ACERCA DE LOS NÚMEROS ABUNDANTES Y MULTIPERFECTOS IMPARES[1]

Oscary Ávila Hernández
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
oavilahe@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Muy frecuentenete en matemáticas nos vemos enfrentados al problema de la caracterización de ciertos conjuntos o estructuras. El objetivo de la comunicación es revisar algunos resultados elementales sobre los Números Perfectos y Multiperfectos Impares basados en los trabajos de G.Crammer y Servais, Junto con caracterización básica de los Números Abundantes y el teorema de (Euclides-Euler) para Números perfectos.

1. Preliminares

Alrededor del año 300 A.C. aparecen los elementos de Euclides, una colección de 13 libros que transformó las matemáticas. Tres de ellos (VII,IX,X) se dedican al estudio de la teoría de números, en el libro IX euclides da un aporte a la búsqueda de los números perfectos, demostró que si un numero es perfecto par, si tiene la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, donde p y $2^p - 1$ son primos.

En frase celebre F.Gauss consideraba La Matemática como la reina de las ciencias y a la Teoría de Números como la reina de la matemática, los problemas en la teoría de números han llamado la atención a notables matemáticos Profesionales entre ellos **Pitágoras, Euclides, Eratóstenes, Diofanto, Marin Mersenne, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Leonard Euler, C.F.Gauss** y la lista a un continua no solo con profesionales sino con aficionados. Debido a la variedad de areas con las cuales ella está conectada (Álgebra y Análisis) hacen de esta disciplina matemática un buen campo de investigación para futuros matemáticos, ya que parte de sus proposiciones poseen un atractivo peculiar.

"Aparentemente " ellas son simples en sus enunciados pero su demostración no se puede conseguir hasta después de muchos esfuerzos, algunos de ellos infructuosos.

[1]Dedicado a mi maestra María Antonia Cardozo

2. Función multiplicativa y números perfectos

Una función real definida sobre los naturales recibe el nombre de función aritmética o función de teoría de numeros.

2.1. Definiciones y propiedades.

Definición 1. Una función aritmética g se llama multiplicativa si cumple:

$$g(mn) = g(m)g(m)$$

siempre que (m,n)=1

Definición 2. Una Función h se llama totalmente multiplicativa si:

$$h(m,n) = h(m)h(m)$$

para cualquier m, n naturales.

Teorema 1 *La función $\sigma(n)$ es multiplicativa y además si $N = p^{\alpha}$ para algún primo p y α un natural se tiene que $\sigma(p^{\alpha}) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.*
(Siendo $\sigma(n)$ la funcion aritmética que representa la suma de los divisores de n)

Teorema 2 (Euclides-Euler.) *Un número par es perfecto si y sólo si es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, con p y $2^p - 1$ números primos.*

Teorema 3 *La suma iterada de los dígitos de un numero perfecto converge a* 1

Un resultado aun sin prueba es el que concierne a los números perfectos impares; un número perfecto es un número que es igual a la suma de sus divisores distintos de sí mismo. El natural 6 es divisible por 1,2 y 3, luego es un número perfecto ya que $1+2+3$ es igual a 6, seis es el más pequeño de los números perfectos, los tres siguientes son $28, 496$, y 8128 ¿Existen los números perfectos impares? es una pregunta que aun encuentra abierta y muy en pie.

Hasta el momento solo se conocen 41 numeros perfectos y todos ellos pares, además no se sabe si la lista es finita o infinita.
En mayo de 2004,Findley , Woltman , Kurowski hallaron que:
$2^{24036583-1}(2^{24036583} - 1)$ es un número perfecto, el cual posee 14471465 dígitos.

• Si denotamos por $\omega(n)$ el número de factores primos de n Hagis en 1980 mostró que si n es un número perfecto impar entonces $\omega(n) \geq 8$, Kishore en 1983 mostró que si 3 no divide a n (n número perfecto impar) entonces $\omega(n) \geq 11$

• Si un número perfecto impar existiera, sería mayor que 10^{300} R.Brent, G.L.Cohen, H te Riele, 1993

2.2. Números abundantes y multiperfectos

Definición 3. Un número n se llama abundante si es mayor que la suma de sus divisores propios , es decir $\sigma(n) > 2n$

Definición 4. Un número Multiperfecto impar es un número cuya suma de sus divisores propios es igual a un múltiplo (entero) de el mismo número.

Teorema 4 *Cualquier múltiplo de un número abundante o perfecto es abundante,* ***además un*** *número abundante posee como mínimo tres factores primos.*

Teorema 5 (Cramer.) *Sea N un entero impar con factorización prima:*

$$N = \prod p_k^{\alpha_k},\ donde\ k = 1, 2, ..., n$$

$p_k < p_{k+1},\ K = 1, 2, ..., n-1$
sea $A = \frac{\sigma(N)}{N}$ siendo $\sigma(N)$ la función suma de los divisores de N.
Entonces $p_1 < \frac{A+n-1}{A-1}$.

Teorema 6 (Extensión de Cramer.) *Si N es un entero impar con factorización prima:*

$$N = \prod p_k^{\alpha_k},\ donde\ k = 1, 2, ..., n$$

Con $p_k < p_{k+1},\ K = 1, 2, ..., n-1,\ y\ sea\ A = \frac{\sigma(N)}{N} > \frac{15}{8}$
Entonces $P_1 < \frac{A+n-1}{A-1}$, $P_2 < \frac{2A+3n-6}{2A-3}$, $P_3 < \frac{8A+15n-45}{8A-15}$

Agradecimientos. Deseo expresar mis agradecimientos a los estudiantes y colegas Alonso Sepúlveda Castellanos (Unicamp-Brasil) y Carlos Alberto Cardozo Delgado (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá) por las correcciones e ideas. Al Doctor Marlio Paredes Gutiérrez, director de la Escuela de Matemáticas UIS por su apoyo y espacio en el Laboratorio de Computo.

Bibliografía

[1] BETCHER, J.; JAROMA, J., *An Extension of the Results of the Results of Servais and Cramer on Odd Perfect and Odd Multiply Perfect Numbers. American Mathematical Monthly,*Vol 110 (2003)

[2] BURTON, D., *Elementary Number Theory.* 3ed.,*McGraw Hill*, 1980.

[3] DICKSON, L., *Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. American Journal Mathematica*, 35 (1913).

[4] FIGUEROA, A., *Números perfectos.* Tesis de grado de Licenciatura en Matemáticas. U.I.S., 1998.

[5] ROSEN, K., *Elementary Number Theory and its aplications.* 3 ed., *Addison Wesley*, 1993.