Términos n-ésimos de sucesiones y sumas finitas por medio de diferencias finitas

Rafael Mauricio Angarita Cervantes
Estudiante Univeridad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
angaritacervantes@gmail.com

Resumen

En este artículo se pretende mostrar un resultado de la teoría del Cálculo de Diferencias Finitas para hallar términos n-ésimos de sucesiones y sumas de series numéricas.

1. Introducción

Hallar el término general de una sucesión o la suma de una serie numérica no es tarea fácil; Se conocen algunos resultados concernientes a las sucesiones de los números figurados, y sucesiones de algunas potencias positivas de números naturales. Con respecto a las series numéricas, se pueden mencionar resultados concernientes a las llamadas series telescópicas, series P, utilizadas en la determinación de la convergencia de una serie infinita, etc. Se cuenta con varios criterios para determinar si una serie es convergente, pero no hay mucho acerca del valor hacia el cual converge. En este escrito se pretende contribuir a estas dos buenas causas.

Asumiremos aquí que una Sucesión es un conjunto de términos formados según una ley o regla, y una Serie como la suma indicada de los términos de una sucesión. Cuando el número de términos es limitado, se dice que la sucesión o serie es *finita*. Cuando el número de términos es ilimitado, la sucesión o serie se dice que es *infinita*. El *término general* o término *enésimo* es una expresión que indica la ley de formación de los términos. Por ejemplo,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

es una sucesión cuyo término enésimo es {n}. La serie que se forma con los términos es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots$$

Para hallar la suma de esta serie, hasta el término k, realizamos el ya tradicional procedimiento: Colocamos la suma indicada hasta el término k-ésimo de la serie, en orden descendente, y le sumamos esos mismos términos, pero colocados en orden ascendente; así:

$$\begin{array}{rrrrr} k+ & (k-1)+ & (k-2)+ & (k-3)+\ldots+ & 1 \\ 1+ & 2+ & 3+ & 4+\ldots+ & k \\ =(k+1)+ & (k+1)+ & (k+1)+ & (k+1)+\ldots+ & (k+1) \end{array}$$

En donde el resultado consta de k términos; por lo tanto, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Sin embargo, este procedimiento no es aplicable a todas las series finitas; es así que hallar términos enésimos de sucesiones y sumas finitas de series no es tarea fácil. Se mostrará que estos dos problemas pueden resolverse desde el Cálculo de Diferencias Finitas.

2. Diferencias finitas e integración finita

El cálculo de Diferencias Finitas hace referencia al estudio de las relaciones que hay entre los valores asumidos por la función cuando la variable independiente toma valores en serie aritmética; podemos decir también que lo que se busca es estudiar el comportamiento de la variable dependiente cuando se presenta un cambio en la variable independiente.

En lo que sigue notaremos las funciones con las letras U, V, etc. Si para la función U se tiene que la variable independiente es x, escribiremos U_x. Los cambios en la variable independiente los notaremos con Δx. Por ejemplo, si $U_x = x^2$ entonces

$$U_{x+\Delta x} = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x$$

y

$$U_{x+\Delta x} - U_x = 2x\Delta x + \Delta^2 x$$

Este Δx puede ser remplazado por cualquier número real, sin embargo, en este caso nos interesa estudiar el caso en que Δx es igual a 1.

3. Diferencia finita

Definición 1 (Diferencia Finita) *Al término $U_{x+1} - U_x$ lo llamaremos la primera diferencia de U_x y lo notaremos como ΔU_x.*

Si se habla de la primera diferencia, podemos entonces hablar de la segunda diferencia, definiendo esta como la primera diferencia de la primera diferencia, es decir:

$$\begin{aligned} \Delta^2 U_x = \Delta(\Delta U_x) =& \Delta(U_{x+1} - U_x) \\ =& (U_{x+2} - U_{x+1}) - (U_{x+1} - U_x) \\ =& U_{x+2} + U_x \end{aligned}$$

Siguiendo con esta idea, podemos hablar de la tercera diferencia, que queda como:

$$\Delta^3 U_x = U_{x+3} - U_{x+2} + U_{x+1} - U_x.$$

En general, para hallar la diferencia enésima de U_x, usamos la relación $\Delta^n U_x = \Delta(\Delta^{n-1} U_x)$.

Proposición 1 $\Delta(U_x + V_x - Z_x) = \Delta U_x + \Delta V_x - \Delta Z_x$

Demostración:

$$\begin{aligned}\Delta(U_x + V_x - Z_x) =&(U_{x+1} + V_{x+1} - Z_{x+1}) - (U_x + V_x - Z_x)\\ =&(U_{x+1} - U_x) + (V_{x+1} - V_x) - (Z_{x+1} - Z_x)\\ =&\Delta U_x + \Delta V_x - \Delta Z_x.\end{aligned}$$

Proposición 2 $\Delta(U_x V_x) = U_{x+1}\Delta V_x + V_x \Delta U_x$

Demostración:

$$\begin{aligned}\Delta(U_x V_x) =&U_{x+1}V_{x+1} - U_x V_x\\ =&U_{x+1}V_{x+1} - U_{x+1}V_x + U_{x+1}V_x - U_x V_x\\ =&U_{x+1}(V_{x+1} - V_x) + V_x(U_{x+1} - U_x)\\ =&U_{x+1}\Delta V_x + V_x \Delta U_x.\end{aligned}$$

Ejemplos:
$\Delta c = c - c = 0$
$\Delta x = (x+1) - (x) = 1$
$\Delta c U_x = cU_{x+1} - cU_x = c\Delta U_x$
$\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$
$\Delta \log x = \log(x+1) - \log(x) = \log(\frac{x+1}{x})$
$\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$

4. Formas factoriales

Al producto $U_x U_{x-1} U_{x-2} \ldots U_{x-n+1}$ los llamaremos *forma factorial*. Definimos también las siguientes formas factoriales:

$$(a+bx)^{(n)} = (a+bx)(a+b(x-1))(a+b(x-2))\ldots(a+b(x-n+1)) \tag{1}$$

Con $(a+bx)^{(0)} = 1$.
Ejemplo
$(a+bx)^{(3)} = (a+bx)(a+b(x-1))(a+b(x-2))$
$(a+bx)^{(5)} = (a+bx)(a+b(x-1))(a+b(x-2))(a+b(x-3))(a+b(x-4))$

Para los casos especiales $a = 0$ y $b = 1$, tenemos

$$x^{(n)} = (x)(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) \tag{2}$$

Teorema 1

$$\Delta(a+bx)^{(n)} = bn(a+bx)^{(n-1)} \tag{3}$$

Demostración:

$$\Delta(a+bx)^{(n)} = [(a+b(x+1))(a+bx)(a+b(x-1))\dots(a+b(x-n+2))]-$$
$$[(a+bx)(a+b(x-1))(a+b(x-2))\dots(a+b(x-n+1))] =$$
$$(a+bx)(a+b(x-1))(a+b(x-2))\dots(a+b(x-n+2))[(a+b(x+1))-(a+(x-n+1))] =$$
$$bn(a+bx)^{(n-1)}.$$

Corolario 1

$$\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)} \tag{4}$$

Corolario 2

$$\Delta^n x^{(n)} = n! \tag{5}$$

Corolario 3

$$\Delta^{n+1} x^{(n)} = 0 \tag{6}$$

Teorema de Newton

Si U_x es un polinomio de grado n en x, entonces U_x puede ser escrito como

$$U_x = U_0 + x^{(1)}\Delta U_x + \frac{x^{(2)}}{2!}\Delta^2 U_x + \dots + \frac{x^{(n)}}{n!}\Delta^n U_x \tag{7}$$

Demostración: Sea U_x un polinomio de grado n en x; U_x puede ser expresado como

$$U_x = a_0 + a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \dots + a_n x^{(n)1} \tag{8}$$

Lo que haremos ahora es hallar las primeras diferencias de U_x:

$$\begin{aligned}
\Delta U_x =& a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^{(2)} + \dots + na_n x^{(n-1)} \\
\Delta^2 U_x =& 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \dots + n\cdot(n-1)a_n x^{(n-2)} \\
&\vdots \\
\Delta^n U_x =& n!a_n
\end{aligned}$$

Despejando x por 0 en cada una de las igualdades anteriores, despejando las a_i y remplazando en (7), obtenemos (6).

Este resultado nos permite hallar el término enésimo de una sucesión; por ejemplo, hallemos el término enésimo de la sucesión {1,4,10,20,35,56,...}. Bauticemos cada término, usando la notación que hemos adoptado, como $U_0 = 1$, $U_1 = 4$, $U_2 = 10$, $U_3 = 20$, $U_4 = 35$, $U_5 = 56$. Lo primero que debemos hacer es la tabla de las primeras diferencias

[1]Esta no es una proposición descabellada, pues el término $x^{(n)} = (x)(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ es un polinomio de grado n en x. Lo que hemos hecho es rescribir U_x de manera conveniente.

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$	$\Delta^4 U_x$
0	1	3	3	1	0
1	4	6	4	1	0
2	10	10	5	1	
3	20	15	6		
4	35	21			
5	56				

De los resultados de la tabla y el corolario (4.3) se deduce que el término enésimo es un polinomio de grado (3), es decir, es de la forma

$$U_x = U_0 + x^{(1)}\Delta U_x + \frac{x^{(2)}}{2!}\Delta^2 U_x + \frac{x^{(3)}}{3!}\Delta^3 U_x$$

Remplazando los valores de la tabla, obtenemos

$$U_x = 1 + 3x^{(1)} + 3\frac{x^{(2)}}{2!} + \frac{x^{(3)}}{3!}$$

Expresando el polinomio anterior como un polinomio en x, nos queda el término enésimo de la sucesión es el polinomio

$$U_x = 1 + 3x + 3\frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Compruebe el lector la respuesta.

5. Integración finita

En el Cálculo de Diferencias Finitas el término *integración* es usado para denotar el proceso de encontrar una función V_x cuya primera diferencia es una función U_x dada. Esto es, determinar una función V_x tal que

$$\Delta V_x = U_x.$$

Esta operación puede considerarse como la inversa de la operación Δ la cual denotaremos como Δ^{-1}. Se ha mostrado que

$$\Delta\frac{x^{(3)}}{3} = x^{(2)}$$

Luego, tenemos

$$\Delta^{-1}x^{(2)} = \frac{x^{(3)}}{3}$$

Decimos entonces que $\frac{x^{(3)}}{3}$ es la integral finita de $x^{(2)}$. Se ha mostrado además que al sumarle una constante a una función, ésta desaparece cuando hallamos su primera diferencia; por lo tanto, en el proceso de integración debemos añadir una constante a la función obtenida. Así,

$$\Delta^{-1}x^{(2)} = \frac{x^{(3)}}{3} + C$$

y además

$$\Delta[\frac{x^{(3)}}{3} + C] = x^{(2)}$$

Ahora, si

$$\Delta^{-1}U_x = V_x + C$$

O bien

$$\Delta[V_x + C] = U_x$$

Se Tiene

$$\Delta[\Delta^{-1}U_x] = \Delta[V_x + C] = U_x$$

Es decir, la operación Δ^{-1} seguida de la operación Δ deja la función intacta. Sin embargo, no ocurre lo mismo al aplicar Δ^{-1} luego de haber aplicado Δ. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos establecer la siguiente tabla:

Diferencias Finitas	*Integración Finita*
$1.\Delta(U_x + V_x - Z_x) =$	$1.\Delta^{-1}(U_x + V_x - Z_x) =$
$\Delta U_x + \Delta V_x - \Delta Z_x$	$\Delta^{-1}U_x + \Delta^{-1}V_x - \Delta^{-1}Z_x$
$2.\Delta cU_x = c\Delta U_x$	$2.\Delta^{-1}cU_x = c\Delta^{-1}U_x$
$3.\Delta a^x = (a-1)a^x$	$3.\Delta^{-1}a^x = \frac{a^x}{(a-1)}$
$4.\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$	$4.\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}$
$5.\Delta(a+bx)^{(n)} = bn(a+bx)^{n-1}$	$5.\Delta^{-1}(a+bx)^{(n)} = \frac{(a+bx)^{(n+1)}}{b(n+1)}$
$6.\Delta[U_xV_x] = U_x\Delta V_x + V_{x+1}\Delta U_x$	$6.\Delta^{-1}[U_xV_x] = U_xV_x - \Delta^{-1}[V_{x+1}U_x]$

Recordemos que lo que buscamos es una forma de hallar sumas de series finitas; se mostrará a continuación que este es un problema de integración finita. En efecto, sea V_x una función cuya primer diferencia es la función U_x, es decir, $\Delta V_x = U_x$. De la definición de diferencia finita, tenemos

$$V_{x+1} - V_x = U_x$$

De donde se obtienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 &= U_0 \\ V_2 - V_1 &= U_1 \\ V_3 - V_2 &= U_2 \\ &\vdots \\ V_{n+1} - V_n &= U_n \end{aligned}$$

Sumando, obtenemos

$$\sum_{x=0}^{n} = U_x = V_{n+1} - V_0 = V_x|_0^{n+1} = \Delta^{-1}U_x|_0^{n+1}$$

Es decir, que la suma de cualquier número de términos de una serie de valores de U_x es igual a la diferencia entre dos valores de otra función V_x que es la integral finita de U_x.

Ejemplo: hallar la suma de los primeros n términos de la serie $1+3+7+13+21+...$

Solución: Aplicando el teorema de Newton, llegamos a que $U_x = 1 + 2x^{(1)} + x^{(2)}$. Así,

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n} U_x =& \sum_{x=0}^{n}[1 + 2x^{(1)} + x^{(2)}]\\ =& x^{(1)} + x^{(2)} + \frac{x^{(3)}}{3}\Big|_0^{n+1}\\ =& (n+1) + n(n+1) + \frac{n(n-1)(n+1)}{3}\\ =& (n+1)(\frac{2+4n}{3})\end{aligned}$$

Hallar términos enésimos de sucesiones y sumas de series numéricas se reduce así a un problema de diferencias finitas e integración finita. Existen otros métodos mas avanzados de integración, como por ejemplo integración por partes, integración por medio de coeficientes y funciones indeterminadas que, al igual que en el cálculo infinitesimal, son de mucha ayuda cuando se quiere hallar la integral de un producto de funciones, siendo una de ellas una función trascendente. Este método de integración permite que se pueda extender lo dicho hasta ahora a series en donde el término enésimo involucra una función no elemental. En [2] se encuentra un desarrollo detallado de éstos métodos.

Bibliografía

[1] GRANVILLE, W., *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Limusa, (1954).

[2] RICHARDSON, C.H., *An Introduction to the Calculus of Finite Differences*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1954.