# Estudio de las relaciones de la teoría de conjuntos con la música

**Carlos González**
*Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
calichegm@hotmail.com

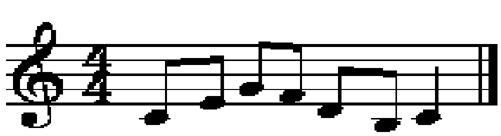
**Germán David Molano**
*Academia Superior de Artes*
*Bogotá D.C, Colombia*
germandavidmolano@yahoo.com

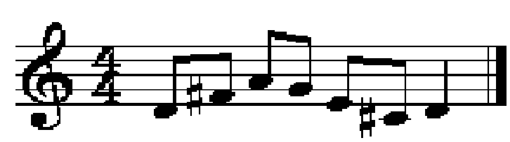
**Resumen**

Este estudio trata sobre la relación que hay entre las matemáticas y la música, específicamente sobre una de las aplicaciones de la teoría de conjuntos a la música. Inicialmente describimos algunos comportamientos musicales de uso común por medio de funciones que denominamos transportar, octavar y de inversión, las cuáles serán útiles para el trabajo de composición que se pretende en el proyecto. Para comenzar pensamos en como escribir la música en lenguaje conjuntista para luego aplicar funciones específicas de acuerdo con ciertos parámetros musicales que queremos transformar. Estos parámetros son la altura, la duración y la posición en el tiempo de cada una de las notas de una de un hecho musical. Después, seleccionamos 4 funciones que dieran resultados diversos y las aplicamos en 4 melodías diferentes para así analizar sus comportamientos, encontrar las propiedades de los conjuntos y definir el papel de cada función en el hecho musical. De este modo, considerar la posibilidad de construir conjuntos a partir de elementos musicales con operaciones determinadas, como herramienta en la práctica de la composición musical y proponer nuevas técnicas en éste campo.

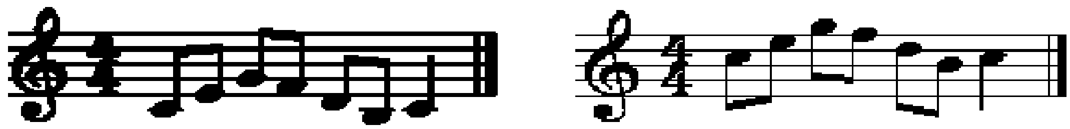
## Estudio de las relaciones de la teoría de conjuntos con la música

Existen, en el campo musical, algunos comportamientos o transformaciones usadas frecuentemente en la interpretación de piezas musicales, de carácter popular y académico que pueden ser descritas a través del lenguaje matemático. Algunas veces hemos escuchado ciertas frases como: "un tono más arriba", "toquemos por re menor"ó "bájele un tono", entre muchas más. Dichas frases han de referirse a las alturas de las notas de la obra que se desea interpretar; así el subir o bajar el tono de alguna nota hará referencia a la alteración de la frecuencia de la nota propuesta inicialmente, por una frecuencia determinada en una escala determinada. Tal transformación es conocida como transportar. Así por ejemplo:





Del mismo modo, otro tipo de alteración de las frecuencias es conocido como octavar:



# 1. De la notación musical a la notación matemática

La primera idea que surge es tomar una melodía, asignar una notación matemática para ella y de este modo llevarla al lenguaje de conjuntos y observar diferentes comportamientos y propiedades que pueda tener determinada obra, o tal vez, qué operaciones se pueden realizar con éste conjunto para formar un nuevo conjunto que me ofrezca una nueva melodía. En primer lugar tomamos un fragmento de un compás de una melodía determinada, para describir cómo le asignamos una notación matemática. Tenemos por ejemplo el siguiente fragmento:

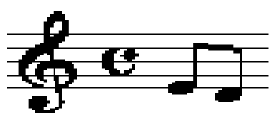


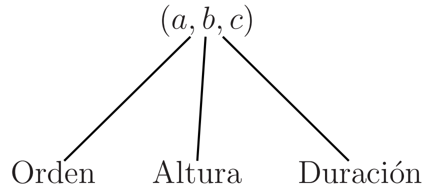
*Figura 1.* Parte inicial de una partutura en 4/4

En la figura 1 tenemos la parte inicial (primer compás) de una partitura, en este caso en 4/4 y con su armadura que nota la tonalidad[1] de la melodía, en este caso será Do mayor. El sistema acentual dado por el indicador de compás no es tenido en cuenta en esta etapa del proyecto puesto que al aplicar las funciones (trabajo que veremos más adelante), el conjunto D cambiará radicalmente y no tendrá ya relación alguna con su métrica original, por lo tanto decimos que trabajamos sin barras de compás.

En la figura 1 encontramos dos notas diferentes, *mi* y *re*, cada una con duración de corchea. Los elementos que inicialmente tendremos en cuenta serán: el orden dentro de la partitura, la altura específica y la duración de cada nota musical, para lo cual organizaremos ternas ordenadas $(a,b,c)$ que representan los elementos anteriormente mencionados respectivamente. Para el conjunto A se decidió trabajar con melodías a una sola voz ya que es la forma más tradicional de un hecho musical; para el conjunto D se observaron cuáles eran las duraciones de las notas de las melodías a trabajar y se formó el conjunto sin incluir más duraciones.

Así definimos P como el conjunto de notas de una pieza musical determinada, cada elemento de P se define como la terna ordenada anteriormente descrita, así:

[1] La organización de los sonidos que se usan en la música occidental tradicional corresponden al *sistema temperado*, el cual tiene como base a Pitágoras pero ha sido ajustado con el paso del tiempo para darle paso a la tonalidad. Esta palabra define la organización y las relaciones que hay alrededor de una nota llamada *tónica* y que a su vez le da el nombre a la tonalidad. Es así que decimos *Sol mayor* cuando las notas están organizadas y funcionado de cierta manera en relación directa con la nota *Sol*.




De este modo se notan los siguientes conjuntos:

$$O = \{a/1 \leq a \leq n, a, n \in N\}$$

Los elementos de éste conjunto definen el orden de la terna en la partitura.

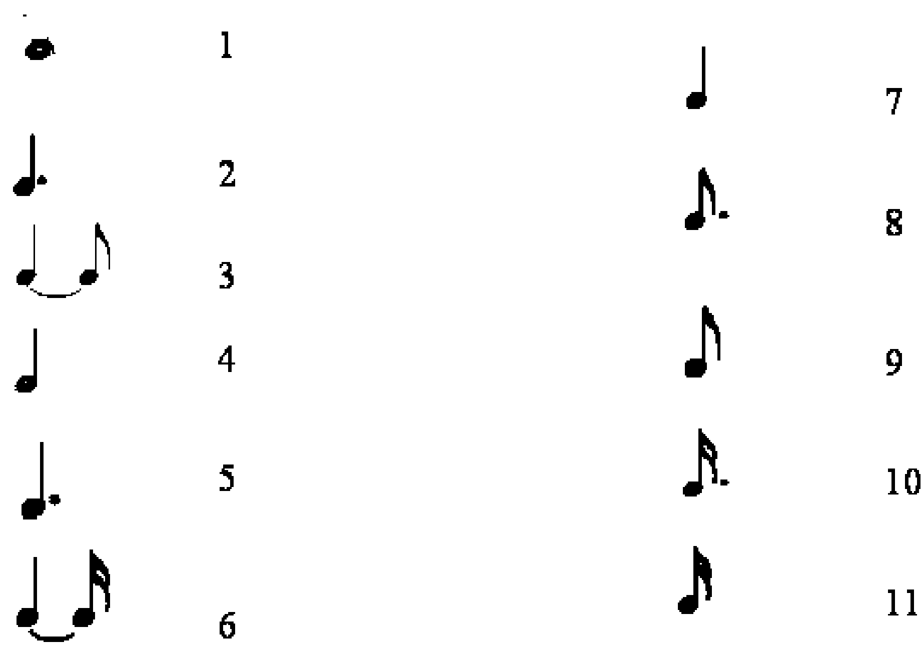
Para construir $A$, el conjunto que determina la altura de la terna ordenada, decidimos considerar las alturas específicas que produce un piano, así $DO_1$ es la nota más grave y $DO_8$ la más aguda como muestra la siguiente tabla:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $DO1$ | 25 | $DO_3$ | 49 | $DO_5$ | 73 | $DO_7$ |
| 2 | $DO\#_1$ | 26 | $DO\#_3$ | 50 | $DO\#_5$ | 74 | $DO\#_7$ |
| 3 | $RE_1$ | 27 | $RE_3$ | 51 | $RE_5$ | 75 | $RE_7$ |
| 4 | $RE\#_1$ | 28 | $RE\#_3$ | 52 | $RE\#_5$ | 76 | $RE\#_7$ |
| 5 | $MI_1$ | 29 | $MI_3$ | 53 | $MI_5$ | 77 | $MI_7$ |
| 6 | $FA_1$ | 30 | $FA_3$ | 54 | $FA_5$ | 78 | $FA_7$ |
| 7 | $FA\#_1$ | 31 | $FA\#_3$ | 55 | $FA\#_5$ | 79 | $FA\#_7$ |
| 8 | $SOL_1$ | 32 | $SOL_3$ | 56 | $SOL_5$ | 80 | $SOL_7$ |
| 9 | $SOL\#_1$ | 33 | $SOL\#_3$ | 57 | $SOL\#_5$ | 81 | $SOL\#_7$ |
| 10 | $LA_1$ | 34 | $LA_3$ | 58 | $LA_5$ | 82 | $LA_7$ |
| 11 | $LA\#_1$ | 35 | $LA\#_3$ | 59 | $LA\#_5$ | 83 | $LA\#_7$ |
| 12 | $SI_1$ | 36 | $SI_3$ | 60 | $SI_5$ | 84 | $SI_7$ |
| 13 | $DO_2$ | 37 | $DO_4$ | 61 | $DO_6$ | 85 | $DO_8$ |
| 14 | $DO\#_2$ | 38 | $DO\#_4$ | 62 | $DO\#_6$ | 0 | silencios |
| 15 | $RE_2$ | 39 | $RE_4$ | 63 | $RE_6$ | | |
| 16 | $RE\#_2$ | 40 | $RE\#_4$ | 64 | $RE\#_6$ | | |
| 17 | $MI_2$ | 41 | $MI_4$ | 65 | $MI_6$ | | |
| 18 | $FA_2$ | 42 | $FA_4$ | 66 | $FA_6$ | | |
| 19 | $FA\#_2$ | 43 | $FA\#_4$ | 67 | $FA\#_6$ | | |
| 20 | $SOL_2$ | 44 | $SOL_4$ | 68 | $SOL_6$ | | |
| 21 | $SOL\#_2$ | 45 | $SOL\#_4$ | 69 | $SOL\#_6$ | | |
| 22 | $LA_2$ | 46 | $LA_4$ | 70 | $LA_6$ | | |
| 23 | $LA\#_2$ | 47 | $LA\#_4$ | 71 | $LA\#_6$ | | |
| 24 | $SI_2$ | 48 | $SI_4$ | 72 | $SI_6$ | | |

De este modo le asignamos a cada altura específica un número natural como muestra la tabla anterior, luego tenemos que:

$$A = \{b/1 \leq b \leq 85, b \in N\}$$

Del mismo modo, para el conjunto D (éste define la duración de la terna), asignamos a cada figura musical un número natural de este modo:




Así tenemos que:

$$D = \{c/1 \leq c \leq 11, c \in N\}$$

Luego podemos decir que $(a, b, c) \in O \times A \times D$ y $P \subseteq O \times A \times D$.

Así en el ejemplo de la figura 1 tenemos dos ternas diferentes: (1, 29, 9) y (2, 27, 9). De este modo podemos establecer ternas diferentes para cada nota que se ha de interpretar en determinada obra musical. De lo anterior se obtiene que para cada altura es posible asignar 11 duraciones diferentes, lo que da como resultado 935 combinaciones diferentes; ahora bien, la primera coordenada indica el orden de cada nota, lo cual nos permite conocer la cantidad de notas que se interpretan en alguna obra; teniendo en cuenta esto último podemos encontrar melodías a una sola voz (con este parámetro trabajamos inicialmente) de 250, 300 o más notas. Con esto es posible formar un gran conjunto, que para nuestro caso sería el conjunto referencial, con todas las posibles combinaciones de ternas ordenadas. Podríamos empezar con un referencial que involucre una cantidad no mayor de 500 notas, así obtenemos un conjunto de 467.500 ternas para trabajar. Este conjunto lo denominamos conjunto referencial musical (M) el cual extenderemos más adelante para una cantidad n de notas, lo cual nos permite trabajar con un conjunto de orden 935n.

### El conjunto M

Sean $O$, $A$ y $D$ los conjuntos determinados por la asignación de orden, altura y duración de una nota en una obra musical respectivamente, donde:

$$O = \{a/1 \leq a \leq n, a, n \in N\}$$

$$A = \{b/1 \leq b \leq 85, b \in N\}$$

$$D = \{c/1 \leq c \leq 11, c \in N\}$$

El conjunto $O \times A \times D = M$.

## 2. Algunas funciones frecuentes en la interpretación y composición musical

Como se mencionó al comienzo, en el ámbito musical existen ciertos comportamientos (alteraciones de frecuencias) en la interpretación, que podemos definir por medio del lenguaje matemático. Cada nota musical está determinada por una frecuencia; sí tomamos como referencia el *Do* más grave que podemos encontrar (para nuestro caso $DO_1$), decimos que su frecuencia es $f$ y a partir de allí obtener las frecuencias de las demás notas según su altura. De este modo, al ejecutar varios instrumentos al mismo tiempo, o entonar una melodía desde una nota diferente, es necesario tener las relaciones de frecuencias entre cada nota y la siguiente; una propuesta del músico italiano Zarlino a comienzos del siglo XVI, basado en las reglas pitagóricas, asignó los siguientes intervalos[2] :

| Do | | Re | | Mi | | Fa | | Sol | | La | | Si | | Do |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{9}{8}$ | | $\frac{10}{9}$ | | $\frac{16}{15}$ | | $\frac{9}{8}$ | | $\frac{10}{9}$ | | $\frac{9}{8}$ | | $\frac{16}{15}$ | |

Esto significa que la frecuencia correspondiente a la nota Re es $\frac{9}{8}$ de la frecuencia correspondiente a la nota Do; la frecuencia correspondiente a la nota Mi es $\frac{10}{9}$ de la frecuencia correspondiente a la nota Re; y así sucesivamente.

De esta manera podemos expresar las relaciones entre las frecuencias de las notas en una escala, por ejemplo:

$Re_1 = \frac{9}{8}Do_1$

$Mi_1 = \frac{10}{9}Re_1 = \frac{10}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{5}{4}Do_1$

$Fa_1 = \frac{16}{15}Mi_1 = \frac{16}{15} \times \frac{5}{4}Do_1 = \frac{4}{3}Do_1$

[2]Fragmento tomado del artículo "Didáctica Pitagórica"por Joaquín Luna, Carlos Luque, Reinaldo Nuñez y Jesús Pérez, presentado en el Tercer Encuentro Nacional de Matemáticas, realizado en Popayán en el primer semestre del 2003.

$$Sol_1 = \frac{9}{8}Fa_1 = \frac{3}{2}Do_1$$
$$La_1 = \frac{10}{9}Sol_1 = \frac{5}{3}Do_1$$
$$Si_1 = \frac{9}{8}La_1 = \frac{15}{8}Do_1$$
$$Do_2 = \frac{16}{15}Si_1 = 2Do_1$$

Y de este modo podemos conocer las demás frecuencias de las notas propuestas en la tabla anteriormente vista. Cuando nos referimos a la alteración de la frecuencia de una nota, pensamos en la interpretación de otra nota con una frecuencia diferente a la nota inicial, es decir si tenemos $DO_3$ y deseamos interpretar $RE_3$, lo que hacemos es un cambio de frecuencia que produce el nuevo sonido requerido. Tales comportamientos los podemos representar como funciones aplicadas a los conjuntos que hemos descrito inicialmente, así tenemos la función de transportar, función de octavar y función de inversión.

## Función de transportar

Transportar hace referencia a la alteración de las frecuencias en un rango determinado, así la función de transportar que afecta a cada nota se producirá de modo tal que dicha nota tomará valores a una distancia no mayor de 11 unidades, así por ejemplo $RE_7$ no puede convertirse en un $RE_6$ o en $RE_8$; así definimos la función de transportar (T):

$$\begin{aligned} T : P \rightarrow & T(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a, b, c) & \mapsto (a, b + k, c), |k| < 12, k \in Z \end{aligned}$$

de modo tal que $1 \leq b + k \leq 85$.

## Función de octavar

Cuando hablamos de octavar una nota, nos referimos al hecho de duplicar la frecuencia de ésta, así la nota que se producirá es la misma pero con una mayor agudeza; por ejemplo la octava superior de $MI_4$ es $MI_5$ y la octava inferior es $MI_3$. Así octavar una nota será sumar o restar 12 unidades a ésta, luego definimos la función octavar (O) así:

$$\begin{aligned} O : P \rightarrow & O(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a, b, c) & \mapsto (a, b + k, c), |k| = 12 \end{aligned}$$

de modo tal que $1 \leq b + k \leq 85$.

## Función de inversión

La inversión en nuestro caso la hemos tomado como el cambio de posición de las ternas de P, es decir que para un conjunto P de orden n realizamos la siguiente operación, la terna $(1, b_1, c_1)$ pasará a tomar la posición $n$ , la terna $(2, b_2, c_2)$ tomará la posición $n - 1$, la terna $(3, b_3, c_3)$ tomará la posición $n - 2$ y así sucesivamente hasta la terna $(n, a_n, b_n)$

tomará la posición 1. Así definimos la función de inversión (I ):

$$\begin{aligned} I : P \to & I(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a, b, c) \mapsto & (n - a + 1, b, c), n \text{ el orden de } P \end{aligned}$$

Con las funciones anteriormente mencionadas podemos transformar melodías en otras nuevas y tener una herramienta para la composición de piezas musicales después de un proceso de selección adecuado de ternas ordenadas (trabajo que se hará más adelante).

**Proposición.** *Las composición de las funciones $T$, $O$ e $I$ definidas sobre un conjunto $P$ (conjunto definido a partir de la notación musical) es conmutativa. Es decir, sea $t$ una terna ordenada de $P$, entonces:*

1. $T(O(t)) = O(T(t))$
2. $T(I(t)) = I(T(t))$
3. $O(I(t)) = I(O(t))$
4. $T(O(I(t))) = O(T(I(t)))$

# 3. Traducción y transformación de melodías

Después de seleccionar las melodías y definir los conjuntos pasamos a la traducción del lenguaje musical al lenguaje matemático. Tomamos cada una de las notas musicales y la convertimos en terna ordenada. Luego, al tener todas las ternas de todas las melodías, seleccionamos 4 funciones que se aplicaran a cada melodía. Las melodías son:

1. Fragmento de la sinfonía No. 14, K. 114 de Wolfang Amadeus Mozart.
2. Spiritual tradicional de los Estados Unidos.
3. West Indies Calypso.
4. A sus horas. Joropo de Carlos Monroy.

Y las funciones son:

1. 

$$\begin{aligned} f : P \to & F(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a, b, c) \mapsto & (a, |\sqrt{b}|, f(c)),\ f(c) = \begin{cases} c + 1, & c \neq 11 \\ 11, & \text{c=11} \end{cases} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g : P \to & G(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a,b,c) \mapsto & (a, g(b), c),\ g(b) = \begin{cases} 0, & b = 0 \\ b+1, & b = 2k,\ k \in N \\ b-2, & b = 2k+1,\ k \in N \end{cases} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} h : P \to & H(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a,b,c) \mapsto & (a, b, h(c)), \\ h(c) = & \begin{cases} a = 3k, h(c) = c+1, c \neq 11; c = 11, h(c) = c-1 \\ a = 3k+1, h(c) = c-2, c \neq 1,2; c = 1,2, h(c) = c+2 \\ a = 3k+2, h(c) = c+2, c \neq 10,11; c = 10,11, h(c) = c-2 \end{cases} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} i : P \to & I(P) \subseteq O \times A \times D \\ (a,b,c) \mapsto & (a, i(b), i(c)), \end{aligned}$$

$$i(b) = \begin{cases} a = 3k, i(b) = b - 15, b \neq 0 \\ a = 3k+1, i(b) = b + 15, b \neq 0 \\ a = 3k+2, i(b)b, b \neq 0 \\ b = 0 \wedge a > 1, i(b) = i(a-1) \\ b = 0 \wedge a = 1, i(b) = 42 \end{cases}$$

$$i(c) = \begin{cases} c = 2k, & i(c) = c+1 \\ c = 2k+1, & i(c) = c-1, c \neq 1 \\ c = 1, & i(c) = c+6 \end{cases}$$

A continuación mostramos el proceso descrito anteriormente con la partitura de melodía mostrada en la figura 2:

Sea $P$ el conjunto determinado por la melodía 2:

$$P = \{(1,30,9), (2,25,7), (3,34,11), \ldots, (47,0,7)\}$$

Aplicamos la función $G$:

$$G(P) = \{(1,31,9), (2,23,7), (3,35,11), \ldots, (47,0,7)\}$$

Y tenemos la melodía transformada de la figura 3

A partir de las funciones anteriormente definidas, podemos establecer nuevos conjuntos utilizando la composición de funciones, es decir, para un conjunto $P$ cualquiera podemos encontrar conjuntos como: $F(G(P))$, $H(I(P))$, $F(H(P))$, entre muchos otros y de este modo obtener nuevas melodías.

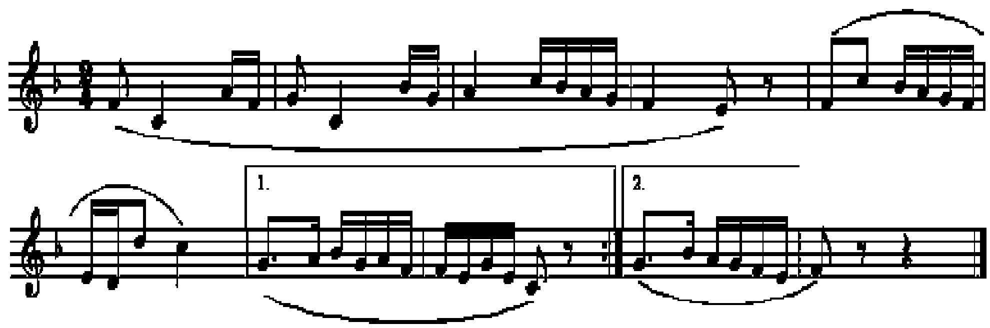


*Figura 2.* Melodía 1

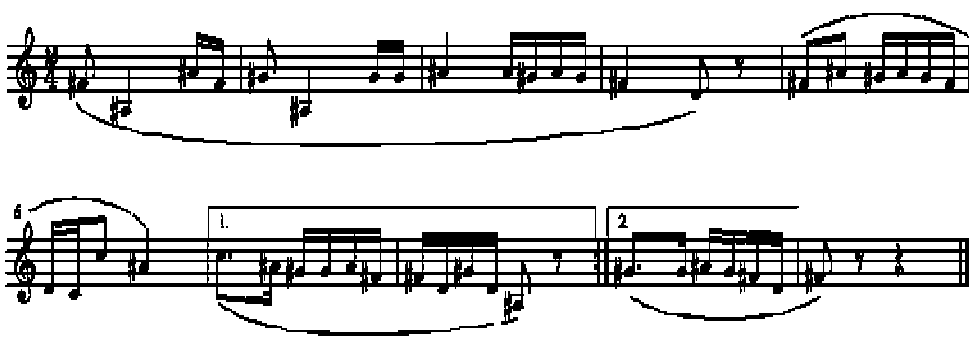


*Figura 3.* Melodía transformada

**Proposición.** *Las funciones compuestas a partir de* $f, g, h, i$, *definidas de* $P$ *sobre* $O \times A \times D$ *son funciones* $1 - 1$.

## 4. Análisis

La melodía originalmente se encuentra en 2/4 y comienza con una entrada tética, usando principalmente pulso, 1ª división y 2ª división como figuras rítmicas (negra, corchea y semicorchea). Con respecto a la tonalidad, se encuentra en Fa mayor y no tiene notas ajenas a la escala, con una armonía subyacente que se mueve entre la tónica (I) y la dominante (V7). Todas estas características son muy frecuentes en la música tradicional popular y clásica. Luego, la melodía transformada, presenta un cambio evidente pero no muy radical en la tonalidad. Los grados 5º y 6º de la escala, se encuentran bemolizados (medio tono abajo) y no hay 7º grado, presentando así una sonoridad modal y no tonal como la original, es decir, de una escala mayor natural pasamos a una escala aumentada (de tonos enteros) sin el 7º grado, o a una escala mayor artificial con los grados 5º y 6º bemol sin los grados 4º y 7º. En los otros dos aspectos (orden y duración) no hay cambios.

En el aspecto tónico, los cambios son principalmente en el paso de sistema, es decir, cambiar del sistema tonal a los sistemas atonal y modal. Sin embargo se quiere llegar a cambios dentro del mismo sistema tonal para evidenciar, entre otras, las funciones de transportar y octavar. En el aspecto rítmico o duracional los cambios también son extremos pues las melodías transformadas, son más cortas o más largas hablando en el aspecto temporal. De igual manera, el sistema acentual de las melodías originales se ve trastocado y ya no presenta relación alguna con la nueva melodía, más que su papel de conjunto original o madre. En el orden de las notas (aspecto que no se ha cambiado aún) se espera obtener funciones que describan métodos utilizados en el contrapunto como son la imitación retrograda, la interpolación usada en música clásica y otras relacionadas con la música aleatoria.

Este estudio se encuentra en proceso y tiene como proyecciones encontrar más relaciones entre los dos campos objeto de estudio, predecir comportamientos en cada uno y proporcionar herramientas que enriquezcan las técnicas compositivas que se usan actualmente en la música.