Algunos conceptos geométricos relacionados en el desarrollo del concepto de infinito

Oscar Martínez
Profesor Colegio Siervas de San José
Bogotá, Colombia

Resumen

En aras de estudiar el desarrollo del concepto de infinito, se hace conveniente examinar la historia de la matemática y en ella, de manera específica, el proceso que matemático e histórico que llevó al estudio y desarrollo de este concepto. J. A. Benardete plantea en su libro Infinito que "La historia entera de las matemáticas podría ser escrita alrededor del concepto de infinito, el tema central esencia de las varias posturas adoptadas en dirección al finitismo, tanto en pro como en contra". Podríamos afirmar que el infinito aparece como una conceptualización formal reguladora de la creación matemática.

Hagamos un examen rápido en la historia de la matemática para buscar sólo algunos episodios en los que se haga referencia al infinito: Las paradojas de Zenón, el infinito potencial aristotélico, el método de exhaustión de Arquímedes, los argumentos de San Agustín y Santo Tomás, la equipotencia en Galileo, Los volúmenes de Cavalieri, Los infinitesimales, la obra de Bolzano, los trabajos de Cantor,... Podemos ver la gran cantidad de hechos que aparecen relacionados con el infinito; todos estos hechos de distinta naturaleza (aritméticos, geométricos, del cálculo, etc. ...) contribuyeron al desarrollo del concepto de infinito que posteriormente culminaría Cantor.

En esta presentación trataremos de puntualizar algunos de estos hechos provenientes de la geometría, en los que esta intervino en el desarrollo del concepto de infinito, ya sea por una actitud "a favor o en contra"de él. Y para empezar, nada mejor que paradojas. Así que veamos a Zenón y sus argumentos relacionados con el movimiento.

Zenòn, Aristoteles y Arquimedes

Zenón (450 a. C.), proveniente de Elea (ubicado en Italia), produjo cuatro argumentos o paradojas que desde un primer punto de vista demuestran que no existe el movimiento, pero que si se estudian de manera más detallada nos permiten ver algunos conceptos relacionados con las infinidades en acto y con el movimiento en matemáticas.

Paradojas que, mas allá de ser el acabose de la matemática estructurada de la Grecia antigua o el origen de la teoría sobre series y sucesiones convergentes, son poderosos argumentos contra el método analítico de Pitágoras y su escuela, ya que si aceptamos las ideas analíticas, el espacio y el tiempo serían formados por componentes últimas (puntos e instantes) que podrían ser finitas o infinitas dando origen a cuatro posibilidades:

- Espacio y tiempo infinitamente divisibles (continuos)

- Espacio infinitamente divisible (continuo) y tiempo finitamente divisible (discreto)
- Espacio finitamente divisible (discreto) y tiempo infinitamente divisible (continuo)
- Espacio y tiempo finitamente divisibles (discretos)

Lo que hace Zenón es buscar situaciones que refuten las cuatro posibilidades para así concluir que el movimiento en matemáticas no existe y ver que los argumentos válidos en física no son siempre válidos en matemática y viceversa. Veamos como funcionan estas situaciones en una presentación alternativa. En la primera opción, tanto tiempo como espacio son continuos, es decir, infinitamente divisibles.

Pensemos ahora que con estas condiciones previas un punto tratará de desplazarse sobre una recta de un punto 0 a un punto 1. Pero para llegar de 0 a 1, primero debe alcanzar la posición $\frac{1}{2}$, pero antes debe alcanzar la posición $\frac{3}{4}$, pero antes de esto debe llegar a la posición $\frac{7}{8}$ y así sucesivamente luego al instante n se encontrará en $1 - \frac{1}{2^n}$. Como esta expresión nunca es igual a 1, el punto nunca llegará de 0 a 1.

En la segunda paradoja, Aquiles persigue a la tortuga a través de la parte de la recta numérica correspondiente a los reales positivos. Aquiles comienza en una posición digamos 0, y la tortuga a una unidad de distancia, es decir, en 1. Como Aquiles es el doble de rápido de la tortuga, espera atraparla en la posición 2. Pero la esperanza de Aquiles parece quedar tan solo en eso según el razonamiento de Zenón en el cual, cuando Aquiles esté en la posición 1, la tortuga estará en la posición $1 + \frac{1}{2}$, Cuando Aquiles llegue a la posición $1 + \frac{1}{2}$, la tortuga estará en la posición $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; y así sucesivamente.

Cuando Aquiles alcance la posición antigua de la tortuga $2 - \frac{1}{2^n}$, la tortuga llegará a la posición $2 - \frac{1}{2^{n+1}}$, siempre un pequeño paso delante de Aquiles, y de esta manera aunque se acerca mucho, El veloz Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

En su tercer argumento, Zenón concluye que una flecha en el aire no se mueve porque nunca sale del punto de partida, esto se tiene cuando se considera el espacio continuo y el tiempo discreto. La flecha nunca podrá ir de 0 a 1 porque en cada átomo de tiempo estará inmóvil, porque para ir de 0 a 1 debe existir un tiempo anterior para ir a $\frac{1}{2}$ y un tiempo posterior para ir de allí hasta uno y así sucesivamente para cada nuevo intervalo de $(0, 1)$, en algún momento llegará a una distancia que se recorrerá en un átomo de tiempo, pero para recorrer esa distancia deberá primero recorrer la mitad de ella en la mitad del tiempo, lo que es imposible porque el átomo de tiempo es indivisible, por eso la flecha nunca se moverá.

La última paradoja se refiere al espacio y tiempo discretos y prueba que al movimiento relativo no existe. En ella se plantean tres personas alineadas que se mueven un átomo de espacio en un átomo de tiempo. La idea es que estas personas se van a mover un átomo de espacio en un átomo de tiempo de la siguiente manera:

	t			t'	
A	$*$	$\longrightarrow$		$A*$	
B	$*$			$B*$	t
C	$*$		$C*$		

A avanza un átomo de espacio en un átomo de tiempo a la derecha, C hace lo mismo hacia la izquierda mientras que B permanece inmóvil. B dirá que tanto A como C pasaron al lugar siguiente en el tiempo siguiente, A dirá que B está en el lugar siguiente en el tiempo siguiente, pero C estará 2 lugares siguientes en un instante siguiente, lo que es contradictorio.

Hemos visto como los razonamientos de Zenón llevan a contradicciones que en principio llevan a pensar que el movimiento no existe, pero que vistos de otra manera pueden concluir que el tiempo es infinitamente divisible en cualquier intervalo, todos los argumentos de Zenón tienen la misma forma lógica:

Hipótesis finitista Otra consideración (por ejemplo la continuidad del espacio) Por lo tanto no hay movimiento

Esto es lógicamente equivalente a la forma

Hay movimiento Otra consideración (por ejemplo la continuidad del espacio) Por lo tanto la hipótesis finitista es errónea.

Esto nos permite ver que las paradojas de Zenón son un primer indicio de la consideración matemática de los infinitos actuales, en este caso vistos en el tiempo como continuo e infinitamente divisible, relacionados directamente con la divisibilidad de segmentos. En contraste a Zenón que supone infinitas bisecciones (actuales) de un segmento, Aristóteles utiliza esto para ejemplificar su idea sobre infinito potencial.

Para Aristóteles infinito es "Lo que no se deja recorrer y carece de límite". Y definió dos clases de infinito, uno potencial y uno actual, el primero dependiente del tiempo y el segundo independiente de él. Aristóteles marcó su tendencia por los infinitos potenciales y debido a su gran influencia en el pensamiento moderno hizo que los infinitos potenciales se adueñaran del pensamiento matemático, desterrando los infinitos actuales durante casi 2000 años de las ideas matemáticas.

Imaginemos por un minuto a Aristóteles con su regla y compás realizando la bisección de un segmento, luego la bisección de la mitad y así sucesivamente. Además supongamos que realiza una bisección por minuto. Así para cualquier periodo de tiempo entero n, el habrá construido en ese momento 2^n segmentos. Entonces el conjunto de segmentos no es en ningún momento infinito, pero por otra parte el tamaño o la cantidad de segmentos puede sobrepasar cualquier número fijado, en este sentido es potencialmente infinito.

Estos son conjuntos que serán construidos, pueden ser construidos pero por estar sujetos al tiempo no se puede decir si son finitos o infinitos, porque no es real, En otras palabras, el conjunto tiene "el poder"o "la potencia"de ser infinito. A pesar de la influencia de

Aristóteles, Arquímedes usó en sus trabajos sobre cálculos de volúmenes los límites al infinito aceptando este concepto en un sentido muy distinto al aristotélico.

En su libro El Método, Arquímedes de Siracusa (en Sicilia) aceptó el infinito y su uso en matemáticas, en particular desarrolló diversas técnicas para calcular volúmenes usando el infinito. Me atrevo a afirmar que esto se debe en parte a que el trabajo de Arquímedes y Zenón era menos filosófico que el de Aristóteles o los Pitagóricos. En el trabajo de Aristóteles y su concepción de infinito en matemáticas, juega un papel trascendental sus convicciones filosóficas y lógicas, y son estas en últimas las razones que no le permiten aceptar el infinito actual. El no estar sujeto tan fuertemente a consideraciones filosóficas permite a Arquímedes y Zenón mostrarse mas "Mente Abierta"frente a la idea y los métodos matemáticos relacionados con el infinito.

Todos recordamos como los trabajos mas importantes de Arquímedes el cálculo de áreas por el método de exhaustión y su acotación del valor de pi entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{17}$, resultados contenidos en su obra "El método". Sin restar mérito a este trabajo, en "El Arenario"Arquímedes, en contra de la intuición de los contemporáneos, logra dar carácter finito a un universo lleno de granos de arena. Esto gracias a un sistema de numeración que le permite construir un número (finito) mayor que la cantidad de granos que contendría un universo lleno de arena.

Para el sistema de numeración griego la unidad mayor en uso era la miríada, equivalente a 10000, y su número mayor era la miríada de miriadas. Arquímedes denominó "primos números"(probablemente quería decir primeros números) a los que se encontraban entre 1 y la miríada de miriadas. Posteriormente definió los "segundos números"cuya unidad era la miríada de miriadas y cuyo número máximo era la miríada de miríada de miríadas y así sucesivamente hasta llegar a la miríada de miriadésimos números, número que llamó "unidad del segundo periodo". Luego el proceso se repite hasta construir su número mas grande: "un miríada de miriadas unidades de miríadas de miriadésimos números de la miríada de miriadésimo periodo". Sorprendentemente (y desconozco la razón) este es el último número que utiliza Arquímedes y con él prueba que los granos de arena del universo es finito. Muy probablemente su profundo sentido práctico no lo motivó a seguir su serie numérica, ¿para qué seguir si ya tenía lo necesario?

Una Tabla puede aclarar un poco el sistema de numeración de Arquímedes, para facilitar la escritura llamemos Ω a la miríada de miriadas:

Primer Periodo	Segundo Periodo	...	Ω- ésimo Periodo
Primos Números $1, \ldots, \Omega$	Primos Números $\Pi, \ldots, \Omega\Pi$	...	Primos Números $\Pi^{\Omega-1}, \ldots, \Omega\Pi^{\Omega-1}$
Segundos Números $\Omega, \ldots, \Omega^2$	Segundos Números $\Omega\Pi, \ldots, \Omega^2\Pi$	...	Segundos Números $\Omega\Pi^{\Omega-1}, \ldots, \Omega^2\Pi^{\Omega-1}$
Terceros Números $\Omega^2, \ldots, \Omega^3$	Terceros Números $\Omega^2\Pi, \ldots, \Omega^3\Pi$	...	Terceros Números $\Omega^2\Pi^{\Omega-1}, \ldots, \Omega^3\Pi^{\Omega-1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n-ésimos Números	n-ésimos Números		n-ésimos Números

$\Omega^{n-1},\dots,\Omega^{n}$	$\Omega^{n-1}\Pi,\dots,\Omega^{n}\Pi$	$\dots$	$\Omega^{n-1}\Pi^{\Omega-1},\dots,\Omega^{n}\Pi^{\Omega-1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Ω-ésimos Números $\Omega^{\Omega-1},\dots,\Omega^{\Omega}=\Pi$	Ω-ésimos Números $\Omega^{\Omega-1}\Pi,\dots,\Omega^{\Omega}\Pi=\Pi^{2}$	$\dots$	Ω-ésimos Números $\Omega^{\Omega-1}\Pi^{\Omega-1},\dots,\Omega^{\Omega}\Pi^{\Omega-1}=\Pi^{\Omega}$

Recordemos que el propósito de Arquímedes al desarrollar este sistema de numeración era mostrar la finitud de un universo lleno de arena. Para ello además de los números se valió de una serie de hipótesis de índole física, entre ellas la elección del sistema heliocéntrico de Artistarco como Universo y las siguientes suposiciones, todas ellas coherentes para su época y de manera similar a las mediciones del diámetro de la tierra de Eratóstenes, producen resultados cercanos a los encontrados actualmente.

- Hay a lo sumo 10.000 granos de arena en una semilla de adormidera (esférica).
- Hay a lo sumo 40 diámetros de semillas de adormidera en el ancho de un dedo.
- Entran a lo más 10.000 anchos de un dedo en un estadio (200 m. aproximadamente.).
- La Tierra es una esfera, cuyo perímetro es inferior a 3'000.000 de estadios.
- La distancia entre el centro de la tierra y el centro del sol es menor que 10.000 diámetros de la tierra.
- El universo es una esfera, el Sol se encuentra en su centro y la Tierra gira alrededor del Sol describiendo un círculo. La razón del diámetro del universo al diámetro de la órbita de la tierra alrededor del Sol es menor que la razón entre el diámetro de la órbita de la tierra y el diámetro de ésta.
- El perímetro del círculo es mayor que el triple de su radio.
- El volumen de una esfera es proporcional al cubo de su diámetro.

Una posible solución al enigma de Arquímedes es:

1. Sea D_u el diámetro del Universo, D_o el diámetro de la órbita de la tierra en torno al Sol y D_t el diámetro de la Tierra.
2. La última hipótesis física se expresa: $D_u/D_o < D_o/D_t$.
3. La penúltima hipótesis afirma que D_o/D_t es menor que 10.000, por tanto $D_u < 10^4 D_o$.
4. De la hipótesis $D_o/D_t < 10^4$, vuelve a resultar $D_u < 10^4 \times 10^4 \times D_t = 10^8 D_t$.
5. La hipótesis sobre el perímetro de la Tierra da: $D_t < 10^6$ estadios, en virtud de la penúltima hipótesis.

6. Así pues: $D_u < 10^8 \times 10^6$ estadios $= 10^{14}$ estadios.

7. Puesto que hay menos de 10.000 diámetros de dedo en un estadio, se tiene: $D_u < 10^{14} \times 10^4 \times D_d = 10^{18} D_d$, siendo D_d el diámetro de un dedo.

8. Puesto que hay menos de 40 diámetros de semilla de adormidera en un dedo: $D_u < 40 \times 10^{18} \times D_p = 4 \times 10^{19} D_p$, siendo D_p el diámetro de una semilla de adormidera.

9. Según la última hipótesis, el volumen V_u del universo verifica la condición: $V_u < (4 \times 10^{19})^3 V_p = 6410^{57} V_p < 10^{59} V_p$, siendo V_p el volumen de una semilla de adormidera.

10. Según la primera hipótesis, una semilla de adormidera contiene a lo sumo 10^4 granos de arena, luego el número de granos de arena del universo es menor que $10^{59} \times 10^4$, o sea, 10^{63}.

Si bien en este caso Arquímedes no realiza un estudio concreto de algo infinito, si muestra la finitud de algo que a la fecha parecía infinito. Con esto Arquímedes separa “infinito”y “más grande”, y da al mundo un carácter finito en casi todos sus elementos.

De tangentes y trompetas

El problema geométrico de determinar tangentes a una curva y sus diversas aplicaciones a la física constituyen nuestro siguiente tópico de estudio, un objeto tan polémico como el infinito: “los infinitesimales”, cantidades infinitamente pequeñas que pueden ser entendidas como los recíprocos de cantidades infinitas, Estos elementos generaron gran polémica por el uso de ellas dentro del cálculo y en particular por su uso “normal”al operar como números pero “distinto”al considerar su valor.

Aunque debemos anotar que antes de la edad media la idea de los infinitesimales ya existía: Podemos citar a Arquímedes y su método de exhaustión para calcular volúmenes y el planteamiento de Nicolás de Cusa para calcular el área de un círculo cortándolo como una torta e intercalando las partes para formar una figura que, entre más pequeñas sean las partes del círculo, mas se asemeja a un rectángulo.

Podemos considerar al cálculo infinitesimal como la nueva ciencia del infinito, una ciencia en que las cantidades infinitamente pequeñas muestran su utilidad en las operaciones. Fueron Newton y Leibinz los pioneros de esta ciencia. Para Gottfried Wilhelm Leibniz por (1646-1716) las cantidades infinitesimales eran cantidades indefinidas que facilitaban los cálculos de variaciones, Leibniz planteaba que

“Cuando hablamos de cantidades infinitamente grandes (o, mas exactamente, ilimitadas) o de cantidades infinitamente pequeñas (es decir, el mínimo que puede captar nuestro conocimiento), sería suficiente que se comprendiera que nos referimos a cantidades indefinidamente grandes o indefinidamente pequeñas, es decir, tan grandes como se quiera, o tan pequeñas como se quiera, de tal forma que el error se les podría atribuir pudiera ser menor que una cierta cantidad prefijada”.

Veamos cómo funciona el método de los infinitesimales para calcular una recta tangente a una curva, por ejemplo $y = x^2$ en el punto (x, x^2). Sea dx un incremento infinitesimal de x, el correspondiente incremento de las imágenes será

$$dy = (x + dx)^2 - x^2 = 2x(dx) + (dx)^2$$

Por lo tanto la pendiente de la tangente será

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

si consideramos que la cantidad dx es lo suficientemente pequeño como para considerarse 0, la pendiente de la tangente a la curva será $2x + 0 = 2x$.

En el análisis infinitesimal moderno, se consideran elementos estándar y elementos no estándar, desde este punto de vista no se hace que dx tienda a 0, simplemente consideramos la parte estándar del cociente que se denota así:

$$std\left(\frac{2x(dx) + (dx)^2}{dx}\right) = std(2x + dx) = 2x$$

Pero estas cantidades que para el cálculo resultan útiles también tuvieron sus opositores, entre ellos uno de los más grandes fue George Berkeley (1685-1753) que consideraba que el uso de estas cantidades era ilegal y poco lógico. La crítica de Berkeley se puede resumir así: Si los infinitesimales son 0, no se puede dividir por ellos, y si no son cero, no es posible ignorarlos en una suma. Por lo tanto, ¿son o no 0?. El razonamiento de Berkeley puede tener razón, pero ¿quién se preocupa por estas "pequeñeces"si el método funciona tan bien?. Es un primer caso en el que la utilidad del concepto sobrepasa sus inconvenientes lógicos.

Bolzano es considerado el primer teórico del infinito, y en sus estudios aparece un objeto geométrico que al igual que los anteriores, causaba decepciones al entendimiento y al sentido común. En su trabajo, Bolzano mostró algunos casos que relacionan cantidades finitas e infinitas de una manera que parece poco lógica: "Una de estas figuras es el sólido de Torricelli (o trompeta del Arcangel), generado por rotar la curva $y = \dfrac{1}{x}$ con $x \geq 1$, sobre el eje x: su volumen es finito, pero su área superficial es infinita".

Cantor y el infinito

Hablar de infinito sin hablar de Cantor sería imposible. Aunque su trabajo sobre el infinito comenzó con el estudio y la fundamentación de los reales, es en algunas de sus demostraciones posteriores que vemos relaciones estrechas con la geometría y en particular con la organización o distribución de objetos en arreglos con determinada forma útil para probar propiedades es especial de equipotencia. Veremos 3 casos: Los racionales, los reales y los puntos de un cuadrado.

Un primer "golpe bajo"para la intuición es la equipotencia entre los naturales y los enteros. Si creen que este resultado es difícil de asimilar, no imagino que sentirán al saber que los racionales positivos ($\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$) también son equipotentes con los enteros positivos. Este resultado fue publicado en 1874 utilizando un ingenioso método para mostrar como suministrar una buena ordenación a $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, distribuyendo este conjunto en un retículo rectangular ilimitado y designando un camino en zigzag que, al ser seguido, permite asociar a cada racional un entero positivo.

Veamos como se puede enumerar este conjunto. En su primera versión del artículo "Contribuciones a la fundación de la teoría de los números transfinitos"Cantor presenta la enumeración de este hecho en §6 (léase apartado 6) de manera tácita. ¿Por qué?, en el artículo se muestran las operaciones entre números cardinales transfinitos y la relación que tienen ellas con los conjuntos. En dicho apartado Cantor muestra las relaciones que lo llevan a conjeturar que $\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$, luego prueba este resultado utilizando un conjunto con cardinal $\aleph_0 * \aleph_0$ y formulando una función biyectiva entre dicho conjunto y el de los números enteros positivos. El conjunto que Cantor usa es $\{(\mu, \nu)\}$ que representa al conjunto de todas las parejas (μ, ν) donde μ y ν son cualquier número cardinal finito, cada uno independiente del otro. Pero ¿qué tiene que ver $\{(\mu, \nu)\}$ con los racionales positivos? Si recordamos la figura que muestra la ilustración, esta nos permite relacionar a los racionales positivos con parejas ordenadas, así que ordenar las parejas será equivalente a ordenar los racionales positivos. Aunque Cantor no enunció este resultado como lo estoy planteando, se puede ver que la función utilizada en algunos libros de Análisis es la misma. No es objetivo de estas notas exponer esta demostración debido a su poca pertinencia.

Encontrar que los enteros positivos, los enteros y los racionales positivos eran equipotentes entre sí era, además de un golpe bajo a la percepción, un resultado que podría hacer intuir que eran mas los conjuntos equipotentes entre sí o en otras palabras, que muchos otros conjuntos eran equipotentes con los enteros positivos. Pero este "teorema en acto"se rompe cuando Cantor prueba de formas distintas en 1874 y 1891 que existen en los reales números que no son algebraicos, esto implica que, el conjunto de los números reales no resulta equipotente con los enteros positivos. La segunda demostración se convierte en la espada de Damocles que un sector de la comunidad matemática colocó sobre Cantor. Y es precisamente esta demostración la que utiliza un arreglo de números y su diagonal.

En 1874 Cantor publicó un artículo llamado "En una Propiedad de la Colección de todos los números algebraicos reales"en el que incluyó la primera prueba del hecho en cuestión.

Este artículo está dividido en dos secciones: la primera incluye la numerabilidad de los números algebraicos y la segunda como en un intervalo (α, β) siempre existirán números no algebraicos.

Cantor comienza el artículo definiendo el conjunto de los números algebraicos reales e introduciendo la notación (w) para estos y (ν) para los números naturales. Luego habla de la propiedad mencionada en el título; que la colección (w) puede ser puesta en una correspondencia uno a uno con (ν) o de manera equivalente:

"...la colección (w) puede ser puesta en forma de una secuencia infinita:

$$w_1, w_2, \ldots, w_\nu, \ldots$$

la cual está ordenada por una ley en la cual todos los individuos de (w) aparecen, cada uno de ellos localizado en el lugar fijado en la secuencia que está dado por el índice acompañante". Posteriormente Cantor da en su artículo el "plan de trabajo"de la siguiente manera:

"Para dar una aplicación de esta propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos, complemento la Sección número 1 con la Sección 2, en donde muestro que cuando se da una secuencia arbitraria de número reales de la forma $w_1, w_2, \ldots, w_\nu, \ldots$ uno puede determinar, en cualquier intervalo dado $(\alpha \ldots \beta)$, números η que no están contenidos en $w_1, w_2, \ldots, w_\nu, \ldots$. Combinando el contenido de ambas secciones esto da una nueva prueba del teorema demostrado primero por Liouville: En todo intervalo dado $(\alpha \ldots \beta)$, hay infinitos números trascendentes, es decir, números que no son reales algebraicos. Además, el teorema en la sección 2 presenta en si mismo la razón por la cual la colección de los números reales que forma el llamado continuo (como todos los números reales que son ≥ 0 y ≤ 1), no puede ponerse en correspondencia uno a uno con la colección (ν): Con esto he encontrado la diferencia clara entre el llamado continuo y una colección como el total de los números algebraicos".

Para llevar a cabo esto, Cantor plantea dentro de la prueba dos teoremas y dos corolarios que, al ser demostrados, llevarán de una manera muy sencilla y casi inmediata el desarrollo del programa de Cantor. Estos teoremas y corolarios son:

Teorema. *La colección de todos los reales algebraicos puede ser escrita como una secuencia (léase sucesión) infinita.*

Teorema. *Dada cualquier secuencia de números reales y cualquier intervalo* $[\alpha, \beta]$*, se puede determinar un número* η *en* $[\alpha, \beta]$ *que no pertenece a la secuencia. Por lo tanto uno puede determinar infinitos (demasiados) números como* η *en* $[\alpha, \beta]$*.*

Corolario. *En cualquier intervalo dado* $[\alpha, \beta]$ *hay infinitos (demasiados) reales trascendentes.*

Corolario. *Los números reales no pueden ser escritos como una secuencia infinita. Es decir, no se pueden poner en una correspondencia uno a uno con los números naturales.*

La demostración de estos teoremas (en especial del teorema , el más importante de los cuatro) es "tradicional"a la época y muy basadas en el cálculo y las sucesiones. Hasta aquí el resultado es solo "otro golpe bajo"pero de ahí no pasa. La polémica se enciende cuando en 1891 Cantor publica su "Prueba de la diagonal"

Esta demostración es uno de los puntos de polémica mas álgidos generados por el trabajo matemático de Cantor, debido a la utilización de una nueva manera para realizar demostraciones de este estilo conocido actualmente como "el método de la diagonal". Cabe recalcar que la demostración de 1891 se apoyó, igual que su antecesora, en el método conocido como "*reductio ad absurdum*", es decir, para probar que una proposición es verdadera se demuestra que su negación conduce a contradicción.

Pero, ¿por qué tanto revuelo por esta demostración?, si durante tantos siglos se utilizó la reducción al absurdo ¿por qué esta demostración genera tal conflicto entre la comunidad matemática?. Esto se debe en gran parte a que la tradición matemática existente hasta el momento “obligaba”que la existencia de un objeto se justificara por medio de su construcción o de un procedimiento establecido para realizar esto, sin importar lo largo o poco factible que este sea. Y desde esta perspectiva la demostración de Cantor pasa por encima de este paradigma; de hecho, podemos considerar esta demostración como una de las primeras de “existencia pura”. Una demostración en la que se prueba la existencia de algo, sin necesidad de construirlo.

Teorema. *El intervalo* $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ *no es numerable.*

Demostración. Esta demostración es traducida de “*Georg Cantor, his mathematics and philosophy of infinite*”.
Supongamos que el intervalo $(0,1)$ es numerable; sea

$$(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \text{ con } x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j$$

Si $x \in (0,1)$ entonces $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ con $a_i \in \{0, 1, \ldots 9\}$. En el caso de considerar un decimal finito realizamos la siguiente consideración: Si el desarrollo decimal de x es finito, es decir, si $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n$ con $a_n \neq 0$ entonces tomaremos una expresión infinita que equivalga al mismo número; así, si tenemos 0.25, tomaremos para la demostración 0,24999… que representa el mismo número; este hecho se puede justificar por la construcción de los números reales realizada por Cantor y expuesta anteriormente en este trabajo. De una manera más formal podemos expresar el desarrollo decimal de x de la siguiente manera:

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_n - 1}{10^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$

Exceptuando estos casos en que un número tiene dos representaciones decimales, en los otros casos las representaciones decimales de los números de este intervalo son únicas.
Si tomamos el número $x_\Omega = 0, \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$ en donde

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{si en } x_i, a_i \text{ es 0 ó 9} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se puede ver que $x_\Omega \in (0,1)$ y que además $(\forall i)(x_\Omega \neq x_i)$, lo que es contradictorio.
De esto se desprende que el conjunto de los números reales de dicho intervalo no es numerable y por consiguiente el conjunto de los números reales tampoco lo es. □

Es muy probable que el lector se pregunte en este momento ¿por qué se llama “método de la diagonal”?. Por esta razón veamos como funciona con un ejemplo “el espíritu de la diagonal”. Apliquemos, sin pérdida de generalidad, el razonamiento de la segunda demostración a una lista de números decimales de dicho intervalo así:
$s_1 = 0, [1]23456\ldots$
$s_2 = 0, 9[2]4875\ldots$
$s_3 =, 34[4]989\ldots$
$s_4 = 0, 638[1]09$

$s_5 = 0,6666[6]6\dots$
$s_6 = 0,10100[1]\dots$
$\vdots$

Esto generaría el número $y = 0,211212\dots$. Este es "el espíritu de la diagonal", al ir viendo los números de la sucesión organizados en un arreglo similar a una matriz y al tomar los dígitos de la diagonal vamos construyendo un número que difiera de todos ellos en el dígito de la diagonal y de esa manera será distinto de todos; pero ahí no para todo, al completar el proceso y obtener un nuevo número, podemos colocarlo al final de la lista, volver a aplicar el procedimiento y obtener así otro nuevo número. Esto nos permite ver que el método de la diagonal nos permite garantizar la existencia de infinitos entes que no cumplan algo, y digo entes porque este método también se puede aplicar a conjuntos u otros objetos; de hecho, "Kurt Gödel utilizando un razonamiento muy similar, demostró en 1931 los teoremas de incompletitud de la aritmética".

En este caso, la demostración afirma que existe un número distinto de los anteriores, pero no me permite caracterizar el número; la pregunta entonces es ¿es válida una demostración que ni siquiera me va a permitir construir el objeto sobre el cual se basa?. Para Kronecker no podía haber existencia sin creación, y esta fue una de las razones por las cuales no aceptó esta clase de demostraciones. Al ser la sucesión de números del intervalo arbitraria, esta demostración no ofrece pautas para construir dichos números. En la demostración de 1891, se demuestra la no numerabilidad del intervalo demostrando que, si no fuese así, sería contradictorio; en términos coloquiales, dice que "toca que sea así, y si no, de malas porque no nos funciona el conjunto".

En 1877, después de 3 años de su matrimonio, evento que le permitió conocer a Dedekind y que marcó un periodo extraordinariamente fructífero en su trabajo, Cantor logra encontrar una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Resultado sorprendente que lo llevó a escribir en una carta a Richard Dedekind "Lo veo y no lo creo". Para ver cómo se establece esta correspondencia veamos como se establece entre $(0,1)$ y $(0,1)\times(0,1)$ definido por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1\}$$

Cantor había propuesto a Dedekind el problema a saber: ¿Sería posible poner en correspondencia una superficie (como un cuadrado) con una línea recta (como un intervalo) de manera que a cada punto de la superficie le correspondiera un único punto de la recta, y recíprocamente?. Aunque Cantor opinaba que la respuesta debería ser negativa, no conseguía, ni tampoco Dedekind, dar razón para tal creencia.

A pesar de esto, hacia 1877 Cantor escribió una carta a Dedekind en la que le informaba con gran asombro que, contrario a lo que se pensaba en la época, no era imposible establecer la correspondencia biunívoca entre la recta y el plano. La demostración consiste en determinar cada punto de un cuadrado por un par ordenado de coordenadas en notación decimal; dichas representaciones se entremezclan por un procedimiento específicamente determinado para engendrar un único desarrollo decimal, que es asociado a un punto del segmento rectilíneo. Tal resultado tomó desprevenido a Cantor, tanto que lo hizo exclamar en su misiva a Richard Dedekind "Lo veo, pero no lo creo".

El procedimiento funciona así: Sea $(x, \nu) \in (0,1) \times (0,1)$ coordenadas de un punto A, entonces $x \in (0,1)$ y $\nu \in (0,1)$; y los desarrollos decimales de estos números son:
$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$
$\nu = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$
Al considerar los desarrollos decimales de estos números, se realiza la misma equivalencia utilizada en el método de la diagonal para considerar desarrollos decimales infinitos únicos. Entonces definamos una aplicación τ de $(0,1) \times (0,1)$ en $(0,1)$ envía la pareja (x, ν) en el número A' que tiene como desarrollo decimal:

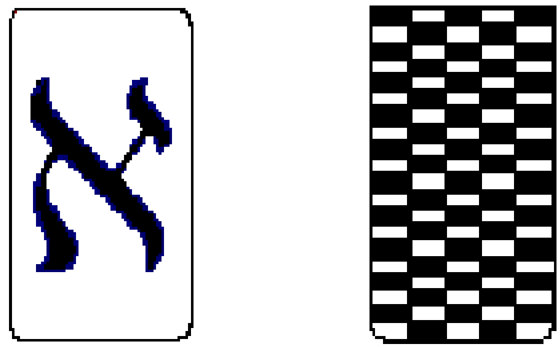
$$A' = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n \ldots$$

De manera análoga se extiende este razonamiento para encontrar las correspondencias biyectivas entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$.

Cantor preparó inmediatamente un manuscrito donde exponía su descubrimiento y lo envió, tal y como lo hizo en 1874, al *Journal für die reine und agewandte Mathematik* de *August Leopold Crelle*, más conocido como *Journal de Crelle*. Fue este artículo el que podríamos considerar como el "florero de Llorente"entre Cantor y Kronecker. Por ser uno de los editores de Journal, Leopold Kronecker, antiguo maestro de Cantor, estaba en la posición para bloquear la publicación de cualquier artículo, y debido al profundo impacto que causó en Kronecker la forma en que Cantor trabajaba con los conjuntos infinitos decidió bloquear el artículo. Probablemente Cantor sospechó de la intervención de Kronecker, lo que lo llevó a escribir una carta a Dedekind en la que se quejaba del trato que recibió su artículo y comentando la posibilidad de retirarlo de la revista. Como respuesta Dedekind persuadió a Cantor para que tuviese paciencia y esperara, lo que tuvo su efecto, ya que el artículo apareció publicado en 1878; lo que no fue suficiente para sofocar la indignación de Cantor que lo llevó a olvidarse del Journal como lugar para publicar sus trabajos. "Cantor 1-Kronecker 1". A pesar de los inconvenientes editoriales, Cantor no se desanimó y siguió estudiando; como fruto de estos trabajos, entre 1874 y 1884 se dedicó de lleno al estudio de la teoría de conjuntos. Dichos estudios fueron publicados por medio de seis memorias en los *Mathematische Annalen*.

Veamos otra de las demostraciones polémicas de Cantor: El cardinal de $\mathbb{N}$ es "menor"que el cardinal de $\wp(\mathbb{N})$. Para realizar esta demostración Cantor recurre de nuevo a la manzana de la discordia: El método de la diagonal y las listas infinitas en acto; en este caso, listas de conjuntos.

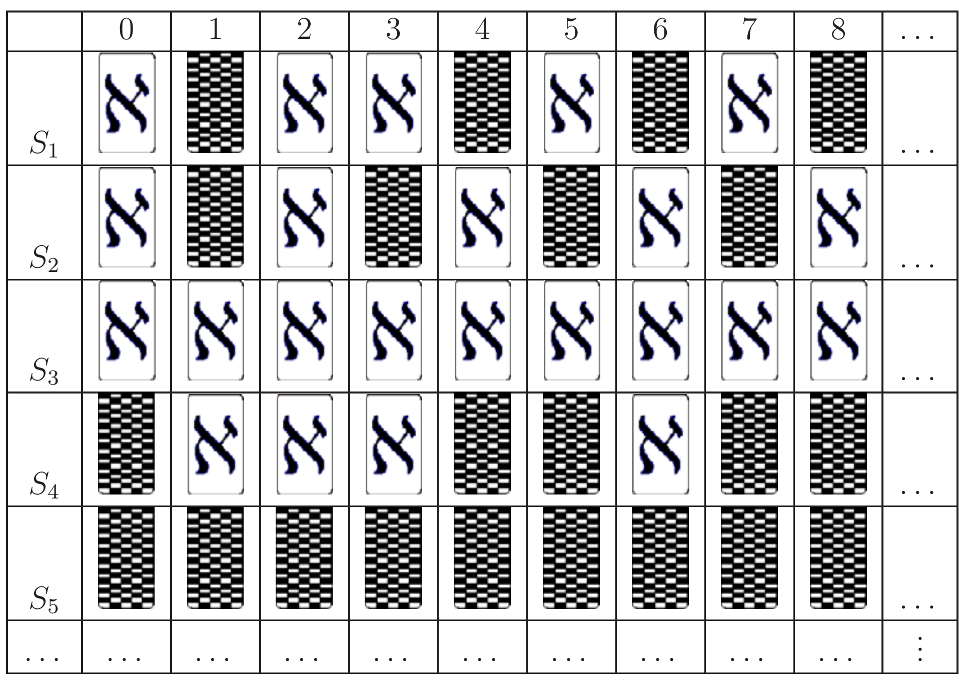
Podemos comenzar suponiendo que $\mathbb{N}$ es numerable, luego podemos establecer una lista de sus subconjuntos $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Ahora imaginemos un cuadro de doble entrada; este cuadro tendrá en la primera columna los subconjuntos de $\mathbb{N}$ y en la primera fila los elementos de $\mathbb{N}$. Ahora sobre cada fila se extenderá una baraja infinita de tal suerte que, si el número de la columna está en el subconjunto de la fila la carta esté boca arriba, o boca abajo en el caso contrario. Las cartas boca arriba y boca abajo respectivamente serán:



Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos algunos subconjuntos de $\mathbb{N}$ para ver como funciona el cuadro. Sean:

S_1=Conjunto de los números primos $S_3 = \mathbb{N}$
S_2=Conjunto de los números pares $S_4 = \{1, 2, 3, 6\}$ $S_5 = \emptyset$

Para estos conjuntos el cuadro quedaría de la siguiente manera:



Ahora utilicemos de nuevo la diagonal y consideremos todas las cartas que están sobre ella, si consideramos el subconjunto formado por las cartas de la diagonal al darles la vuelta, este subconjunto sería distinto a todos los S_i, luego se presenta la misma situación y $\wp(\mathbb{N})$ no es numerable, a diferencia de $\mathbb{N}$. Utilicé las cartas en esta demostración para ver de manera mas general el método, podemos reemplazarlas por dígitos de un número, por conjuntos por extensión, etc. La idea siempre será considerar la diagonal y modificar sus elementos. Espero que para el lector este ejemplo sea de gran ayuda y pueda servir como apoyo por si algún día debiera explicar el método diagonal.

Bibliografía

[1] ANGLIN, W., *The philosophy of Mathematics*. The Edwin Meller Press, New York, 1997.

[2] BENARDETE, J., *Infinity*. Oxford: Clarendon Press, 1964

[3] CALDER, A., *El infinito, piedra de toque del constructivismo*. Investigación y Ciencia, Temas 23

[4] CANTOR, G., *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Dover, 1955.

[5] CARRERA, J., *El infinito y la lógica de primer orden*. Investigación y Ciencia, Temas 23, Barcelona, 2001.

[6] CASTRO, I.; PÉREZ, J., *Infinito Potencial vs. Infinito Actual*. en XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 2003.

[7] DELAHAYE, J., *El Carácter Paradójico del Infinito*. Investigación y Ciencia, Temas 23.

[8] GRAY, R., *Georg Cantor and Trascendental Numbers*. The American Mathematical Monthly, Volumen 101, Número 9, Noviembre, 1994.

[9] MARTINEZ, O., *Historia Finita del Infinito Actual de Cantor*. Bogotá, 2004, tesis de Licenciatura en matemáticas Universidad Pedagógica Nacional.

[10] SÁNCHEZ, C., *Surgimiento de la teoría de conjuntos*. en II coloquio distrital de matemáticas y estadística.

[11] SINACEUR, H., *El Infinito*. Mundo Científico, No. 151 volumen 14, páginas 942-948.

[12] STEWART, I., *De Aquí a Infinito, Crítica*. (Grijalbo Mondadori S.A.), Barcelona, 1998.

[13] THUILLIER, P., *Dios Cantor y el Infinito, La trastienda del sabio profundamente ilustrada*. Editorial Fontalba.