Introducción a los orbifolds[1]

Stella Huérfano
Profesora Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
rshuerfanob@unal.edu.co

Francisco Meneses Perdomo
Estudiante Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
pacho6686@yahoo.com.mx

Resumen

Un orbifold es una generalización natural de una variedad. Localmente es el cociente de un subconjunto abierto de una variedad dividido la acción de un grupo finito. En este trabajo definiremos los sistemas de uniformización que definen la estructura de un orbifold.

Para el estudio de los orbifolds necesitamos de la definición de acción de un grupo G sobre un conjunto V, por eso introducimos los siguientes conceptos.

1. Acción de grupo sobre un conjunto

Definición 1.1. *Sea G un grupo y V un conjunto. La acción de G sobre V es una transformación $\theta : G \times V \to V$ que satisface:*

(I) *Si e es el elemento identidad de G, entonces $\theta(e, v) = v$, para todo $v \in V$.*

(II) *Si g_1, $g_2 \in G$, entonces $\theta(g_1, \theta(g_2, v)) = \theta(g_1 g_2, v)$ para todo $v \in V$.*

Para la transformación $\theta(g, v)$ usaremos la notación gv de tal forma que en la definición (1.1) el numeral *(ii)* se lea como $(g_1 g_2)v = g_1(g_2 v)$. También $\theta_g(v)$ denotara la transformación $\theta_g : V \to V$ definida por $\theta_g(v) = \theta(g, v)$, para un g fijo, de tal manera que el numeral *(ii)* se puede escribir como $\theta_{g_1 g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$.

Definición 1.2. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto V. La acción se dice que es*

(I) *Transitiva, si para cualquier $v_1, v_2 \in V$, existe un elemento $g \in G$ tal que $\theta(g, v_1) = v_2$.*

(II) *Libre, si $\theta(g, v) = v$ implica $g = e$, es decir, el elemento unidad es el único elemento de G para el cual θ_g tiene puntos fijos.*

(III) *Efectiva, si $\theta(g, v) = v$ para todo $v \in V$ implica que $g = e$, es decir, el elemento unidad es el único que define la acción trivial.*

Definición 1.3. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto V y sea $v \in V$. El estabilizador o grupo de isotropía de v, denotado por G_v, es el subgrupo de todos los elementos de G que dejan fijo a v, es decir, $G_v = \{g \in G | gv = v\}$.*

[1]Este escrito hace parte del proyecto 1101-05-11-445 para colciencias del grupo de Teoría de Representaciones del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

Definición 1.4. *Sea G actuando sobre un un conjunto V. El kernel de G, denotado por $KerG$, es el subgrupo de todos los elementos de G que definen la acción trivial, es decir, $KerG = \{g \in G | \theta_g(v) = v$ para todo $v \in V\}$.*

2. Orbifolds y su estructura

Definición 2.1. *Un sistema de uniformización de dimensión n para un espacio topológico conexo U es una tripla (V, G, π) donde*

(i) V es una variedad suave conexa de dimensión n,

(ii) G es un grupo finito que actúa de forma suave sobre V,

(iii) $\pi : V \to U$ es una función continua que induce un homeomorfismo $\hat{\pi} : V/G \to U$. Ver Figura 2.1.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\pi"] & V/G \arrow[r, "\hat{\pi}"] & U \end{tikzcd}$$

Figura 2.1

Definición 2.2. *Dos sistemas de uniformización (V_1, G_1, π_1) y (V_2, G_2, π_2) para U son isomorfos si existe un par de funciones (ϕ, λ) tal que:*

(i) $\phi : V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo,

(ii) $\lambda : G_1 \to G_2$ es un isomorfismo,

donde $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$ y ϕ es λ-equivariante, esto es $\phi(gx) = \lambda(g) \circ \phi(x)$. Ver Figura 2.2.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[rr, bend left, "\pi_1"] & V_1/G_1 \arrow[r, "\hat{\pi}_1"] \arrow[d, "\tilde{\phi}"'] & U \\ V_2 \arrow[r] \arrow[rru, bend right, "\pi_2"] & V_2/G_2 \arrow[ru, "\hat{\pi}_2"] & \end{tikzcd}$$

Figura 2.2

Definición 2.3. *Sea $i : U' \hookrightarrow U$ la inclusion de U' en U, U' un subconjunto abierto conexo de U y (V', G', π') un sistema de uniformización para $U^{'}$, se dice que (V', G', π') es inducido de (V, G, π) si se cumple que:*

(I) *Existe un monomorfismo* $\lambda : G' \to G$ *que induce un isomorfismo* $\lambda : kerG' \to kerG$*, donde* $kerG'$ *y* $kerG$ *actúan trivialmente sobre* V' *y* V*, respectivamente*

(II) *Existe un encajamiento abierto* λ*-equivariante* $\phi : V' \to V$ *tal que* $i \circ \pi' = \pi \circ \phi$*. Ver Figura 2.3.*

A ϕ *y a* λ *los llamaremos una inyección entre sistemas de uniformización y los notaremos como el par* $(\phi, \lambda) : (V', G', \pi') \to (V, G, \pi)$*.*

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\pi"] & V/G \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & U \\
V' \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\pi'"'] & V'/G' \arrow[u, "\tilde{\phi}"] \arrow[r, "\tilde{\pi}'"] & U' \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.3

Definición 2.4. *Dos inyecciones* $(\phi_i, \lambda_i) : (V_i', G_i', \pi_i') \to (V, G, \pi)$ $i = 1, 2$ *son isomorfas si existen*

(I) *Un isomorfismo* $(\psi, \tau) : (V_1', G_1', \pi_1') \to (V_2', G_2', \pi_2')$ *y*

(II) *Un automorfismo* $(\tilde{\psi}, \tilde{\tau}) : (V, G, \pi) \to (V, G, \pi)$*,*

tal que $(\tilde{\psi}, \tilde{\tau}) \circ (\phi_1, \lambda_1) = (\phi_2, \lambda_2) \circ (\psi, \tau)$*. Ver Figura 2.4.*

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & V & G \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & G \\
V_1' \arrow[u, "\phi_1"] \arrow[r, "\psi"'] & V_2' \arrow[u, "\phi_2"'] & G_1' \arrow[u, "\lambda_1"] \arrow[r, "\tau"'] & G_2' \arrow[u, "\lambda_2"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4

Lema 2.5. *Sea* (V, G, π) *un sistema de uniformización para* U*. Para cualquier subconjunto abierto conexo* U' *de* U*,* (V, G, π) *induce una única clase de isomorfismos de sistemas de uniformización para* U'*.*

Demostración. Primero demostraremos la existencia, para ello consideremos la imagen de $\pi^{-1}(U')$ en V. El grupo G actúa como un subgrupo de permutaciones sobre las componentes conexas de $\pi^{-1}(U')$. Sea V' una de las componentes conexas de $\pi^{-1}(U')$, sea G'

el subgrupo de G que fija los elementos de V' y $\pi' = \pi|_{V'}$. Entonces $(V^{'}, G^{'}, \pi^{'})$ es un sistema de uniformización inducida de U'.
Para la unicidad, sea (V_1', G_1', π_1') cualquier sistema de uniformización inducida para U' y (ψ, τ) la inyección sobre (V, G, π). Se mostrara que (ψ, τ) induce un isomorfismo entre (V_1', G_1', π_1') y el sistema de uniformización dado por una componente conexa V' de $\pi^{-1}(U')$, (V', G', π'). Supongamos que $\psi(V_1')$ permanece en la componente conexa V', entonces podemos probar que $\psi(V_1')$ es cerrado en V'. Sea $\psi(x_n) \to y_0$, $y_0 \in V'$, $x_n \in V_1'$, entonces existe un $z_0 \in V_1'$ tal que $\pi_1'(z_0) = \pi(y_0)$, y $z_n \in V_1'$ tal que $z_n \to z_0$ y $\pi_1'(z_n) = \pi(\psi(x_n)) = \pi_1'(x_n)$, por lo tanto existe $a_n \in G_1'$ tal que $a_n(z_n) = x_n$. Como G_1' es finito para un n suficientemente grande, $a_n = a$ es una constante, así que $x_n \to az_0$, $az_0 \in V_1'$ y $y_0 = \psi(a(z_0))$, es decir, $\psi(V_1')$ es cerrado en V', como ψ es una función abierta, $\psi(V_1')$ también es abierto en V'. Por lo tanto ψ es un difeomorfismo. ❑

Como para cada sistema de uniformización dado (V, G, π) de U, y para cualquier subconjunto abierto conexo $U^{'}$ de U, el sistema de uniformización (V, G, π) induce una única clase de sistemas de uniformización $\{(V', G', \pi')\}_{V' \subset \pi^{-1}(U')}$ para U', podemos definir el germen de un sistema de uniformización localizado en un punto $p \in U$ del siguiente modo:

Definición 2.6. *Sea U un espacio topológico conexo y localmente conexo, p un punto de U con vecindades U_1 y U_2 en U tales que (V_1, G_1, π_1) y (V_2, G_2, π_2) son sistemas de uniformización de U_1 y U_2 respectivamente, entonces, los sistemas (V_1, G_1, π_1) y (V_2, G_2, π_2) son equivalentes en p si ellos inducen un sistema de uniformización para cada $U_3 \subset U_1 \cap U_2$, U_3 vecindad de p. El germen de sistemas de uniformización de (V, G, π) en p es el conjunto de sistemas de uniformización (V', G', π') de vecindades de p las cuales son equivalentes con el sistema (V, G, π).*

Definición 2.7. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff, 2-contable. Una estructura de orbifold de dimensión n sobre X es un conjunto de sistemas de uniformización $\{(V_p, G_p, \pi_p) \mid p \in X\}$ tal que:*

(i) *La tripla (V_p, G_p, π_p) es un sistema de uniformización de U_p, U_p una vecindad de $p \in X$.*

(ii) *Para cualquier punto $q \in U_p$, (V_p, G_p, π_p) y (V_q, G_q, π_q) son equivalentes en q.*

Definición 2.8. *Dos estructuras de orbifold sobre*

$$X\{(V_p, G_p, \pi_p) \mid p \in X\} \text{ y } \{(V_p^{'}, G_p^{'}, \pi_p^{'}) \mid p \in X\}$$

son equivalentes si para cualquier $q \in X$ los sistemas uniformizantes (V_q, G_q, π_q) y $(V_q^{'}, G_q^{'}, \pi_q^{'})$ son equivalentes en q.

Definición 2.9. *Dada la estructura de orbifold $(\{(V, G, \pi)\}_{p \in X})$ para el espacio topológico X, el par $(X, \{(V, G, \pi)\}_{p \in X})$ es llamado un orbifold.*

Para cualquier $p \in X$ sea (V, G, π) un sistema de uniformización de una vecindad U de p. Sea $\tilde{p} \in V$ tal que $\hat{\pi}([\tilde{p}]) = p$, y sea $G_{\tilde{p}}$ el subgrupo de isotropía (ver definición 1.3) de $\tilde{p} \in V$, entonces tenemos que el subgrupo $G_{\tilde{p}}$ no depende de $\tilde{p}$. En efecto, si $\tilde{p}'$ es otra escogencia tal que $\hat{\pi}([\tilde{p}']) = p$ entonces existe un elemento $\gamma \in G$ tal que $\gamma\tilde{p}' = \tilde{p}$ por lo tanto $G_{\tilde{p}}$ y $G_{\tilde{p}'}$ son conjugados via γ pues si $g \in G_{\tilde{p}'}$ entonces $g\tilde{p}' = \tilde{p}'$, equivalentemente $g\gamma^{-1}\tilde{p} = \gamma^{-1}\tilde{p}$ de donde obtenemos que $\gamma g\gamma^{-1}\tilde{p} = \tilde{p}$, es decir, $\gamma g\gamma^{-1} \in G_{\tilde{p}}$. Nos referiremos a este subgrupo $G_{\tilde{p}}$, $p \in V$, como el grupo de isotropía de p, $p \in U$ y lo denotaremos G_p.

Definición 2.10. *Un orbifold X es llamado reducido si los grupos de isotropía G_p actúan efectivamente para todo $p \in X$.*

Esto implica que un orbifold es reducido sí y solo sí los grupos $kerG$ mencionados anteriormente son todos triviales.

Dado un orbifold X no reducido, uno puede asociar a este un orbifold reducido X_{red} redefiniendo los grupos G_i en cada sistema de uniformización (V_i, G_i, π_i) como $G_i/KerG_i$. De esta manera garantizamos que la acción sea efectiva.

Ejemplo 2.11. *La $\mathbb{Z}_3$-lágrima topológicamente es una dos esfera excepto por un punto singular p el cual es modelado sobre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_3$ donde $\mathbb{Z}_3$ actúa por rotaciones, el resto de puntos q están cubiertos por un sistema de uniformización donde G es el grupo trivial. Ver Figura 2.5*

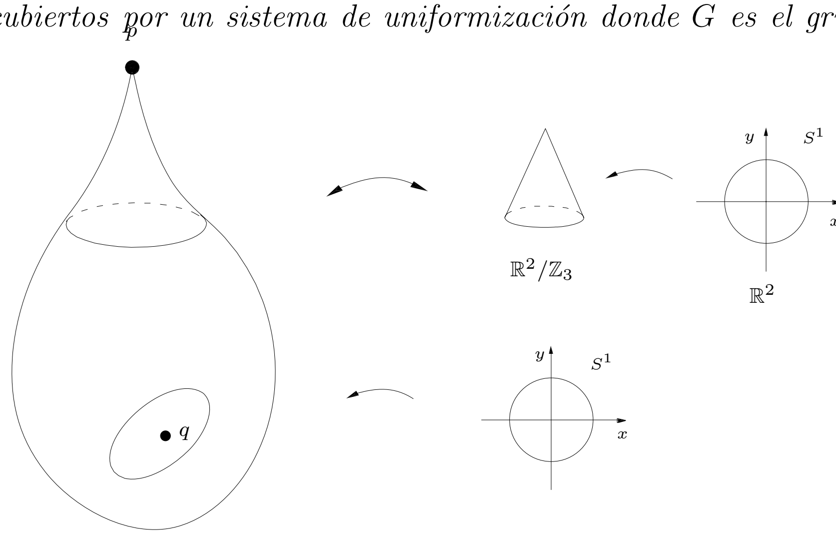

Figura 2.5

Invitamos al lector a que continúe con el interés en este tema pues aún es posible una investigación más amplia.