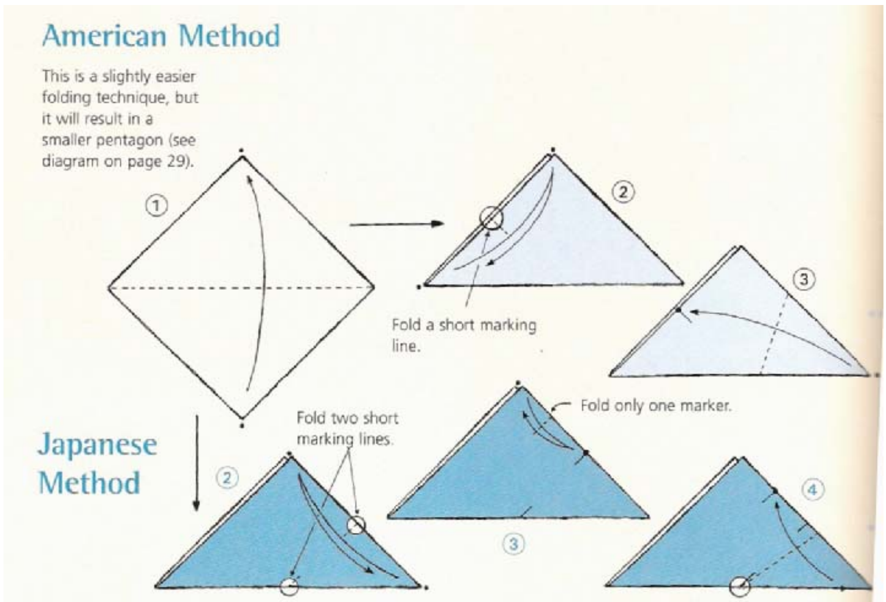

Figura 18. Parte Uno del diagrama de los Pentágonos

5. Experiencias de la ponencia

- A pesar de tener familiaridad con las construcciones geométricas realizadas de manera inconsciente en origami, no hay una inmediata identificación de que se están realizando dichas construcciones.

- Como ejercicio fue bastante interesante buscar la traducción de instrucciones de origami a operaciones de regla y compás.

- Muy sorprendente ver la consecución de medida angulares muy aproximadas sin tomar medidas de compás directas o con un transportador.

- Se podría dar esta clase de análisis como aplicación en una clase de geometría. Por lo menos nosotros nos entretuvimos con el tema que exigió revisar las clases de construcciones geométricas.

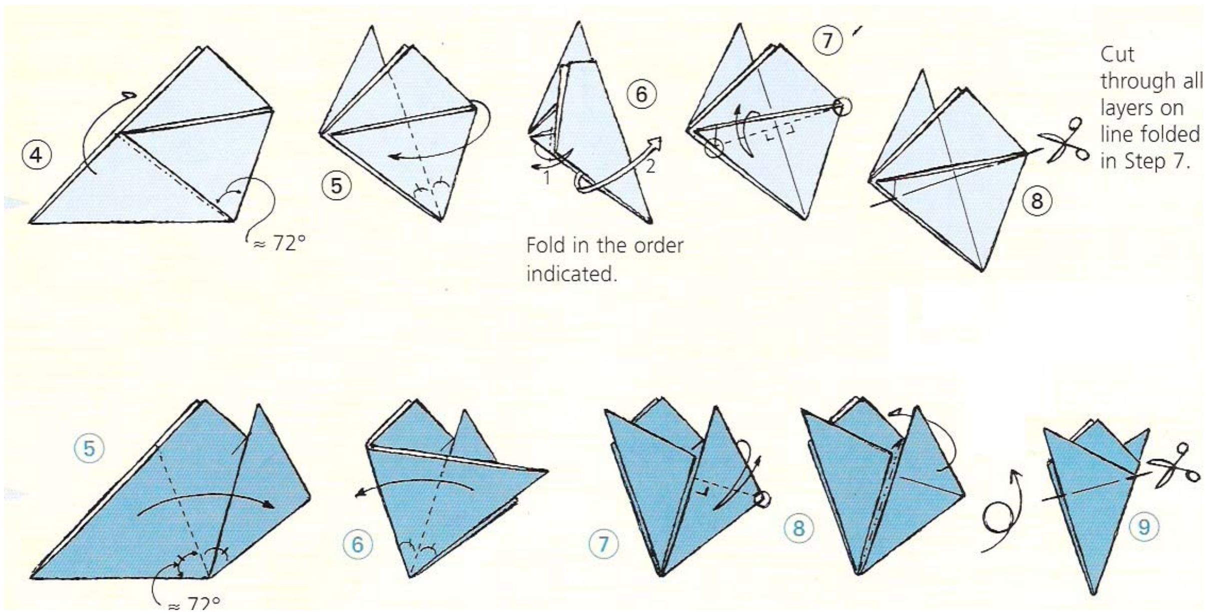

Figura 19. Parte dos del Diagrama de los Pentágonos

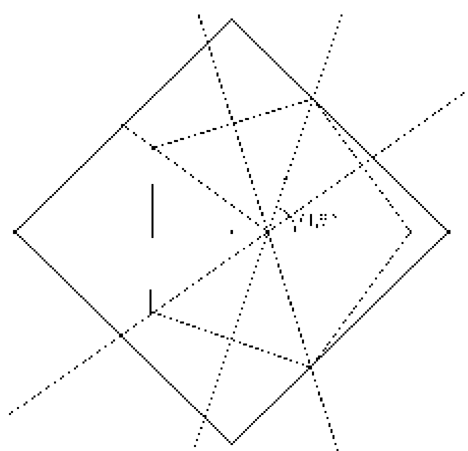

Figura 20. Diagrama en Cabrí del Modelo americano de hacer un pentágono

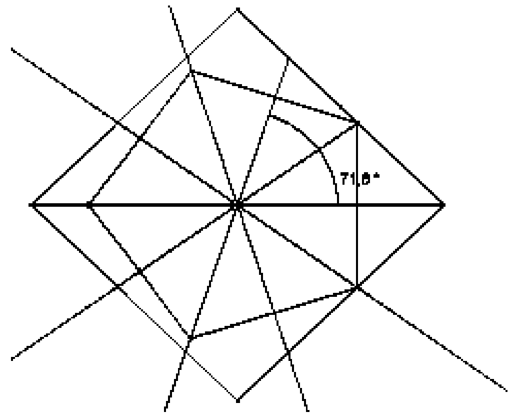

Figura 21. Desarrollo en Cabri del modelo japones de pentágono

Bibliografía

[1] ALPERIN, R., *New York Journal of Mathematics. A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers.* 2000. **6** 119-133.

[2] D'ACHIARDI, F., *Construcción de los Cinco Poliedros Regulares con la Técnica del Origami Modular.* Cursillo Dictado en el XII Encuentro de Geometría y su Aplicaicones, 2001.

[3] HULL, T., *Origami and Geometric Constructions.* (2003). Página de internet. Consultada en Enero de 2005. Dirección: http://merrimack.edu/∼thull/origamimath.html

[4] KASAHARA, K., *Amazing Origami*. Sterling Publising Company, Inc. New York. 2002.

[5] WERETREIM, M., *Un prodigio de la Ciencia Busca Secretos en el Origami.* Separata del Mew York Times, EL TIEMPO, 6 de Marzo de 2005, Página 5.