Consideraciones sobre la educación del pensamiento espacial y geométrico

Jorge Castaño García
Grupo Cognición y Escuela
Bogotá D.C, Colombia
Jcastano@javeriana.edu.co

Se asume como enfoque para la enseñanza de la geometría el enfoque de geometría activa, propuesto por Vasco, ya que a consideración del autor este es un marco suficientemente orientador e incitador para recrear práctica de la enseñanza de la geometría. El documento pretende fijar posiciones sobre los desarrollos que de esta propuesta se han hecho, e intenta señalar algunos vacíos que al parecer del autor adolecen muchos de los desarrollos prácticos que éstos planteamientos.

Los planteamientos que se formulan y las experiencias que se describen son fruto de la experiencia Descubro la Matemática.

La poca comprensión del enfoque de geometría activa

Tal como está planteado el problema de la educación en geometría, por lo menos en el caso de nuestro país, a partir de las precisiones hechas por el Doctor Vasco en: *Un Nuevo Enfoque para la Didácticas de la Matemáticas*[1] , puede describirse en los términos siguientes:

- La propuesta de enseñanza de la geometría del MEN parte de no enseñar la geometría a la manera como tradicionalmente los textos exponen la teoría de Euclides,
- Aceptar lo anterior supone no partir de entes abstractos como punto, recta, plano, etc. para construir las figuras y estudiar sus propiedades, en una lógica de lo simple a lo compuesto, sino más bien partir del objeto físico, que es un sólido, para llegar a la figura sólida, y por exploración activa encontrar las caras y sus formas y sus relaciones, luego las aristas, sus formas, sus direcciones y sus relaciones, y, finalmente, sus vértices.
- No hacer un estudio discreto de la figura, sino más bien, adecuándose al pensamiento de los niños, abordar el estudio de la figura como un continuo. Una concepción analítica, discreta del plano se aplazaría para niveles superiores.
- No mantener el estudio de las figuras como totalidades separadas sino establecer relaciones entre sus componentes (interfigural), entre ellas (interfigural y en el nivel

[1] Vasco C. Un Nuevo Enfoque para la enseñanza de la Matemática. Serie Pedagogía y Currículo. Volumen II. MEN. 1994.

de primaria proyecciones muy elementales hacia lo transfigural), haciendo clasificaciones jerarquizadas, como fruto de poder operar en un sistema cada vez más amplio a nivel de los elementos de las figuras y las relaciones entre ellas. .

- Como alternativa al estudio de figuras cosificadas, estatificadas, en este documento Vasco propone estudiar una geometría activa, consistente en la exploración de la figura mediante los movimientos, empezando por el de propio cuerpo, (como cuando el niño recorre la frontera de una figura) y pasando por el movimiento que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comporta este objeto y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos. Quizá sea este el aspecto de la propuesta, que en la práctica ha resultado más difícil de ser apropiado en su verdadero sentido, reduciéndose a una serie de manipulaciones orientadas a apoyar la percepción de formas.

- Si bien se opta por no hacer un estudio de la geometría a la manera de Euclides, esto no conduce a asumir una enseñanza de la geometría desde el programa Erlangen (uno de sus partidarios destacados es Dieudonné). Se reconoce que la enseñanza de una geometría activa vincula a los niños con transformaciones que son estudiadas posteriormente en una formalización de las transformaciones, pero esto no significa que se imponga como meta el enseñar por medios intuitivos los conceptos abstractos y procedimientos refinados de tal formalización. A este propósito Vasco plantea en el documento citado "La meta global en la geometría no es pues el manejo de los sistemas formales de axiomas, ni el estudio de las transformaciones y sus invariantes según el programa de Erlangen, ni el razonamiento estereotipado de las demostraciones a doble columna, ni el dominio del álgebra lineal y la geometría analítica. Es el juego con sistemas concretos de la experiencia inmediata del espacio y del movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio y a la expresión externa, ojalá operatoria, de estos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos"

- Si se dominan los desplazamientos en el plano y en el espacio tridimensional, si se saben combinar amplificaciones y reducciones, giros y reflexiones, transformaciones y cambios de escala, es posible empezar a detectar las propiedades comunes a esos sistemas operatorios cerrados y reversibles que llamamos grupos, analizar lo que varía y lo que permanece invariante, a clasificar y determinar las inclusiones entre clases de transformaciones, y tal vez a reconstruir buena parte del programa de Erlangen. Pero es más importante que la gran mayoría de los alumnos se muevan con aplomo y buena orientación en el espacio externo, que lo dibujen y modelen con precisión y ojalá con arte, ...". Propone que antes de asumir las transformaciones mismas como objeto de estudio, sean ejercitadas lo suficiente en el nivel interfigural, hasta hacerlas concretas como fruto de operar a nivel concreto con ellas, haciéndose posible estudiarlas como un nuevo sistema.

Estas ideas fundamentales del marco de referencia formulado por Vasco, en muchos casos, no han sido comprendidas en su verdadero sentido y en propuestas didácticas concretas, que dicen asumen tal marco de referencia, a la postre terminan tergiversándolo.

A juzgar por lo que se aprecia en algunas prácticas, se puede afirmar que el carácter dinámico que se propone darle a la enseñanza de la geometría, se entiende como el simple hecho de seguir transmitiendo los mismos contenidos que anteriormente se enseñaban, pero mediante recursos didácticos que requieren del niño hacer manipulaciones. Se pide a los estudiantes que recorten y manipulen modelos, en algunos casos, se recurre a los plegados para ilustrar algunas construcciones, al tangram, etc, .pero estas propuestas carecen de una intencionalidad clara por hacer que el niño opere mentalmente a medida que tiene estas experiencias. En otras palabras, en este tipo de prácticas, se hace más énfasis en la actividad física en sí misma que en el pensar y en el reflexionar sobre las acciones y sus resultados. No se ha logrado resolver un problema didáctico básico: ¿cómo establecer un puente que garantice una continuidad de construcción entre las acciones efectivas y las representaciones mentales, más exactamente entre las operaciones con estas representaciones? Las manipulaciones se convierten más en un pretexto para ilustrar de forma más clara las explicaciones del profesor.

Cuando se habla de enseñar una geometría dinámica que ayude los niños a desarrollar un pensamiento capaz de operar con las formas y las posiciones, se hace referencia a la necesidad de impusarlos a vivir experiencias verdaderamente problematizadoras que inciten el pensamiento creador. Experiencias en las que los estudiantes tengan la oportunidad de plantearse problemas y preguntas sobre propiedades geométricas, de formular sus propias hipótesis y conjeturas, de planear acciones que le permitan verificarlas o refutarlas, de obtener consecuencias y elaborar sus explicaciones sobre el por qué de los resultados obtenidos.

El siguiente ejemplo ilustra lo anterior. al enseñar a los niños la constancia de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, no basta pedirles que hagan algunas manipulaciones para que verifiquen, por sus propios medios, que la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 1800.

No basta, por ejemplo, pedirles que tracen varios triángulos, que midan sus ángulos interiores, que los sume y verifique que en todos ellos se obtiene la misma suma.

O pedirles que recorten varios triángulos y que, a su vez, recorten las esquinas de cada uno, y las dispongan una enseguida de la otra y verifiquen que forman un ángulo llano.

Las experiencias anteriores pueden ser útiles, pero no bastan por si solas; ante todo es necesario hacer surgir en el espíritu del niño un estado mental en el que tenga significado preguntas como : ¿Cuánto suman las medidas de los ángulo interiores de un triángulo?, ¿por qué, a pesar de ser diferentes las formas de los triángulos, a pesar de ser diferentes sus tamaños, la suma permanece constante? La búsqueda de explicaciones y respuestas a tales preguntas debe dar lugar a sorprenderse y maravillarse por la constancia de estos resultados.

Lo anterior no es suficiente, además, es necesario provocar nuevas búsquedas que den origen a nuevas preguntas; preguntas provocadoras como: si cuando la figura tiene tres lados la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180 , ¿ cuánto sumarán las medidas de los ángulos internos si la figura tiene cuatro lados, y, en este caso, también será constante?, ¿ qué sucederá si la figura tiene cinco. lados?

Quizá la razón de mantener la educación geométrica en el nivel de simples exploraciones que se hacen en el plano de las manipulaciones,está dada porque aún se sigue pensando que la educación geométrica debe circunscribirse más al aprendizaje de hechos geométricos y no al desarrollo de un pensamiento capaz de imaginar movimientos, de anticipar resultados de transformaciones, de operar con estas para sacar consecuencias.

Del otro extremo existen propuestas, que sin explicitarlo, ceden a la tentación de introducir a los estudiantes prematuramente en las formalizaciones a medio camino, acercándose a desarrollos semejantes a los del programa de Erlangen. Se inicia al niño en experiencias que suponen traslaciones y rotaciones y sin tomar precauciones para garantizar que logren un pensamiento que les permita anticipar resultados a partir de acciones imaginadas en su pensamiento, se los introduce prematuramente en simbolismo y nomenclaturas que más que ayudar a la reflexión sobre los resultados de estas acciones y muchos menos a construir sistemas cuyos elementos sean las transformaciones mismas, se constituyen en obstáculos que impiden a los niños representárselas mentalmente. En este sentido se recorre un camino semejante al propuesto por Dienes y Golding, que en su afán porque los niños se hicieran a la estructura a de grupo que comportaban algunas de estas transformaciones proponía introducir a los niños prematuramente, en manipulaciones y reflexiones que le permitieran hacerse a la estructura algebraica de las transformaciones, llegando en algunos casos a introducir simbolismo, así fueran poco formalizados, que terminaban convirtiéndose en un lastre que en lugar de ayudar a la consolidación de ese pensamiento capaz de imaginar movimientos y sus resultados, se constituía en un obstáculo. "... Esta es la razón por la cual es de desear que se estudien conjuntamente los grupos y las transformaciones geométricas. Esto no se hace únicamente para facilitar la comprensión de las transformaciones geométricas sino para dar a los niños una visión más general de las cosas que se estudian. Las transformaciones geométricas que ellos estudian forman parte de un terreno de estudio mucho más extenso, lo que constituye la razón por la cual los niños se animarán a pensar en ´términos más abstractos... se darán cuenta que las transformaciones geométricas no son más que un caso particular"[2]

Aún predominan el empirismo

El primer tipo de deformaciones al enfoque de geometría activa señalado arriba, puede explicarse porque se privilegia una idea de sujeto cognoscente como registrador y no como un sujeto que organiza información según su capacidad de operar con ésta. Desde esta idea se asume que el niño extrae el conocimiento espacial del espacio mediante un proceso de abstracción. Si se incita al niño a explorar con su propio cuerpo, a manipular objetos que se le facilitan se hace con la intención de facilitar tal proceso de abstracción.

Los objetos del mundo están dispuestos y los seres humanos establecen relaciones entre ellos para dar cuenta de las posiciones relativas.

[2]Dienes Z. P. La geometría a través de las transformaciones. Editorial Teide. 1969.

En un comienzo el niño cree agotado el problema de dar cuenta de las posiciones de los objetos tomando como referencia su propio cuerpo. Más que establecer relaciones entre las posiciones de los objetos (“__ está delante de _”, “___está a la derecha de ___”), se limita a describir la posición de los objetos y su cuerpo (“___ está adelante”, “__ está a la derecha”) poco a poco, se hace capaz de tomar como referencia el cuerpo de otros u otros objetos (haciéndosele esta tarea más fácil o más difícil dependiendo de las posiciones que a su vez tiene ese otro consigo mismo, y de la mayor o menor semejanza de éste objeto con la de su cuerpo).

A medida que avanza en estas descentraciones y como progreso de su capacidad operatoria se le verá realizando operaciones entre relaciones. Así como es necesario recorrer una camino para llegar a las relaciones binarias propiamente dichas, es necesario recorrer una camino para operar (operaciones binaras) entre relaciones (composición transitiva de las relaciones, composición de las relaciones directa y su recíproca). En un comienzo esta capacidad operatoria está limitada a las acciones, a las manipulaciones de material, poco a poco podrán hacerse sobre representaciones mentales, primero sobre imágenes de estas acciones, hasta volverse totalmente abstractas, o si se quiere propiamente conceptuales.

La relación como tal no está en los objetos, la relación la pone el sujeto para dar cuenta de la posición. De manera que el proceso del sujeto cognoscente no es el de “aprehender”las posiciones relativas mediante un proceso de abstracción, más bien es el de la construcción de un sistema de referentes y de la capacidad para operar las relaciones que entre ellos pueden establecerse.

De forma análoga, hacerse a la forma por parte del sujeto debe ser considerado un proceso de construcciones sucesivas y no como un proceso de abstracciones de cualidades a partir de percepciones. Piaget, si bien reconoce a la imagen visual un papel importante en la intuición geométrica , declara que su carácter es ante todo operatorio. “Pero si bien la imagen desempaña, así, un papel privilegiado en el dominio espacial, por el hecho de que presenta ella misma el de carácter espacial, ello no significa en absoluto que constituya el motor principal de la intuición geométrica. La imagen no es más que un símbolo, cuya elaboración no se debe únicamente a la percepción, sino a un juego de imitaciones interiorizadas. . La imagen visual permanece en actitud estática, resulta incapaz de representar las transformaciones más elementales. Si luego adquiere un cierta movilidad, aunque relativa, ello no ocurre en virtud de un desarrollo interno y autónomo, sino por la influencia de aportes exteriores a ella y proporcionados esencialmente por las operaciones intelectuales. ... En suma la intuición geométrica es de naturaleza principalmente operatoria”[3]

La excesiva linealidad de las etapas de Piaget

A partir de sus estudios Piaget e Inhelder creen mostrar, por una parte, que los espacios perceptivos y representativos va de las elaboraciones de naturaleza topológica a la preparación de naturaleza proyectiva y métrica. De otra parte propone un esquema muy sugerente para comprender los desarrollos de las ideas geométricas tanto a nivel de las elaboraciones de la humanidad como a nivel del individuo, señala una primera etapa de-

[3]Piaget y otros. La epistemología del espacio. Ateneo Editorial. 1971.

nominada por él como intrafigural, la atención se centra al interior de cada figura, más o menos independiente de las otras, una segunda etapa, la interfigural, la atención se puede desplazar a establecer comparaciones con otras figuras, generalmente entre un par, y finalmente una tercera etapa, denominada transfigural, en la que las relaciones ya no están inscritas un par de figuras, sino que se pueden establecer entre familias de ellas, es la etapa en la que el análisis no se limita a los resultados de las transformaciones, sino que se puede centrar en las transformaciones mismas.

Si bien estas etapas son un buen punto de referencia no se deben ser tomadas tan al pie de la letra. Para quienes tienen experiencias con los niños es fácil ver como desde muy tierna edad, incluso desde preescolar, empiezan a hacer exploraciones en las que introducen ciertas nociones, así sean muy intuitivas, de medida. Por ejemplo, cuando se solicita al niño que reproduzca un modelo construido con palos de paletas, se verá que algunos se preocupan por tratar de reproducir un lado inclinado, no sólo, más o menos con el mismo grado de inclinación, sino que además cuentan la cantidad de palos para controlar su longitud.

Más que etapas que el niño agota una tras otra, deben ser pensadas como niveles que se solapan y cada nivel debe entenderse como una tendencia de parte de los niños y los jóvenes a comportarse de determinada manera al enfrentarse a problemas geométricos, pero sin que esto lleve a negar la posibilidad de anticipar en forma intuitiva comportamientos del o los niveles superiores, es más estas anticipaciones son las que preparan el paso a los niveles superiores.

Vasco insistentemente muestra como lo intrafigural atrapa a los niños, y no sólo por la gestal en la que se constituye la representación gráfica o la imagen mental de una figura, sino, y ante todo, por la incapacidad del niño, en un momento dado de hacerse a las transformaciones. Siempre que el niño y el joven se enfrentan a un tipo de transformaciones nuevas, inicialmente sólo podrán centrar su atención en los estados (inicial y final), olvidándose de la transformación, se requiere muchas experiencias con modelos físicos, con representaciones gráficas, en la que se ayude a los estudiantes a interiorizar estas acciones y como consecuencia de estos, anticipar poco a poco los resultados de ellas, empezar a coordinarlas hasta ir construyendo sistemas de conjunto, en el que se desarrolle su capacidad operatoria, y a partir de ahí sí desplazar su atención hacia las transformaciones; si ésto no se logra, se verá a los niños aferrados al dibujo o el modelo físico en particular y no como un representante de una clase de figuras, sino como esa figura, mejor aún, como un objeto. Con frecuencia el profesor de primaria y bachillerato observa niños que están tan ligados al aquí y ahora, que al resolver un problema toman medidas sobre la figura trazada a mano alzada para obtener la información necesaria para contestar una pregunta. A un niño de quinto grado se le presenta el dibujo de un paralelogramo en el que se habían notado un par de ángulos contiguos con las letras a y b, se le preguntaba: ¿si el ángulo “a”mide 35º, cuánto mide “b”?, se le veía tomar un transportador para medir “a”, y como en el dibujo hecho este medía algo diferente de este valor, reclamaba porque por dicho error.

El niño toma conciencia de las propiedades de una figura, no sólo porque se queda pensando en la figura misma, sino porque las compara con las de otros. Es precisamente en ese juego, al comienzo muy elemental, de lo interfigural que el profesor estimula, en el que el niño aprecia las semejanzas y diferencias, razona sobre las condiciones necesarias y suficientes de una figura. El rectángulo queda reducido a la imagen mental del dibujo cosificado, si el niño se queda en la figura misma , así sea que la descomponga en sus elementos y establezca relaciones entre ellos, es necesario, desarrollar la capacidad en el niño de establecer relaciones con otras figuras y empezar a establecer pequeñas relaciones de inclusión.

No hay que esperar al bachillerato para enfrentar a los niños a situaciones que lo pongan a pensar en las figuras como una clase. Niños de cuarto y quinto son capaces de enfrentarse con relativo éxito, además de que los disfrutan profundamente, a identificar los invariantes de un rombo, construido con un modelo de regletas unidas en sus extremos con tornillos (a la manera del material que sugiere Emna Castelnuovo), cuando se somete a deformaciones continuas, mediante fuerzas opuestas que se aplican sobre dos vértices opuestos. Estas experiencias que sin duda no agotan el nivel transfigural, pero preparan el terreno para que los niños posteriormente accedan a él.

Los niveles de Van Heile no son niveles de enseñanza

Los niveles de Van Heile son una descripción las etapas que se pueden diferenciar en el progreso de los conocimientos geométricos de un individuo. De una consideración global de los conceptos, de un visión de conjunto, se pasa a identificar sus elementos y señalar ciertas condiciones que deben cumplirse, pero sin ser capaz de establecer relaciones entre ellos (no se entiende que la igualdad de los diagonales de un rectángulo, son consecuencia de la igual de sus ángulos interiores), en un tercer nivel , se caracteriza por que el individuo muestra capacidad para establecer relaciones entre las propiedades de las figuras (ahora sí comprende que la relación entre la igualdad de las diagonales y la igualdad de los ángulos), el cuarto y quinto nivel se caracterizan por la capacidad de emplear razonamientos formales primero localizados, hasta llegar a comprender sistemas axiomatizados.

Hay algunas características básicas del modelo propuesto por los esposos Van Heile que merecen ser destacadas. Cada individuo pasa por cada uno de estos niveles en el orden que se describen, cada nivel tiene un lenguaje propio, así se usen las misma expresiones en niveles distintos, los sujetos le asignan el significado que sólo son accesibles a ese nivel, la descripción de cada nivel es local, esto es, un individuo razona a cierto nivel en un concepto y es posible que razone a otro nivel en otro concepto.

Los niveles de Van Heile se construyen a partir de la indagación de cómo piensan los niños cuando manejan contenidos propios de un plan de estudio que podríamos denominar tradicional, quizá esto explique la gran aceptación que ha tenido en nuestro medio, pero no ofrece explicaciones, porque no le es posible hacerlo, de los niveles que se alcanzarían desde propuestas de enseñanza más cercanas a un enfoque más activos, que se derivarían de reconocer el carácter operatorio del pensamiento geométrico. El no hacer esta distinción ha llevado a muchos educadores a diseñar sus planes de estudio, asumiendo los contenidos que los Van Heile utilizaron para sus estudios, abandonando el enfoque de geometría activa propuesto por Vasco. Esto ocurre porque si bien los niveles de Van Heile son importantes y constituyen una buen modelo para describir y comprender muchos de los comportamientos de los alumnos, y muestra con suficiente claridad la pobreza del pensamiento geométrico lograda por una enseñanza que privilegia el aprendizaje de hechos en sí mismo, no puede asumirse como un modelo de intervención pedagógica. En ocasiones la confusión es tal que los niveles descritos se asumen como etapa a seguir en el proceso de enseñanza.

A partir del modelo de Van Heile, Jaime A. propone la siguiente secuencia para enseñar la constancia de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Manifiesta empezar en el segundo nivel debido a que en el primero no tiene sentido enseñar tal propiedad. Propone, en este nivel, realizar con los niños la actividad de recortar las esquinas y verificar su suma, o colocar juntas estas esquinas mediante dobleces adecuados. Para el tercer nivel propone dar indicaciones para que el estudiante construya una argumentación, basada en la igualdad de ángulos trazados por una línea que corta un par de paralelas, propone hacerlo con un tipo de triángulo el acutángulo, para que después sea reconstruida por los alumnos con los otros dos tipos. La pregunta que ha de hacerse es: ¿qué tanto esta forma de proceder corresponde con el enfoque de geometría activa?, ¿qué tiene más poder para desarrollar una amplia y profunda imaginación espacial, la actividad arriba planteada o recorrer un "trilátero", a la manera que lo sugiere Vasco?, o de igual forma, ¿qué tiene más valor la actividad propuesta por Jaime A. o desarrollar las actividades y formular a los niños cuestionamientos que propone Castelnuovo con sus bandas de caucho, para obligar al niño a pensar la suma que tendría los ángulos en las situaciones límite extremas (estirar tanto la banda desde uno de sus vértices, imaginarse que se hace hasta el infnito, hasta que los dos lados que se cortaban en el vértice tomado, queden paralelos y formado ángulos rectos con el que era el otro lado y la otra acercar el mismo vértice tanto que se confunda con el otro lado, de tal forma que el ángulo del par de lados que se cortan en el vértice tomado termina formando un ángulo llano y cada uno de ellos un ángulo de cero grados con el tercer lado no tomado)? Pero estas dos últimas propuestas no marcarían mayor diferencia con la primera, sino hay lugar para inquietar a los niños. En el primer caso, preguntar, ¿porqué creen que quedó dando la espalda con relación a posición inicial?, ¿se obtendrá lo mismo si recorren otros triláteros?, ¿si se hace con otros más grandes?, ¿si se hace con uno que tenga un lado muy largo, para que el ángulo de los otros dos sea muy grande?. La constancia de la suma de los ángulos de un triángulo quedará como un simple dato si no se logra que el niño imagine la necesaria compensación que debe existir al hacer transformaciones como: si se hace crecer un ángulo de un triángulo, necesariamente por compensación los otros deberán disminuir. Pero no basta quedar ahí, es necesario plantear un nuevo conjunto de preguntas, ¿si se recorren cuadriláteros en la forma indicada, de nuevo se terminará dando la espalda con relación a la posición inicial?, ¿ qué sucede si se hace un cuadrilátero de lados más largos? Entre más se extiendan estas reflexiones a otros polígonos, serán más amplias y profundas las comprensiones de los alumnos. En forma semejante podría procederse si se trabaja con una propuesta como la de Castelnuovo. Es más, es posible pensar que en la práctica conviene trabajar con ambas, porque más que sustituirse, las dos propuestas se complementan. Ambas ofrecen la posibilidad de ejecutar e imaginar movimientos que permitirán consolidar un pensamiento que posibilita operar con los elementos involucrados en este tipo de problemas.

¿Qué queda de actividades como éstas? Muy posiblemente, no sólo el hecho de la constancia de la suma en cuestión, sino una capacidad de hacerse preguntas, de conjeturar, de planear formas de indagación, de poder controlar, tanto las estrategias diseñadas para la búsqueda de soluciones como los resultados obtenidos, de imaginar desplazamientos u otro tipos de movimientos, de idear gráficos o modelos físicos para apoyar sus argumentos, de idear contraejemplos para demostrar la falseada de un argumento que parezca incorrecto?. En síntesis, un pensamiento geométrico más desarrollado.

Un ejemplo a propósito del concepto de área

En este parágrafo se presenta un ejemplo sobre la construcción del concepto de área que ilustra la forma como desde la experiencia Descubro la Matemática se concibe el desarrollo del enfoque de geometría activa

Este ejemplo se presenta mediante un artículo escrito por las profesoras Gema Galindo de Rojas y Myrian Ferro[4], bajo la dirección del autor de este documento

En concordancia con los supuestos en el que se fundamenta la propuesta Descubro la Matemática, se asume que el concepto del área de una figura es construido por el niño a lo largo de un proceso que se prolonga por un espacio de tiempo que se extiende alrededor de 3 o 4 años. El niño pasa de comparaciones directas del tamaño de objetos planos de forma geométrica sencilla, por ejemplo de forma rectangular a comparaciones basadas en transformaciones de las figuras. Estas últimas comparaciones demandan del niño la construcción de nociones tales como aditividad del área y la invarianza de ésta a pesar de las transformaciones de tipo rígido.

Como consecuencia de lo anterior se considera que la enseñanza del concepto de área no puede reducirse a desarrollar en los niños las habilidades y conocimientos necesarios para aplicar las fórmulas que requieren su cálculo, como tampoco al estudio de los sistemas de unidades de medidas que se utilizan para poderla cuantificar. Estos conocimientos apenas constituyen una parte del proceso de construcción de este concepto, pero no son los únicos ni por los cuales conviene empezar al trabajar con los niños.

En este articulo se describe la experiencia que en este campo se ha realizado en el colegio. Por razones de espacio, se hará una descripción más amplia de lo que se realiza en el grado tercero, que es el punto de partida para ayudar a sistematizar esta noción en los niños, para que sirvan de referencia al lector, en los demás grados la descripción se hará más global.

Aunque se reconoce que las evaluaciones perceptivas que el niño hace en preescolar y los primeros años de la primaria, cuando a propósito de muchas acciones se ve enfrentado de manera "espontánea"a comparar el tamaño de dos superficies, por ejemplo dos pedazos de papel o dos pedazos de tela, son ya un acercamiento a lo que años después va a ser el concepto de área, es en el grado tercero, como ya de dijo, en el que se asume como propósito explícito ayudar al niño a sistematizar este concepto. En este grado los niños se enfrentan a problemas como: se tienen dos pedazos de cartón, o de madera, o de cualquier

[4]Profesoras de Matemática del Nivel de primaria del Colegio Champagnat de Santafé de Bogotá

otro material, uno tiene una forma rectangular (8 cm de base y 2 cm de altura, por ejemplo) y el otro de forma cuadrangular (de 4 cm de lado) y se desea saber si una de ellas tiene más cartón, madera, etc. o si tienen la misma cantidad.

Algunos niños resuelven la pregunta desde una inspección simplemente perceptiva: "Se gasta más tela en la larga porque es más amplia y entonces se gasta más tela en la larga", otros ensayan resolver el problema midiendo el perímetro: "La larga es más grande por que lo largo es de 8 cm y el cuadrado lo largo es 4 cm y si sumamos todo lo de la tabla larga nos da 20 ..., 8+8+2+2 = 20, en cambio en esta es 4+4+4+4 = 16 por lo tanto la larga es más grande"., otros , muy pocos, a veces en este grado no se encuentra ninguno; buscan superponer los dos pedazos para determinar si con uno pueden recubrir el otro: "yo lo haría colocando tela a la largo,... se miden como en el dibujo,... yo lo haría cortando tela del cuadrado largo (el rectángulo) entonces los dos pedazos los pongo en el otro y se pone la misma cantidad."

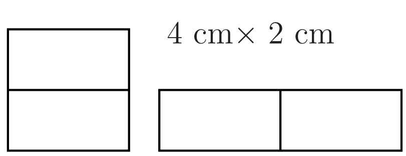
A los niños que se ubican en los grupos primero y segundo, se les cuestiona para que vean la necesidad de recurrir a un procedimiento que superen las evaluaciones basadas en lo perceptivo y el perímetro.

Hay varias situaciones que pueden problematizar al niño. Una puede ser imaginar una situación de tienda, en la que los niños deben ir a comprar la tela necesaria para forrar una tabla de forma rectangular de 2cm. x 16 cm, se fija un precio a una tira de 2cmx 4cm, Los niños deben decidir cuántos cm. de tira necesitan comprar. A algunos niños se les vende la tira completa de 2 cm x 16 cm, de tal forma que sólo tengan que colocar la tela sobre la tabla, a otros se les vende en 2 pedazos de 2cmx8cm, a otros 4 pedazos de 2cm.x4cm, de tal forma que necesiten colocar los pedazos comprados, uno después del otro, para recubrir la superficie de la tabla. ¿algunos de los tres niños compró más tela?, ¿pagaron lo mismo por la tela comprada?, si se da el caso de que se considera que alguno compró más tela, se cuestiona, ¿entonces porque usted pagó lo mismo que él? El precio se convierte en un referente para comparar la cantidad de tela comprada. ¿todos pueden forrar la tabla?, ¿a alguno le faltó o le sobró tela?. Una vez que se reconoce que se compra la misma cantidad de tela y que todos la utilizan para recubrir la tabla, se disponen los pedazos de tela comprados en el segundo y tercer caso, uno al lado del otro, uniéndolos por los lados de 8 cm y 4 cm, respectivamente, y no por el de 2cm como se venía haciendo, para volver a preguntar ¿quién compró más tela? y repetir los cuestionamientos.

De todas formas en uno y otro caso los niños no se escapan de las problematizaciones del profesor para garantizar que el niño se ha liberado de las evaluaciones basadas en la percepción.

Se formulan cuestionamientos como estos.

Se tiene una tabla como la de la figura de la izquierda, la cara que se ve de la tabla se desea forrar con tela



Después se corta la tabla como lo indica la línea. Los dos pedazos que se obtienen se ponen el uno a lado del otro así como lo indica la figura de la derecha. Diga si en la primera tabla se gasta más, menos o la misma cantidad de tela que en la segunda.

Empiezan a aparecer argumentos en los hacen una multiplicación lógica de las dimensiones (largo y ancho) como corrigiéndose ellos mismos lo que la percepción les está diciendo: "No se gasta más tela porque la tabla se puede alargar pero al mismo tiempo pierde su ancho, porque a la tabla no se le agrega sino se corta."

Como otras de las ideas es hacer la evaluación de la cantidad de tela mediante el perímetro, el profesor propone problemas que le ayude a los niños a empezar a diferenciar el significado de las dos preguntas "¿si se van a forrar las tablas en cuál se gasta más?"y "si se desea poner cinta alrededor de la tabla, en cuál se gasta más? De nuevo se presentan situaciones de tienda en la que hay que comprar la tela y la cinta."

A medida que se avanza en la resolución de las situaciones descritas, se busca que los niños puedan resolver el problema de la comparación de área en el campo de la representación gráfica. Son problemas similares a los citados, pero en este caso el niño no cuenta con los objetos; en su remplazo, tiene figuras dibujadas en el papel, él debe imaginarla los cortes y representarlos gráficamente. En este momento se trata que mediante anticipaciones el niño se represente las acciones hechas anteriormente:

Siguiendo en la misma línea de los problemas que se vienen trabajando, se enfrenta a los niños con situaciones que supongan transformaciones más fuertes de la figura base. A un rectángulo se le hacen cortes por sus diagonales, para obtener cuatro pedazos de forma triangular, se forma una nueva figura con todos ellos.

Estos problemas son resueltos en dos niveles, primero, haciendo la figura en cartulina, realizando los cortes y formando la nueva y después, trabajando a nivel gráfico, para, como ya se señaló, obligar al niño a anticipar los movimientos necesarios para obtener la figura transformada.. Un apoyo útil es el trangram[5].

Con estas últimas experiencias se busca que los niños se hagan a la idea de la conservación del área a pesar de la forma como se reconstruya la figura y desarrollar una adecuada capacidad para hacer cortes a una figura para construir una nueva que es posible hacer a partir de esta.

También se proponen problemas que tienen la intención de ofrecer a los niños un significado ligado a contenidos empíricos, tales como: se desea pintar el borde exterior de la cancha de baloncesto, el obrero cobra $100 por cada metro pintado, ¿cuánto se le debe pagar?. Los niños van a la cancha, toman las medidas y hacen sus cálculos. Se discuten los procedimientos seguidos, efectivamente aparecen formas distintas de hacerlo.

Incluso en algunos casos se llega a formular problemas como, delimitar en el patio dos terrenos de forma rectangular para formular a los niños problemas como: ¿se desea pavimentar estos terrenos, en cual se va a gastar más cemento? Este problema comporta una

[5]Sin embargo conviene aclarar que el trangram por sí mismo no agota las experiencias que el niño debe realizar para anticipar los movimientos necesarios para lograr una determinada transformación. La construcción de figuras mediante el tramgram se puede hacer soportándose en apoyos perceptivos, en la constitución de buenas formas y además se pueden realizar basados en procesos de ensayo y error.

dificultad adicional a los niños, ya no pueden mover los terrenos, tampoco cuentan de partida con una representación gráfica de ellos. En algunos casos el profesor interviene para sugerir a los niños que hagan dibujos a escala con el fin de facilitar las comparaciones.

En síntesis, la intervención en tercer grado está orientada a que los niños desechen como métodos válidos para comparar los "tamaños"de dos figuras rectangulares, el de la simple percepción y el del perímetro. Efectivamente la gran mayoría de los niños de este grado empiezan a descartar estos dos procedimentos, sin embargo otros, aunque pocos, oscilan entre estos métodos y el de la comparación directa. Algunos avanzarán a cuarto sin haber logrado consolidar estas elaboraciones.

En el grado cuarto se retoma el trabajo del año anterior partiendo de problemas semejantes a los ya resueltos, pero cada vez más, se exige al niño que para hacer la comparación abandone el método de comparación directa y busque uno de comparación indirecta. Se sugiere al niño recubrir la superficie de ambos pedazos con otros más pequeños y que cuente en cada caso cuántos de éstos se necesitan.

Aquí hay dos problemas que debe resolver el niño:

- ¿Cuál debe ser la forma y dimensiones del pedazo que se va a tomar como unidad?. Se ensaya con rectángulos y con cuadrados, hasta que el niño evidencie la funcionalidad de una forma cuadrada.
- El tamaño del cuadrado unidad debe corresponder con las dimensiones de la figura que se va a comparar. Si las figuras son pequeñas, lo más práctico es tomar como unidad de comparación un cuadrado de un cm. de lado (se llama así y no un centímetro cuadrado.), si es más grande, quizá sirva la de un metro., etc.

Uno de los tantos problemas que se formulan es: un albañil desea saber si en alguna de las dos paredes A y B gasta más o la misma cantidad de baldosas (se presenta la gráfica de dos paredes una, la A, deforma cuadrada de 2 m. de lado y la B de forma rectangular, cuyas medidas son 4 m. largo y 1m. de ancho). Se indica que las baldosas son de forma cuadrada y miden 20 cm. de lado.

Una de las soluciones ofrecidas es: "Para la pared A se necesitan 100 baldosas porque para dos metros se necesitan 10 baldosas. 10 + 10 + ... +10 =100. para la parte B se necesitan 100 porque en 4 metros se necesitan 20 baldosas y un metro son 5 baldosas. 20+20+20+20+20 = 100."Este niño se ayuda con un gráfico, poniendo hileras de baldosas. Prácticamente tiene que ejecutar la acción del albañil para después contar las baldosas, su avance está en que no tiene que hacerlo una por una, sino por "hileradas".

A medida que se avanza en estas construcciones el niño debe enfrentar un nuevo problema que supone un gran progreso en su proceso de construcción del concepto de área: Encontrar un procedimiento rápido para contar la cantidad de cuadros que se necesitan para recubrir totalmente una superficie. Ya no se pueden contar uno a uno, aparece entonces el método de conteo aditivo, ir sumando los de cada fila (o columna) y finalmente aparece (o si es necesario el profesor lo sugiere) un procedimiento multiplicativo (la cantidad de cuadros de una fila por los de una columna) de nuevo aquí se tiene el cuidado de hacer que el niño resuelva problemas a nivel de representacionnes gráficas, A partir de este momento la acción del profesor está ligada a ayudar a reconocer que este método no funciona muy bien cuando se trata de figuras que tienen lados inclinados, ¿cómo hacer en el caso del triángulo?. Los primeros intentos de los niños consisten en arreglárselas contando los cuadros y completando uno con dos o más incompletos.

Igual que en el grado anterior, se presentan variados problemas con contenidos diferentes en los que los niños deben identificar que lo que se le pide es calcular el "área", además de distinguirlo de las situaciones en las que deba calcular el perímetro.

Para quinto quedan dos problemas básicos:

- Abandonar la idea de representarse el cálculo del área de un rectángulo como el conteo de los cuadros que caben en el interior, para sustituirla como el cálculo de la multiplicación de la dimensión de su altura por la de su base.
- Y apoyado en lo anterior y otras ideas que más adelante se señalan, abandonar el procedimiento de completar los cuadros incompletos en el caso de figuras con lados oblicuos.

En el primer caso se exige a los niños que traten de anticipar cuántos cuadros caben en el rectángulo sin necesidad de hacer el dibujo sino a partir de las dimensiones dadas. Algunos niños logran hacerlo sin que el profesor lo sugiera, es más, algunos ya lo venían haciendo desde cuarto, en este caso el profesor se apoya en ese logro para que intercambien ideas y lograr que todos lleguen al método deseado. Se cambian las unidades de las dimensiones de los lados, unas veces son metros, otras en centímetros, incluso se presentan las medidas de los lados mediante números compuestos, (m y cm., o cm. y mm., etc.). Paralelamente a este trabajo el niño deberá sustituír su idea de cuadros de unidad con los conceptos de metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc.

Siempre se ha considerado dentro de la experiencia que el paso de representarse el área como la cantidad de cuadros de unidad, al cálculo a partir de las dimensiones de la base y la altura supone un salto de lo discreto a lo continuo, para lograr ésto el interior de una figura no puede ser pensada como la cantidad de cuadros sino como una superficie continua. Por eso paralelamente a este trabajo, se considera necesario que el niño aborde el problema de representarse una superficie como constituida por infinitos puntos. En este artículo no se puede describir este proceso. Sólo se señala para mostrar cómo el concepto de área está ligado a adquisiciones de nuevos niveles de representación del espacio.

La segunda idea, la de calcular los cuadros de figuras con lados oblicuos, supone un recurso que encierra ideas fundamentales en el proceso de adquisición del concepto de área. Siendo consciente el niño de que el método de completar cuadros es apenas una aproximación, se hace necesario encontrar un método exacto. Este método supone hacer transformaciones a las figuras con lados oblicuos para obtener rectángulos y así encontrar cuadros completos. Claro que este proceso no será posible si a estas alturas si el niño no ha construido los dos esquemas lógicos básicos a que se hizo referencia al iniciar este artículo: la aditividad de las áreas y su invarianza a pesar de las transformaciones rígidas.

Un procedimiento como el señalado arriba exige de los niños desarrollar una gran capacidad de hacer transformaciones a una figura para obtener rectángulos. Si el triángulo es rectángulo, se puede obtener un rectángulo si se utilizan dos de estos triángulos Si es isósceles se puede hacer un corte, por la altura que cae sobre el lado que no tiene su igual. Si es escaleno, la transformación no es tan inmediata, sin embargo después de algunos intentos los niños terminan encontrando un método para hacerlo.

Lo anterior demanda de los niños abundantes acciones físicas que supongan hacer transformaciones a una figura para lograr una nueva. Para esto se refuerza con el juego del Tangram, pero buscando en este grado que el niño pueda anticipar los movimientos y transformaciones que deben hacer para lograr una figura dada.

Se enfrenta a los niños al problema de cosntruir una figura a partir de otra, permitiéndole, en uno caso que haga los cortes necesarios y en otros sólo permitiendo algunos, se pide hacer figuras que correspondan a modelos presentados, luego se pide construír figuras geométricas

Pero aquí no se trata solamente de hacer figuras, sino de ser capaz de indicar las dimensiones de la nueva figura a partir de la anterior y de las transformaciones que se hicieron. En algunos casos las respuestas de los niños a tareas como las indicadas es inmediata, pero para la gran mayoría es una pregunta que los mantiene ocupados por largo rato, tratando de imaginar la transformación necesaria y de encontrar las medidas de la nueva figura. Algunos, muy pocos, tienen que regresarse a la acción física, (recortar la figura y hacer los movimientos necesarios), pero de todas formas ellos tienen que explicar las transformaciones hechas, como forma de ayudarles. a adquirir conciencia de los resultados que producen los movimientos efectuados y de los movimientos mismos.

El propósito fijado para quinto es lograr que los niños puedan calcular el área de figuras como triángulos, paralelogramos, rombos, etc., mediante el cálculo del área del rectángulo obtenido al ser transformadas éstas.

Se aplaza la aparición del cálculo de las áreas mediante fórmulas hasta sexto grado y aún allí al niño no se le desprende totalmente de la necesidad de estas transformaciones. Es en séptimo grado cuando se completa el conocimiento de las fórmulas.

Tal como se había señalado al comienzo del artículo, el proceso de construcción del concepto de área es complejo y supera por mucho el simple aprendizaje de fórmulas, o el recubrimiento de la superficie, con cuadrados de un metro, decímetro o centímetro cuadrado, y el cálculo de la cantidad cuadritos necesarios para este recubrimiento. El niño debe ir construyendo lentamente este concepto y otros que se vinculan de forma más o menos directa, la escuela debe ofrecerle muchas experiencias, en contextos variados para que para posibilitar tales construcciones.

La experiencia arriba descrita, si bien es susceptible de ser mejorada porque adolece de algunos vacíos, permite identificar algunos puntos de discusión, ya no sobre la forma como se interpreta y aplica el enfoque de geometría activa, sino sobre la organización del plan temático. para el desarrollo de este sistema.

Mas que secuencialidad existe simultaneidad

Si bien es aceptable pensar en ciertos ordenamientos locales, no se puede pretender ordenamientos temáticos estrictos, a nivel global y una separación más o menos clara entre los temas. Cuando se trabaja el concepto de área, de inmediato se cae en la cuenta de la necesidad de ligar a éste, otros temas, de la geometría o de otros sitemas matemáticos. . Al desarrollo del concepto de área, se liga intimamente el desarrollo de otras capacidades propias del pensamiento geométrico, pero que en: el cuerpo disciplinar no pertenecen al çapítulo"de áreas.

Por ejemplo, en necesario ganar la capacidad de transformar una figura en otra, para ello se vuelve importante controlar los resultados de cortes de una figura, de los movimientos de la figura total o de sus partes, identificar simetrías, y aquí es indudable que el juego de transformaciones aplicado a modelos físicos o gráficos de las figuras se constituye un soporte fundamental. La mayor o menor riqueza de las relaciones que el estudiante haya logrado establecer entre los elementos de las figuras y entre las figuras mismas , se manifiesta en su capacidad de idear y controlar cortes de una figura , 'para transformarla una figura en la otra.

Ligado a lo anterior es necesario, como lo ilustra claramente el artículo, construir un esquema lógico correspondiente al carácter aditivo de las áreas: el área de una superficie total, siempre será igual a la suma del área de sus partes. El hecho de que un niño en segundo acepte calcular el área de un rectángulo por recubrimiento de su superficie, no excluye la no conservación aditiva del área.. Quizá vacíos en este esquema, puedan explicar porque niños de sexto y séptimo grado que para el cálculo del área de una figura de la cual no saben calcular su área, la transforman en otra que si conocen, no se preocupan por controlar la equivalencia del área de estas dos figuras.

A medida que se avanza en la consolidación del concepto de área, los niños deben resolver un problema que siempre les resulta complicado, consistente en lo notoria dificultad de coordinar lo continuo y lo discreto. Si bien las regiones son percibidas por como superficies continuas, cuando se pide calcular el área y se hace por recubrimiento, el niño tiene que imaginársela como unidades discretas, aceptar esta idea no es demasiado complicado para un niño de cuarto o quinto grado. Pero cuando se le pide que la calcule operando con sus dimensiones (como cuando se calcula el área del rectángulo mediante la multiplicación de las longitudes de su base por su altura) este nuevo cambio a lo continuo molesta a los niños, porque si se mantiene la idea del cálculo del área como recubrimiento no es sencillo imaginar el asunto con dimensiones como 2 m y 3 cm o peor aún 2, 03 m. Muy posiblemente este salto, o mejor este corte, explica porque es frecuente que los niños siendo capaces de calcular la cantidad de baldosas de una pared rectángular, no pueden calcular el área de un rectángulo de cierta dimensiones , al menos como fruto de un acto comprensivo, muchos lo hacen como simple como aplicación mecánica de una fórmula. Tal vacío se aprecia con mayor claridad en figuras como el paralelogramo o un triángulo.

Dosificar los temas

Cuando se cae en la cuenta que una enseñanza de la geometría orientada a la educación del pensamiento geométrico supone procesos amplios y complejos prolongados en el tiempo, de inmediato aparece la necesidad, de una parte, de aplazar unos temas para uno o más grados, pues resultan difíciles a los niños e inadecuados a sus construcciones, de otra parte, es necesario disminuir a lo fundamental los conceptos que sean deseables y posibles de desarrollar. Así como en el ejemplo del concepto de área que no se inicia en segundo, sino en tercero y que se sigue un proceso adecuado a los niños, prolongándose por tres y hasta cuatro años; conviene revisar el momento en el que se trabajan otros conceptos y las secuencias que se proponen: ¿qué tan adecuado resulta llevar al niño al cálculo del área del círculo, en quinto de primaria?, ¿qué tan posible y adecuado es que los estudiantes manejen comprensivamente los sistemas de medida para el área, en los grados de primaria?, ¿qué tan adecuado resulta insistir en los primeros grados en al aprendizaje de los aspectos convencionales de la geometría (nombre de las figuras tri y bidimensionaels más conocidas)? y, ¿que tan adecuado resulta fijarse como metas para estos mismos grados que los reconozcan y puedan caracterizarlas?. Quizá insistencias como éstas hacen que los profesores sedan a la idea de enfatizar en la enseñanza hechos geométricos, desplazando el desarrollo de la capacidad de operar en forma imaginada con los movimientos

Bibliografía

[1] ALSINA C.; Y OTROS., *Invitación a la didáctica de la geometría.* Edit. Síntesis, 1989.

[2] CAMPOS, A., *Introducción a la lógica y las geometrías griegas anteriores a Euclides.* 1994. Axiomática y geometría desde Euclides hasta Gilbert y Bourbaki.

[3] CASTELNUOVO, E., *Didáctica de la matemática.* Moderna, Trillas, 1970.

[4] DICKSON, L.; Y OTROS., *El aprendizaje de las Matemáticas.* Aditorial Labor. 1991.

[5] DIENES, Z.; GOLDING., *La geometría a Través DE LAS transformaciones.* Editorial Teide, 1969.

[6] GUIBERT, A.; Y OTROS., *Actividades geométricas para educación infantil y primaria.* Narcea Ediciones

[7] GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A., *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación matemática.* Grijalbo, 1995.

[8] HOLLOWAY, G., *Concepción del Espacio en el Niño Según Piaget.* Paidos. (1969) *Concepción de la geometría en el niño según Piaget.* Paidos, 1982.

[9] LAURENDAU, M.; PINARD, A., *Las primeras nociones espaciales en los niños.* GLEM. 1968.

[10] LURCAT, L., *El niño y el espacio.* Fondo de Cultura Económica, 1979.

[11] PIAGET, J.; COL., *La epistemología del Espacio.* Ateneo Editorial. (1968) *Epistemología Matemática y Psicología.* Editorial Grijalbo, 1971.

[12] VASCO, C., *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas.* Serie Pedagogía y Currículo, MEN. 1994.