Desarrollo histórico del problema de Plateau

Luz Yecenia Méndez Herrera
Estudiante de la Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
yeceniamh@yahoo.com

Resumen

El *problema de Plateau* consiste en determinar la existencia de una superficie minimal acotada por un contorno dado. En el presente artículo se expone brevemente las investigaciones matemáticas más destacadas en la historia del problema de Plateau, en particular, las dos primeras soluciones del problema.

Palabras claves. Problema de Plateau. Problema de mínima área. Superficie minimal.

Abstract

The *problem of Plateau* consists on determining the existence of a minimal surface bounded by a given contour. In the present article is shortly exposed the most outstanding mathematical investigations in the history of the problem of Plateau, in particular, the first two solutions of the problem.

Key words. The problem of Plateau. Problem of the least area. Minimal Surface.

1. Introducción

El deseo de comprender el mundo que nos rodea es una característica propia de los seres humanos, y es precisamente esa curiosidad la que nos ha conducido a elaborar teorías que nos permitan establecer leyes que rijan la naturaleza. El problema de Plateau es una claro ejemplo de esto, pues surgió de un experimento físico, que para muchos de nosotros fue un divertido y fascinante juego de la niñez: sumergir un marco de alambre en una solución jabonosa, extraerlo y contemplar la película de jabón que se tiende sobre el marco de alambre, luego soplar y obtener burbujas.

Entre sus múltiples experimentos, el físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801–1883) se percató de que todo contorno formado por un solo alambre cerrado de cualquier forma geométrica (no demasiado grande), después de ser sumergido en una solución jabonosa, limita al menos una película de jabón [Pl, 1873].

En términos matemáticos el contorno se interpreta como una curva cerrada simple y las películas de jabón como superficies minimales; dar una demostración formal de la existencia de una superficie minimal acotada por una curva dada, es lo que se conoce como *el problema de Plateau*.

El estudio del problema de Plateau relaciona distintas áreas de la matemática, como lo son la geometría diferencial, variable compleja y cálculo de variaciones, entre otras. Además, es un problema que nos conduce a otras disciplinas, más allá del contexto matemático, tan cercanas como la física o la biología y tan lejanas como el arte o la arquitectura.

En el presente artículo, se exponen las primeras investigaciones que se hicieron en torno al problema de Plateau, antes de 1930, cuando se dieron las dos primeras soluciones del problema por parte de Jesse Douglas y Tibor Radó. También se da un esbozo de los procedimientos matemáticos utilizados por cada uno de estos dos investigadores en sus soluciones, señalando el enfoque y alcance de las respuestas de cada demostración. Por último, se indican algunos de los resultados que se han desarrollado posteriormente.

2. Investigaciones pioneras

La historia del problema de Plateau se remonta al surgimiento de las superficies minimales, cuando Lagrange [La, 1760] trabajó el siguiente problema:

Problema 1 (Problema del área mínima). *Sea* Γ *una curva cerrada simple en un espacio euclidiano, encontrar una superficie de área mínima acotada por* Γ.

Este problema consiste, básicamente, en encontrar una superficie $z = f(x, y)$ cuya área sea un mínimo, entre todas las superficies con Γ como frontera. El trabajo de Lagrange permitió establecer, posteriormente, que la superficie $z = f(x, y)$ que soluciona el problema de mínima área satisface la ecuación

$$(1) \qquad (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Esta ecuación, conocida como *la ecuación de la superficie minimal*, implica que la curvatura media de la superficie $z = f(x, y)$ se anula. Las superficies de curvatura media cero se conocen como *superficies minimales*, aunque tales superficies frecuentemente no producen un mínimo de área.

En consecuencia, si S es una superficie de área mínima, en el sentido de que resuelve el Problema 1, entonces S es una superficie minimal, concluyendo entonces que S también resuelve el problema de Plateau. No obstante, ésto no es cierto si ciertas condiciones de regularidad de la superficie S no se satisfacen (ver [R1, p. 764]); por lo tanto, el problema de mínima área y el problema de Plateau no son problemas equivalentes.

Posteriormente, el problema de Plateau fue considerado por Schwarz [Sc, 1890], Riemann [Ri, 1867] y Weierstrass [We, 1903], quienes discutieron el caso en el que el contorno dado es un polígono. Expresaron el problema en términos de la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dw^2} + p\frac{d\theta}{dw} + q\theta = 0,$$

con coeficientes

$$p = -\frac{fg'' - gf''}{fg' - gf'}, \quad q = \frac{f'g'' - g'f''}{fg' - gf'},$$

donde las funciones $f,\ g$ corresponden a las establecidas por la representación de Weierstrass para la superficie minimal buscada. Entonces, el problema consistía en solucionar la ecuación diferencial (2), donde p y q son funciones racionales de la variable compleja w, con coeficientes indeterminados (ver [R3, pp. 68–72]). Para determinar los coeficientes en p y q, debían remitirse al problema de Riemann sobre ecuaciones diferenciales con un grupo de monodromía dado[1]. Para la ecuación (2), el grupo de monodromía se conoce en cuanto el contorno poligonal Π es dado.

La solución de este problema es una superficie minimal cuya frontera poligonal Π_1 tiene sus lados paralelos a los de Π. Faltaba entonces concretar que los lados de Π_1 tuvieran las mismas longitudes que las de Π. Todo ésto fue reducido por Riemann y Weierstrass a un sistema de ecuaciones en los coeficientes de p y q, quienes junto a Schwarz tuvieron éxito en resolver sólo en casos especiales.

Bernstein [Be, 1910] y Haar [Ha, 1927] realizaron importantes trabajos sobre el problema, usando la representación no paramétrica $z = f(x, y)$ de la superficie. Bernstein tomó como base la ecuación diferencial elíptica (1) y consideró el problema de Plateau como una generalización del problema de Dirichlet con la ecuación (1) en lugar de la ecuación de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Haar usó el método directo del cálculo de variaciones introducido por Hilbert. Ambos investigadores asumieron que el contorno dado tiene una proyección convexa sobre el plano xy.

El caso de un contorno de forma general fue investigado por Garnier [Ga, 1928], quien siguiendo los métodos clásicos de Riemann y Weierstrass, mostró que dado cualquier contorno (a trozos) de curvatura acotada, existe una superficie minimal limitada por dicho contorno.

3. Solución del problema de Plateau

En la literatura existen varias formulaciones del problema de Plateau. A continuación se presenta la más adecuada para estudiar simultáneamente las soluciones de Radó y Douglas. Por comodidad, $\mathbb{E}^n$ denotará un espacio euclidano de dimensión n, con la norma usual

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in \mathbb{E}^n,$$

$\mathcal{C}$ el círculo unitario

$$\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\},$$

$\mathcal{D}$ el disco unitario abierto

$$\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\},$$

y $\overline{\mathcal{D}}$ el disco unitario cerrado $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$.

[1]El *grupo de monodromía* es el grupo de transformaciones lineales dadas por un conjunto fundamental de soluciones $\theta_1(w),\ \theta_2(w)$ donde w representa giros alrededor de los puntos singulares de la ecuación.

Problema 2 (Problema de Plateau). *Sea* Γ *una curva de Jordan en* $\mathbb{E}^n$*. Determinar una aplicación* $\mathbf{x} : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{E}^n$*, donde las* n *funciones componentes* $x_k(u,v)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Son armónicas en* $\mathcal{D}$*.*

(ii) $E = G,\ F = 0$ *en* $\mathcal{D}$*, donde* $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle,\ F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle,\ G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$*.*

(iii) *Son continuas en* $\mathcal{C}$ *y la aplicación* $\mathbf{x}(u,v)$ *transforma continua e inyectivamente el círculo unitario* $\mathcal{C}$ *en la curva de Jordan* Γ *dada.*

Nótese que las condiciones (i) y (ii) implican que la superficie S parametrizada por la aplicación $\mathbf{x}(u,v)$ es minimal y la condición (iii) que S es acotada por Γ.

3.1. Solución de Radó

Radó resuelve el problema de Plateau para una curva de Jordan que acota al menos una superficie con área finita[2], lo que le restó generalidad a su solución. Además, consideró el problema para $n = 3$, pero sus procedimientos se pueden extender a cualquier dimensión. En primer lugar, Radó plantea y resuelve el siguiente problema [R1, pp. 780–783]:

Problema 3 (Problema aproximado). *Sea* Γ *una curva de Jordan en* $\mathbb{E}^3$ *que acota al menos una superficie con área finita. Considérense además, tres puntos distintos* $A,\ B,\ C$ *sobre* Γ*, tres puntos distintos* $a,\ b,\ c$ *sobre* $\mathcal{C}$ *y* $\varepsilon > 0$ *arbitrario. Determinar una aplicación* $\mathbf{x} : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{E}^3$*, donde las funciones componentes* $x_k(u,v)$ $(k = 1,2,3)$ *satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Son armónicas en* $\mathcal{D}$*.*

(ii) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(E^{1/2} - G^{1/2}\right)^2 dudv \leq \varepsilon,\ \iint\limits_{\mathcal{D}} |F|\, dudv \leq \varepsilon$*, donde* $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle,\ F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle,$ $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle.$

(iii) *Son continuas en* $\mathcal{C}$ *y la aplicación* $\mathbf{x}(u,v)$ *transforma continua e inyectivamente el círculo unitario* $\mathcal{C}$ *en una curva de Jordan* Γ_ε *(no prescrita), tal que* $d(\Gamma, \Gamma_\varepsilon) \leq \varepsilon$*. Además, si denotamos por* $A_\varepsilon,\ B_\varepsilon,\ C_\varepsilon$ *las imágenes de* $a,\ b,\ c$ *por medio de* $\mathbf{x}(u,v)$*, entonces*

$$\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon, \quad \|B - B_\varepsilon\| \leq \varepsilon, \quad \|C - C_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Nótese que cuando $\varepsilon = 0$, este problema coincide con el Problema 2 (salvo la condición adicional impuesta sobre Γ y la dimensión del espacio). En efecto, la condición (ii) se reduce a $E = G,\ F = 0$ sobre $\mathcal{D}$, dado que $E,\ F,\ G$ son continuas. De otro lado, de (iii) se sigue que la curva Γ_0 coincide con Γ, pues $d(\Gamma, \Gamma_0) = 0$, así que $\mathbf{x}(u,v)$ aplica continua e inyectivamente $\mathcal{C}$ en Γ.

La solución del Problema 3, se basa en los conceptos de distancia entre curvas, distancia entre superficies (en el sentido de Fréchet), así como en la noción de área para poliedros (en el sentido de Lebesgue); además utiliza la existencia de representaciones isotérmicas de superficies poliedrales. Las definiciones de estos conceptos son claramente expuestas por Radó (ver [R1, pp. 770–776]), por lo cual, seguir la demostración del Problema 3 no tiene mayor dificultad.

Para resolver el Problema 2, Radó hace uso de la noción de *transformación monótona*[3] y del siguiente resultado (entre otros):

[2]Una curva de Jordan rectificable satisface dicha condición.

[3]Una transformación monótona aplica puntos de una curva en otra curva, manteniendo las posiciones relativas de los puntos transformados.

Teorema 4 (Principio de selección de Helly generalizado). *Sea* $\{\Gamma_n\}$ *una sucesión de curvas de Jordan en* $\mathbb{E}^3$ *que converge, en el sentido de Fréchet, a una curva de Jordan* Γ *en* $\mathbb{E}^3$*. Sea* $\{T_n\}$ *una sucesión de transformaciones monótonas del círculo unitario* $\mathcal{C}$*, parametrizado por* $u = \cos\theta,\ v = \sin\theta$*, en un conjunto sobre* Γ_n*; es decir*

$$T_n : \mathcal{C} \to \Gamma_n, \quad T_n(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (g_{n1}(\theta), g_{n2}(\theta), g_{n3}(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Si tres puntos distintos $a,\ b,\ c$ *sobre* $\mathcal{C}$ *son aplicados en tres puntos distintos* $A_n,\ B_n,\ C_n$ *sobre* Γ_n*, entonces existe una subsucesión* $\{T_{n_m}\}$ *que converge a una aplicación* T *tal que*

$$T : \mathcal{C} \to \Gamma, \quad T(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

donde $g_k(\theta) = \lim\limits_{m\to\infty} g_{n_m k}(\theta)$ $(k = 1, 2, 3)$*.*

Radó asume una curva de Jordan Γ que acota al menos una superficie con área finita. Considera sobre Γ tres puntos distintos $A,\ B,\ C$; sobre $\mathcal{C}$ tres puntos distintos a, b, c y considera además, una sucesión de números positivos $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Bajo las anteriores hipótesis, para cada ε_n se puede encontrar una aplicación $\mathbf{x}_n : \overline{\mathcal{D}} \to E^3$, cuyas funciones componentes $x_{nk}(u, v)$ $(k = 1, 2, 3,\ n = 1, 2, \ldots)$ satisfacen las condiciones $(i) - (iii)$ del Problema 3. En particular, la condición (iii) afirma que $\mathbf{x}_n$ transforma continua e inyectivamente el círculo unitario $\mathcal{C}$ en una curva de Jordan Γ_n, tal que $d(\Gamma, \Gamma_n) \le \varepsilon_n$; como $\varepsilon_n \to 0$ es claro que $d(\Gamma, \Gamma_n) \to 0$. Sean $A_n,\ B_n,\ C_n$ las imágenes de $a,\ b,\ c$ por medio de $\mathbf{x}_n$.

Si $g_{nk}(\theta)$ es la función que determina los valores de frontera de $x_{nk}(u, v)$, entonces la transformación continua e inyectiva T_n que aplica el punto $(u, v) = (\cos\theta, \sin\theta)$ en el punto $(g_{n1}(\theta), g_{n2}(\theta), g_{n3}(\theta))$ es una transformación monótona de $\mathcal{C}$ en un conjunto sobre Γ_n, que aplica los puntos $a,\ b,\ c$ de $\mathcal{C}$ en $A_n,\ B_n,\ C_n$ de Γ_n.

En consecuencia, el Teorema 4 garantiza la existencia de una subsucesión $\{T_{n_m}\}$ que converge a una transformación monótona T que aplica un punto $(u, v) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ de $\mathcal{C}$ en el punto $(g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta))$ de Γ, donde $g_k(\theta) = \lim\limits_{m\to\infty} g_{n_m k}(\theta)$; en particular T aplica $a,\ b,\ c$ en $A,\ B,\ C$.

Radó consideró la aplicación

$$\mathbf{x} : \overline{\mathcal{D}} \to E^3, \quad \mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

donde las funciones componentes $x_k(u, v)$ son definidas por la integral de Poisson:

$$x_k(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k(\theta) \mathbf{Re} \left[\frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \right] d\theta, \quad w = u + iv, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

y mostró que las funciones (3) satisfacen las condiciones $(i) - (iii)$ del Problema 2. Es decir, Radó soluciona el problema de Plateau para una curva de Jordan Γ, bajo la condición de que Γ acota al menos una superficie con área finita.

3.2. Solución de Douglas

A diferencia de Radó, Douglas resuelve el problema de Plateau para cualquier curva de Jordan en un espacio euclidiano de dimensión n [D1, 1931], [D2, 1933]. Douglas afirma que la dificultad específica en el problema de Plateau es probar que existe un mínimo de área; con base en ésto, relaciona su demostración con el conocido teorema de Weierstrass:

Teorema 5. *Una función real f continua sobre un espacio topológico compacto T es acotada sobre T, además f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre T.*

Este teorema puede ser generalizado a funciones que son semicontinuas inferiormente, así:

Teorema 6. *Una función semicontinua inferiormente finita definida sobre un espacio topológico compacto T alcanza su mínimo sobre T.*

El trabajo de Douglas consiste en definir un conjunto R que sea compacto, conformado por funciones $g : [0, 2\pi] \to E^n$, tales que $x_k = g_k(\theta)$ $(k = 1, \ldots, n)$ es una representación paramétrica del contorno dado Γ. Sobre tal conjunto, define el funcional

$$A(g) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\sum_{k=1}^{n} [g_k(\theta) - g_k(\phi)]^2}{4 \sin^2 \left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)} d\theta d\phi.$$

Para poder aplicar el Teorema 6, se hace necesario suponer que existe una representación g, para la cual $A(g)$ toma un valor finito[4]; bajo esta hipótesis, Douglas muestra que $A(g)$ es semicontinuo inferiormente y en consecuencia, existe una representación g^* en R tal que $A(g^*)$ es un mínimo.

Para la aplicación $\mathbf{x}(u, v)$ que buscamos en el Problema 2, Douglas define las funciones componentes $x_k(u, v)$ $(k = 1, \ldots, n)$ por medio de la integral de Poisson[5]:

$$x_k(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k^*(\theta) \mathbf{Re} \left[\frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w}\right] d\theta, \quad w = u + iv, \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Como $A(g^*)$ es un mínimo, de acuerdo con el cálculo variacional, se sigue que $A'(g^*) = 0$; Douglas muestra que esta igualdad implica que

$$\sum_{k=1}^{n} F_k'^2(w) = 0, \tag{4}$$

donde

$$F_k(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k^*(\theta) \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\theta.$$

La expresión (4), a su vez, implica que la superficie S parametrizada por la aplicación $\mathbf{x}(u, v)$ es minimal. De otro lado, la representación g^* resulta ser una función continua e inyectiva, así que S es la superficie minimal acotada por Γ que soluciona el problema de Plateau, para cualquier curva de Jordan con una parametrización g, tal que $A(g)$ es finito.

Douglas también resuelve el caso general, es decir, cuando $A(g) = \infty$ para toda representación g; considerando el contorno Γ como el límite de una sucesión de contornos Γ_n, para los cuales existe una representación g, con $A(g)$ finito.

[4]Esto se relaciona con la condición impuesta por Radó sobre la curva de Jordan: acotar por lo menos una superficie con área finita.

[5]Nótese que Radó también definió las funciones requeridas en el problema de Plateau, a través de la fórmula integral de Poisson; sin embargo, la manera de obtener las funciones de frontera $g_k(\theta)$ marcó la diferencia en sus soluciones: Radó utilizó esencialmente la existencia de aplicaciones conformes sobre poliedros, mientras que el método de Douglas es independiente de este hecho.

La demostración de Douglas contiene el problema de aplicación conforme de Riemann y el teorema de Osgood y Carathéodory, sobre la correspondencia de contornos. Su trabajo fue reconocido en 1936 con una de las dos Medallas Fields en el Congreso Internacional de Matemáticas.

Para concluir esta sección, se hacen algunas anotaciones sobre las anteriores dos soluciones, por ejemplo, se puede apreciar que Radó continúa con las ideas clásicas (es decir, con la integral de área y aplicaciones conformes) con que se venía trabajando el problema de Plateau; en cuanto a Douglas, su solución impacta con un novedoso método para la época: relacionar el problema de Plateau con el Teorema de Weierstrass, lo que proporcionó una solución más general que la de Radó, además, permitió esclarecer otros problemas fundamentales de análisis.

Las soluciones de Radó y de Douglas también permiten resolver el problema de mínima área (Problema 1), el cual, como se ha mencionado anteriormente, en condiciones muy generales no es equivalente con el problema de Plateau. Por último, como se verá en lo que sigue, las disertaciones de Douglas y Radó no dejaron concluido el estudio del problema de Plateau, al contrario, orientaron el camino hacia la apertura de nuevas cuestiones respecto al problema y a la superficie minimal que lo soluciona, y con el fin de darles una respuesta, se dio paso al desarrollo de novedosos trabajos.

4. Investigaciones posteriores

A continuación se plantea una generalización del problema de Plateau, junto con dos aspectos referentes a la superficie que lo soluciona: regularidad y unicidad.

4.1. Contornos y tipos topológicos

En la formulación del problema de Plateau (Problema 2) se plantea implícitamente que la superficie minimal buscada es del *tipo topológico* del disco. Ante esto, surge la inquietud de determinar una superficie minimal de cualquier tipo topológico, acotada por una curva dada. Douglas trabajó en esta pregunta cerca de 10 años y obtuvo una respuesta afirmativa. Su trabajo comenzó por extender su propio método, considerando dos curvas de Jordan Γ_1 y Γ_2 que no se intersecan [D3, 1931].

Luego, Douglas supone que las dos curvas Γ_1 y Γ_2 coinciden, adapta las fórmulas y los procedimientos que empleó para el problema de dos contornos, y demuestra, bajo condiciones apropiadas, la existencia de una superficie minimal de una sola cara (es decir, del tipo topológico de una cinta de Möbius) acotada por una curva de Jordan dada [D4, 1932].

Finalmente, Douglas formuló y resolvió el problema de Plateau en una forma aún más general: *dado un conjunto infinito de curvas de Jordan, encontrar una superficie minimal de cualquier tipo topológico, de una o dos caras, acotada por tal conjunto* [D5, 1939].

4.2. Regularidad de la solución

En cuanto a la posible existencia de puntos de ramificación (es decir, los puntos en los cuales $EG - F^2 = 0$) en la superficie minimal que soluciona el problema de Plateau, Osserman [Os, 1970] demostró que: *si una superficie minimal posee un punto de ramificación (necesariamente aislado), entonces ella no minimiza área en las proximidades de ese punto.* Osserman afirmó que las soluciones para el problema de Plateau están libres de cualquier punto de ramificación; sin embargo, su prueba para el caso de puntos de ramificación falsos[6] resultó estar incompleta; tres

[6]Un punto de ramificación es *falso* si se puede remover por medio de una reparametrización local, pero no en general por la parametrización global; los demás puntos de ramificación se dicen *verdaderos*.

años después, Gulliver [Gu, 1973] demostró la situación general, es decir, que no ocurren puntos de ramificación (ni falsos, ni verdaderos).

Respecto a la posibilidad de extender las funciones $x_k(u, v)$ $(k = 1, 2, 3)$ diferenciablemente a través de la frontera $\mathcal{C}$, Lewy [Le, 1951] probó que si la frontera es analítica entonces la superficie es analítica sobre la frontera; posteriormente Hildebrandt [H1, 1969], entre otros, generalizó tal hecho, y logró resultados que permiten conocer completamente el comportamiento sobre la frontera de la solución del problema de Plateau. Dichos resultados sólo afirman que tal extensión es diferenciable, pero no se afirma nada respecto de su regularidad, así que ésta puede tener puntos de ramificación, sin embargo, de acuerdo con la conclusión de Osserman–Gulliver, tales puntos de ramificación sólo podrían estar en $\mathcal{C}$. La existencia de puntos de ramificación en la frontera para la solución del problema de Plateau, es un interrogante que continúa aún abierto.

4.3. Unicidad de la solución

Como es habitual entre los matemáticos, después de una prueba de existencia, surge inquietud sobre la unicidad de la solución. Pero en el problema de Plateau existen contornos que acotan por lo menos dos superficies minimales (p. ej., las catenoides); por lo tanto, conviene *preguntarse cuántas superficies minimales pueden tenderse sobre una curva de Jordan* Γ *dada*. En conexión con este interrogante se han obtenido los siguientes avances:

- *Las curvas planas limitan una superficie minimal, única y plana. En este caso, el problema de Plateau se reduce al teorema de aplicación conforme de Riemann* [D1, 1931].
- *Si la proyección simple de un contorno sobre un plano es una curva convexa, sólo se puede tender sobre el contorno una superficie minimal del tipo discoidal* [R2, 1933].
- *Si la curvatura total*[7] *de una curva cerrada es menor que* 4π*, entonces existe una única superficie minimal discoide acotada por tal contorno* [N1, 1973].

Respecto al último resultado, recientemente se ha demostrado que *dados* $N \in \mathbb{N}$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe un contorno de curvatura total menor que* $4\pi + \varepsilon$*, el cual por lo menos limita* N *superficies minimales de tipo discoidal*. Ésto implica la imposibilidad de determinar una cota superior para el número de superficies minimales de tipo discoidal que pueden ser acotadas por un contorno dado.

No obstante, respecto al número de soluciones, se conoce que *si la solución del problema de Plateau no posee puntos de ramificación en la frontera, el número de tales soluciones será finito*; inclusive Tromba [Tr, 1976] y Böhme [BT, 1891], han determinado que *existe un subconjunto* $\mathfrak{C}$*, que es denso y abierto, en el espacio de curvas con la topología* C^∞*, tal que cada contorno de este subconjunto admite un número finito de soluciones para el problema de Plateau.* Actualmente aún no se prevé el caso de una curva que limite más de una superficie minimal y para la cual se conozca la totalidad de las superficies minimales que se puedan tender sobre ella.

Aunque existen construcciones de curvas que limitan infinitas superficies minimales de tipo discoidal (ver [C3, pp. 120–122]), todavía no se ha dado una demostración matemática formal sobre la existencia de tales contornos en el sentido más general. No obstante, W. H. Meeks y S. T. Yau (1982) establecieron un teorema de existencia, cuando el contorno satisface ciertas

[7] La *curvatura total* de una curva en el espacio, es un número que mide cuánto se curva el contorno completo, por ejemplo, la circunferencia de radio 1 tiene curvatura total igual a 2π.

condiciones de regularidad y la superficie minimal acotada por éste, es de área mínima sin puntos de ramificación sobre la frontera.

4.4. Otras soluciones y generalizaciones

El funcional definido por Douglas está ligado estrechamente con el principio de Dirichlet, de hecho, Douglas dio otra forma para $J(g)$ en términos de integrales de Dirichlet. Richard Courant, orientado por el método de Douglas, reformuló el principio de Dirichlet y proporcionó otra demostración, más sencilla, del problema de Plateau; la cual también permite resolver el problema general formulado por Douglas, para cualquier número de contornos y cualquier tipo topológico (ver [C1, 1937] y [C2, 1941]). El método de Courant también permite resolver el problema de Plateau para el caso donde toda la frontera, o parte de ella, no es prescrita, pero es libre sobre un conjunto cerrado conexo dado de cualquier dimensión menor que n; casos como éste son aparentemente inabordables utilizando el método original de Douglas.

Anteriormente, McShane había obtenido una tercera solución del problema, mejorando y completando algunas ideas de Lebesgue [McS, 1933]. Después, Morrey resolvió el problema de Plateau en su forma original y generalizada, no sólo en espacios euclidianos sino también en espacios de Riemann [Mo, 1966]. Posteriormente, usando algunas ideas de la Teoría de Cuerdas, Guillemin, Kostant y Sternberg, dieron una demostración elemental de los pasos más importantes en la prueba Douglas [GHS, 1988].

En la década de 1960, Federer, Fleming [FF, 1960], Reifenberg [Re, 1960] y Almgren [A1, 1966], desarrollaron la potente teoría geométrica de la medida que se ha convertido en una herramienta cada vez más influyente en el estudio de las superficies minimales y de curvatura media constante. Han desarrollado nuevas aproximaciones al problema de Plateau, usando métodos de dicha teoría, para encontrar conjuntos de medida mínima en un sentido adecuado, no como variedades parametrizadas, sino como subconjuntos de un espacio euclidiano.

Hildebrandt [H2, 1970] trató el problema de Plateau para superficies de curvatura media constante, es decir, investigó la siguiente cuestión: *dada una curva de Jordan Γ en E^3 y un número real H, encontrar una superficie en E^3 de curvatura media constante H tendida sobre Γ.*

Otra cuestión latente, es la existencia de auto–intersecciones en las soluciones del problema de Plateau. Osserman afirmó, en 1971, que *si una curva simple C está en la frontera de un dominio convexo, entonces una solución del problema de Plateau para C no posee auto–intersecciones.* Ésto fue resuelto por Meeks, quien luego lo extendió a situaciones más generales. Resultados similares también fueron obtenidos independientemente por otros matemáticos como Gulliver y Spruck, Tomi y Tromba, Almgren y Simons (ver referencias en [DC, pp. 87–89]).

Para terminar, nos alejamos del problema de Plateau puramente matemático, para explorar un poco su influencia en otras áreas distintas de la matemática. En biología, por ejemplo, se ha determinado la existencia de microorganismos marinos unicelulares, llamados Radiolarios cuyos esqueletos tienen las mismas formas básicas que ciertas películas o burbujas de jabón tendidas sobre marcos de forma poliédrica.

Inclusive en la arquitectura ha intervenido el problema de Plateau; algunos arquitectos han utilizado películas jabonosas como instrumento principal de sus diseños arquitectónicos, por ejemplo, la cubierta del Estadio Olímpico de Munich. Construcciones de este tipo se caracterizan por ser estructuras livianas y económicas, pues se utiliza la mínima cantidad posible de material en su construcción. Otro ejemplo sencillo y más cercano a nosotros, es una escalera en forma de "caracol", cuya forma se parece a la superficie minimal llamada helicoide, ciertamente podemos observar que el espacio que ocupa es menor, en comparación con el que ocupa una escalera tradicional.

Numerosos matemáticos y variadas investigaciones, han sido partícipes del problema de Plateau; en realidad, continúa siendo un tema actual y de gran interés por parte de científicos de distintos lugares del mundo. Hoy en día siguen surgiendo diversas publicaciones en torno a él, sin contar el desarrollo monumental que ha tenido la teoría de las superficies minimales, y aunque hemos tratado de reseñar las investigaciones más representativas, no alcanzamos a dar cuenta de todas; una bibliografía más extensa y detallada de los diferentes estudios sobre el problema de Plateau y superficies minimales, se pueden encontrar en [A2],[C3, pp. 95–166], [DC, pp. 68–89], [HT, pp. 95–116] y [N2, pp. 84–106].

Bibliografía

[A1] ALMGREN, F. J., Jr., *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extensions of Bernstein's theorem*. Annals of Mathematics, **84** (1966), 277–292.

[A2] ALMGREN, F. J., Jr., *Plateau's Problem: an invitation to varifold geometry*. New York – Amsterdam: W. A. Benjamin, 1966.

[Be] BERNSTEIN, S., *Sur le problème de Dirichlet généralisé*. Mathematische Annalen, **69** (1910), 82–136.

[BT] BÖHME, R.; TROMBA, A., *The index theorem for classical minimal surfaces*. Annals of Mathematics, **113** (1981), 447–499.

[C1] COURANT, R., *Plateau's problem and Dirihlet's principle*. Annals of Mathematics, **38** (1937), 679–725.

[C2] COURANT, R., *On a generalized form of Plateau's problem*. Transactions of the American Mathematical Society, **50** (1941), 40–47.

[C3] COURANT, R., *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. New York – Heidelberg – Berlin: Springer–Verlag, 1977.

[DC] DO CARMO, M. P., *Superfícies Mínimas*. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.

[D1] DOUGLAS, J., *Solution of the problem of Plateau*. Transactions of the American Mathematical Society, **33** (1931), 263–321.

[D2] DOUGLAS, J., *The problem of Plateau*. Bulletin of the American Mathematical Society, **39** (1933), 227–251.

[D3] DOUGLAS, J., *The problem of Plateau for two contours*. Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology, **10** (1931), 315–359.

[D4] DOUGLAS, J., *One–side minimal surfaces with a given boundary*. Transactions of the American Mathematical Society, **34** (1932), 731–756.

[D5] DOUGLAS, J., *Minimal surfaces of higer topological structure*. Annals of Mathematics, **40** (1939), 315–359.

[FF] FEDERER, H.; FLEMING, W. H., *Normal and integral currents*. Annals of Mathematics, **72** (1960), 458–520.

[Ga] GARNIER, R., *Le problème de Plateau*. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, **45** (1928), 53–144.

[GHS] GUILLEMIN V.; KOSTANT B.; STERNBERG S., *Douglas' solution of the Plateau problem*. Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America, **85** (1988), 3277-3278.

[Gu] GULLIVER, R. D., *Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature*. Annals of Mathematics, **97** (1973), 275–305.

[Ha] HAAR, A., *Ueber das Plateausche–Problem*. Mathematische Annalen, **97** (1927), 124–158.

[H1] HILDEBRANDT, S., *Boundary behaviour of minimal surfaces*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **35** (1969), 47–82.

[H2] HILDEBRANDT, S., *On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature*. Communications on Pure and Applied Mathematics, **23** (1970), 97–114.

[HT] HILDEBRANDT, S.; TROMBA, A., *Matemáticas y formas óptimas*, Barcelona: Prensa Científica, 1990.

[La] LAGRANGE, J. L., *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales indéfinies*. Miscellanea Taurinensia, **2** (1760), 173–195. *Oeuvres de Lagrange*. Paris: Gauthiers–Villars, **1**, 1867, pág. 335.

[Le] LEWY, H., *On the boundary behaviour of minimal surfaces*. Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America, **37** (1951), 103–110.

[McS] McSHANE, E. J., *Parametrizations of saddle surfaces, with applications to the problem of Plateau*. Transactions of the American Mathematical Society, **35** (1933), 716–733.

[Mo] MORREY, C. B., Jr., *The problem of Plateau on a Riemannian manifold*. Annals of Mathematics, **49** (1948), 807–851.

[N1] NITSCHE J. C. C., *A new uniqueness theorem for minimal surfaces*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **52** (1973), 319–329.

[N2] NITSCHE J. C. C., *Minimal surfaces and partial differential equations*. Editado por: LITTMAN, W., *Studies in partial differential equations*. Published and distributed by The Mathematical Association of America, Studies in Mathematics, Vol. 23, 1982, pp. 69–142.

[Os] OSSERMAN, R., *A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem*. Annals of Mathematics, **91** (1970), 550–569.

[Pl] PLATEAU, J. A. F., *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. París: Gauthier–Villars, 1873.

[R1] RADÓ, T., *The problem of least area and the problem of Plateau*. Mathematische Zeitschrift, **32** (1930), 762–796.

[R2] RADÓ, T.,*An iterative process in the problem of Plateau*. Transactions of the American Mathematical Society, **35** (1933), 869–887.

[R3] RADÓ, T., *On the problem of Plateau*. New York: Chelsea Publishing Company, 1951.

[Re] REIFENBERG, E. R., *Solution of the Plateau's problem for m–dimensional surfaces of varying topological type*. Acta Mathematica, **104** (1960), 1–92.

[Ri] RIEMANN, B., *Über die Fläche vom Kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*. Memorias de la Real Sociedad de Göttingen, **13**, Editadas por K. Hattendorff, 1867.

[Sc] SCHWARZ, H., *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Berlín: Springer, **1**, 1890.

[Tr] TROMBA, A., *On the number of solutions to Plateau's problem*. Bulletin of the American Mathematical Society, **82** (1976), 66–68.

[We] WEIERSTRASS, K., *Analytische Bestimmung einfach zusammenhängender Minimalflächen deren Begrenzung aus geradliningen, ganz im endlinchen liegenden Strecken besteht*. Mathematische Werke. Berlín: Mayer & Müller, **3** (1903), págs: 39–52, 219–220, 221–238.