Introducción a la cohomología de DeRHAM[1]

Stella Huérfano
Profesora Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
rshuerfanob@unal.edu.co

Weimar Muñoz Villate
Matemático Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
wmunozvillate@yahoo.es

Resumen

En este trabajo se presentan los grupos de cohomología de DeRham como los grupos *duales* a ciertos grupos que son invariantes topológicos, los grupos de homología singular. Se definirán estos grupos (de cohomología) como conjuntos de formas diferenciales de una variedad M. La dualidad que se establece, se hace mediante el uso del Teorema de DeRham, y para ello debemos considerar nociones que nos introduzcan a la homología singular y al Teorema de Stokes.

1. Introducción

Los grupos de homología (en este caso singular) son invariantes topológicos que nos permiten una clasificación de espacios compactos. Los grupos de cohomología también son invariantes topológicos ya que son *duales* a los grupos de homología (dualidad debida a DeRham). Exponemos los grupos de cohomología por sus increíbles aplicaciones, por ejemplo, la clasificación de haces fibrados.

2. Simplejos estándar y grupos de homología singular

Para introducir la dualidad de DeRham, necesitamos definir la integración de una r-forma sobre un r-simplejo en un espacio euclidiano, y utilizar una gran herramienta: el teorema de Stokes. Para esto, debemos aclarar los siguientes conceptos.

Definición 2.1 El **r-simplejo estándar** $\overline{\sigma_r}$, $\overline{\sigma_r} = (p_0, p_1, ..., p_r)$ en $\mathbb{R}^r$, si x^μ es un sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^r$, está dado por:

$$\overline{\sigma_r} = \{(x^1, ..., x^r) \in \mathbb{R}^r \mid x^\mu \geq 0, \quad \sum_{\mu=1}^{r} x^\mu \leq 1\},$$

donde $p_i = (x^1, x^2, ..., x^j, ...x^r)$ con

$$x^j = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Como se muestra en la FIGURA 2.1.

[1]Grupo de investigación Colciencias, proyecto 1101-05-11-445, de 'Teoría de Representaciones'del Depto. de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

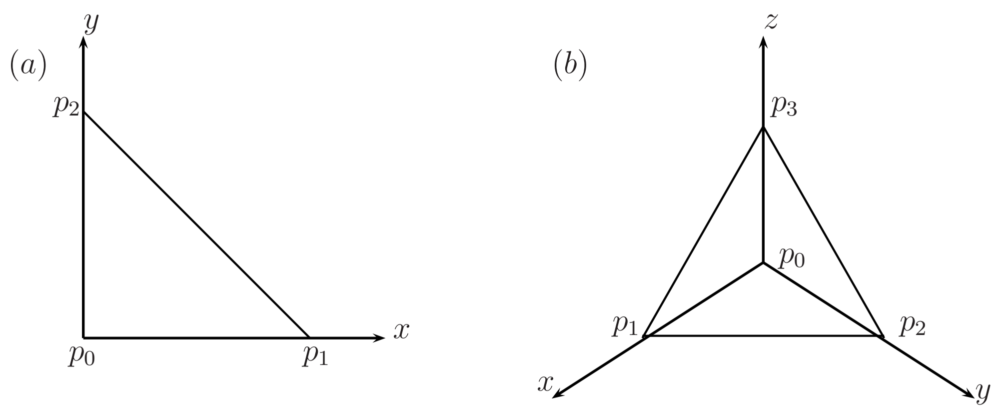


Figura 3.1: *En (a) el 2-simplejo estándar* $\overline{\sigma_2} = (p_0, p_1, p_2)$ *y en (b) el 3-simplejo estándar* $\overline{\sigma_3} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$.

Teniendo en cuenta que una r-forma ω en $\mathbb{R}^r$ se escribe como $\omega = a(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^r$, donde $dx^1 \wedge ... \wedge dx^r$ es el elemento de volumen de $\mathbb{R}^r$, con $a(x)$ una función de $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, definimos la integral de ω sobre $\overline{\sigma_r}$ de la siguiente manera:

$$\int_{\overline{\sigma_r}} \omega \equiv \int_{\overline{\sigma_r}} a(x)dx^1 dx^2 ... dx^r$$

donde la integral de la derecha es la integral usual en $\mathbb{R}^r$. Por ejemplo, si $r = 2$, $\overline{\sigma_2} = (p_0, p_1, p_2) \subseteq \mathbb{R}^3$, y $\omega = dx \wedge dy$, tenemos:

$$\int_{\overline{\sigma_2}} \omega = \int_{\overline{\sigma_2}} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1-x)dx = (x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Si $r = 3$, $\overline{\sigma_3} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, y $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, entonces

$$\int_{\overline{\sigma_3}} \omega = \int_{\overline{\sigma_3}} dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} dxdydz = \frac{1}{3}.$$

Como nuestro interés ahora es trabajar con variedades m-dimensionales, necesitamos definir r-cadenas, r-ciclos y r-fronteras en una variedad M m-dimensional.

Definición 2.2 Sea σ_r un r-simplejo en $\mathbb{R}^r$ y sea $f : \sigma_r \to M$ una función suave, es decir, $f \in C^\infty$. Denotamos la imagen de σ_r en M por s_r y llamamos a este conjunto un **r-simplejo singular** en M. Si $\{s_{r,i}\}$ es el conjunto de los r-simplejos en M, definimos una **r-cadena** c en M como una suma formal: $c = \sum_i a_i s_{r,i}$, $a_i \in \mathbb{R}$.

En adelante omitiremos recordar que se trata de r-cadenas con coeficientes en $\mathbb{R}$. Las r-cadenas en M con la suma usual, forman el **grupo de r-cadenas** en M, el cual es denotado por $C_r(M)$. Bajo el efecto de $f : \sigma_r \to M$, la frontera $\partial\sigma_r$ es enviada a un subconjunto de M que denotaremos como ∂s_r, es decir, $f(\partial\sigma_r) = \partial s_r$. El conjunto ∂s_r es una colección de $(r-1)$-simplejos singulares en M y se denomina la frontera de s_r, donde ∂s_r corresponde a la frontera geométrica de s_r, con la orientación inducida por σ_r. Tenemos así, una función $\partial : C_r(M) \to C_{r-1}(M)$ que es nilpotente, es decir, $\partial^2 = 0$. La prueba es muy sencilla y se puede ver, por ejemplo, en [2] y [7].

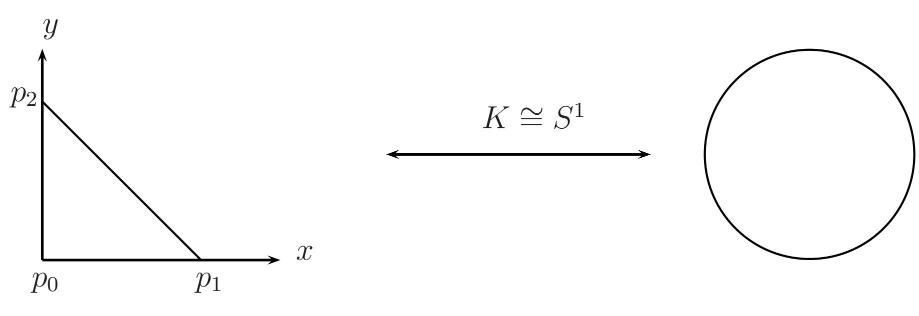
Los r-simplejos c, $\;c \in C_r(M)$, tales que $\partial_r c$=0 son llamados r**-ciclos**. El conjunto de r-ciclos, denotado por $Z_r(M)$, es un subgrupo de $C_r(M)$. Si r= 0, $\partial_0 c$= 0 y $Z_0(M)$= $C_0(M)$.

Sea M una variedad n-dimensional y sea $c \in C_r(M)$, si existe un elemento d, $d \in C_{r+1}(M)$, tal que $c = \partial_{r+1}d$ entonces c es llamado una r**-frontera**. El conjunto de todos los elementos de $C_r(M)$ que son r**-fronteras**, denotado por $B_r(M)$, es un subgrupo de $C_r(M)$. Por la definición de $C_r(M)$ cuando $r > n$, $B_n(M)$ es cero.

Además, se satisface que $Z_r(M) \supset B_r(M)$ ya que $\partial^2 = 0$. Así, podemos definir el **grupo de homología singular** como: $H_r(M) = Z_r(M)/B_r(M)$.

Teorema 2.3 *Si M es una variedad conexa, entonces: $H_0(M) = \mathbb{R}$.*

Ejemplo: Cálculo de los grupos de homología del círculo S^1.



Sea K=$\{P_0, P_1, P_2, (P_0P_1), (P_1P_2), (P_2P_0)\}$ un simplejo homeomorfo al círculo, S^1, es decir $K \cong S^1$. Como K no tiene 2-simplejos entonces $B_1(K) = 0$ y $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K)$. Tomamos un elemento $z \in Z_1(K)$ tal que $z = i(P_0P_1) + j(P_1P_2) + k(P_2P_0)$ para $i, j, k \in \mathbb{R}$, que cumpla la condición:

$$\begin{aligned}\partial_1 z &= i(P_1 - P_0) + j(P_2 - P_1) + k(P_0 - P_2)\\ &= (k-i)P_0 + (i-j)P_1 + (j-k)P_2 = 0.\end{aligned}$$

Esto se satisface si $i = j = k$, por tanto tenemos que $Z_1(K) = \{i[(P_0P_1)+(P_1P_2)+(P_2P_0)] \mid i \in \mathbb{R}\}$, donde se muestra que $Z_1(K)$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ y que

$$H_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{R}.$$

Tenemos además que $H_0(K) \cong \mathbb{R}$ pues el círculo, S^1, es conexo. De esta forma hemos calculado los grupos de homología singular del círculo S^1.

Después de estas nociones estamos listos para definir la integración de una r-forma ω sobre una r-cadena en M. Para ello, primero definimos la integral de ω sobre un r-simplejo (singular) s_r de M por:

$$\int\limits_{s_r} \omega = \int\limits_{\overline{\sigma_r}} f^*\omega,$$

donde $f : \overline{\sigma_r} \to M$ es una función suave tal que $s_r = f(\overline{\sigma_r})$, y $f^*\omega$ es una r-forma en $\mathbb{R}^r$, tal que $f^*\omega(v_1, ..., v_r) = \omega(f_* v_1, ..., f_* v_r)$ donde $f_{*,p} = Df(p)$ y $v_1, ..., v_r \in \mathbb{R}^r$, y $p \in \overline{\sigma_r}$, es decir, $f^* : \Omega^r(M) \to \Omega^r(\mathbb{R}^r)$. Así en general, para una r-cadena $c = \sum_i a_i s_{r,i} \in C_r(M)$, definimos:

$$\int\limits_{c} \omega = \sum_i a_i \int\limits_{s_{r,i}} \omega.$$

Citaremos a continuación el Teorema de Stokes ya que nos permite establecer la relación entre los grupos de cohomología de De Rham y los grupos de homología singular de M.

Teorema 2.4 ***(Teorema de Stokes:)*** *Sea M una variedad compacta y orientable m-dimensional, y si $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$ y $c \in C_r(M)$, $r = 0, 1, ..., m$, entonces:*

$$\int\limits_{c} d\omega = \int\limits_{\partial c} \omega.$$

La demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [6] o [7].

3. Grupos de cohomología de DeRham

La diferencial exterior de una r-forma $\omega \in \Omega^r(M)$ nos permite definir la cohomología de DeRham de M. Recordamos que si ω es una r-forma diferenciable sobre M, $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(M)$, su diferencial exterior es $d\omega = (\partial(\omega_{i_1 \dots i_k})/\partial x^\nu) dx^\nu \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$, con esto tenemos las siguientes definiciones.

Definición 3.1 Si M es una variedad diferenciable m-dimensional, el conjunto de r-formas cerradas (los $w \in \Omega^r(M)$ tal que $d(w)$=0) es llamado el **r-ésimo grupo de cociclos** de M, y es denotado por $Z^r(M)$, y el conjunto de las r-formas exactas (los $w \in \Omega^r(M)$ tal que $d(h)$=w para algún $h \in \Omega^{r-1}(M)$) se llama el **r-ésimo grupo de cofronteras** y se denota como $B^r(M)$. Ambos son espacios vectoriales con coeficientes en $\mathbb{R}$, y como $d^2 = 0$, tenemos que $B^r(M) \subset Z^r(M)$.

Definición 3.2 El **r-ésimo grupo de cohomología de DeRham** $H^r(M;\mathbb{R})$ para una variedad $m-$dimensional M, se definirá como:

$$H^r(M;\mathbb{R}) \equiv Z^r(M)/B^r(M).$$

Si $r \leq 1$ o $r \geq m+1$, $H^r(M;\mathbb{R})$ se define como el grupo trivial, y omitiremos en adelante especificar que se trabaja con coeficientes reales.

Si $\omega \in Z^r(M)$, la clase de equivalencia de ω pertenecerá al r-ésimo grupo de cohomología, es decir, $[\omega] \in H^r(M)$. Además la clase de equivalencia de ω, $[\omega]$, se define como el conjunto

$$\left\{\omega' \in Z^r(M) \mid \omega' = \omega + d\psi, \psi \in \Omega^{r-1}(M)\right\}.$$

A partir de esta idea, dos formas ω y ω' se dicen **cohomológicas** si difieren por una forma exacta, $d\psi$.

4. Dualidad de DeRham de $H_r(M)$ y $H^r(M)$

Como el nombre lo sugiere, el grupo de cohomología es el espacio dual del grupo de homología. El Teorema de DeRham nos permite establecer la dualidad de DeRham para la para la cohomología definida en 3.2 y la homología singular. Para ello necesitamos las siguientes nociones.

Definición 4.1 (**Producto interior de una r-forma y una r-cadena en** M) Sea M una variedad diferenciable m-dimensional y sea $C_r(M)$ el grupo cadena de M. Para $c \in C_r(M)$ y $\omega \in \Omega^r(M)$ donde $1 \leq r \leq m$, definimos un producto interior,

$$\begin{aligned} (\quad,\quad) : C_r(M) \times \Omega^r(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c, \omega \qquad &\longmapsto (c,\omega) \equiv \int_c \omega. \end{aligned}$$

De forma clara, (c,ω) es lineal en ambos argumentos:

$$(c_1 + c_2, \omega) = \int_{c_1+c_2} \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega$$

$$(c, \omega_1 + \omega_2) = \int_c \omega_1 + \omega_2 = \int_c \omega_1 + \int_c \omega_2.$$

Así, el Teorema de Stokes se escribe como: $(c, d\omega) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = (\partial c, \omega)$.

Tenemos los siguientes resultados interesantes:

1. Sean $c \in B_r(M)$ y $\omega \in Z^r(M)$, entonces, $(c,\omega) = 0$. Esto se tiene pues si $c \in B_r(M)$, entonces $c = \partial d$ con $d \in C_{r+1}(M)$, y al utilizar el Teorema de Stokes se tiene: $(c,\omega) = \int_c \omega = \int_{\partial d} \omega = \int_d d\omega = 0$, ya que $d\omega = 0$ pues $\omega \in Z^r(M)$.

2. Sean $c \in Z_r(M)$ y $\omega \in B^r(M)$, entonces, $(c,\omega) = 0$. Esto resulta de que si $c \in Z_r(M)$, es decir, $\partial c = 0$, y si $\omega \in B^r(M)$, $\omega = d\gamma$ para algún γ, $\gamma \in \Omega^{r-1}(M)$, y al utilizar el Teorema de Stokes, puesto que $(c,\omega) = \int_c \omega = \int_c d\gamma = \int_{\partial c = 0} \gamma = 0$.

El producto interior "$(,)$" induce naturalmente un producto interior, llamado producto copa "$\wedge$"entre los elementos de $H_r(M)$ y $H^r(M)$, el cual será usado para mostrar que $H_r(M)$ es el dual de $H^r(M)$. Sean $[c] \in H_r(M)$ y $[\omega] \in H^r(M)$, entonces definimos este producto copa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \wedge : \quad & H_r(M) \times H^r(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ([c], [\omega]) \longmapsto \wedge([c], [\omega]) \equiv (c, \omega) = \int_c \omega. \end{aligned}$$

Este producto está bien definido pues se tiene independencia en la elección de los representantes.(Ver[3]).

Vemos que $\wedge(\cdot, [\omega])$ es una función lineal de $H_r(M) \to \mathbb{R}$ y $\wedge([c], \cdot)$ es una función lineal de $H^r(M) \to \mathbb{R}$. Para probar la ***dualidad de*** $H_r(M)$ ***y*** $H^r(M)$, tenemos que mostrar que $\wedge(\cdot, [\omega])$ tiene rango máximo, i.e., $dimH_r(M) = dimH^r(M)$.

Teorema 4.2 ***(Teorema de De Rham):*** *Si M es una variedad compacta, $H_r(M)$ y $H^r(M)$ son finito dimensionales. Más aún, la función $\wedge : H_r(M) \times H^r(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ es bilineal y no degenerada; por tanto $H^r(M)$ es el espacio vectorial dual de $H_r(M)$.*

Como para una variedad compacta m-dimensional M, tenemos que $H^r(M)$ es isomorfo a $H_r(M)$, el número $b^r(M) \equiv dimH^r(M) = dimH_r(M) \equiv b_r(M)$, se conoce como el r-**ésimo número de Betti** de M. La característica de Euler de M, denotada como $\chi(M)$, y definida por $\chi(M) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r I_r$, donde I_r es el número de r-simplejos en M, puede ser escrita como:

$$\chi(M) = \sum_{r=1}^{m} b^r(M). \tag{1}$$

La igualdad en (1) se sigue debido a que la función $\partial_r : C_r(M) \to C_{r-1}(M)$ nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} I_r(M) &= (N^\circ \ de \ generadores \ de \ C_r(M)) = dimC_r(M) \\ &= dim(ker\partial_r) + dim(Im\partial_r) \\ &= dimZ_r(M) + dimB_{r-1}(M), \end{aligned}$$

y debido a que de la definición de los números de Betti, se tiene que:

$$\begin{aligned} b_r(M) &= dimH_r(M) = dim[Z_r(M)/B_r(M)] \\ &= dimZ_r(M) - dimB_r(M). \end{aligned}$$

Luego, para que se concluya satisfactoriamente la ecuación (1), utilizamos el hecho de que $\sum_{r=0}^{m} (-1)^r dimB_{r-1}(M) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{r+1} dimB_r(M)$ ya que $dimB_r(M) = 0$ si $r = m$ y $dimB_{-1}(M) = 0$.

Los grupos de homología y los grupos de cohomología pueden definirse a través de las siguientes cadenas complejas de homología y cohomología, respectivamente (ver [2] y [7]):

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{r-1}} C_{r-1}(M) \xleftarrow{\partial_r} C_r(M) \xleftarrow{\partial_{r+1}} C_{r+1}(M) \xleftarrow{\partial_{r+2}} \cdots$$

$$H_r(M) = Z_r(M)/B_r(M) = \mathtt{ker}\partial_r/\mathtt{Im}\partial_{r+1}$$

$$\cdots \xrightarrow{d_{r-1}} \Omega^{r-1}(M) \xrightarrow{d_r} \Omega^r(M) \xrightarrow{d_{r+1}} \Omega^{r+1}(M) \xrightarrow{d_{r+2}} \cdots$$

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M) = \mathtt{ker}d_{r+1}/\mathtt{Im}d_r.$$

5. Estructura de los grupos de cohomología de DeRham

Es el momento de ver diferencias más interesantes entre los grupos de cohomología de DeRham y los grupos de homología.

5.1. Anillos de cohomología

Sean $[\omega] \in H^q(M)$ y $[\eta] \in H^r(M)$. Definimos un producto de $[\omega]$ y $[\eta]$ por $[\omega]\wedge[\eta] = [\omega\wedge\eta]$, como $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta = 0$, entonces, $\omega \wedge \eta$ es cerrado, por tanto $[\omega] \wedge [\eta]$ es un elemento de $H^{q+r}(M)$. Veamos que $[\omega] \wedge [\eta]$ es independiente de la elección de los representantes de $[\omega]$ y $[\eta]$. Tomemos por ejemplo $\omega' = \omega + d\psi$ en lugar de ω, entonces,

$$\begin{aligned}[\omega'] \wedge [\eta] = [\omega' \wedge \eta] = [(\omega + d\psi) \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta + d\psi \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta \\ + d\psi \wedge \eta + (-1)^{q-1}\psi \wedge d\eta] = [\omega \wedge \eta + d(\psi \wedge \eta)] = [\omega \wedge \eta],\end{aligned}$$

pues $(-1)^{q-1}\psi \wedge d\eta = 0$ ya que $\eta \in H^r(M)$.

Por tanto el producto "$\wedge$"es una función bien definida

$$\wedge : H^q(M) \times H^r(M) \longrightarrow H^{q+r}(M).$$

El **anillo de cohomología** $H^*(M)$ esta definido por la suma directa, $H^*(M) = \oplus_{r=1}^m H^r(M)$, donde su suma será la suma formal de dos elementos de $H^*(M)$; y el producto será el producto inducido por el operador exterior "$\wedge$"definido antes. Así, $\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \to H^*(M)$.

Esta es una de las propiedades que muestran la superioridad de los grupos de cohomología de DeRham sobre los grupos de homología; pues el producto de cadenas no está bien definido, y por tanto no es posible tener una estructura de anillo en los grupos de homología.

5.2. La fórmula de Künneth

Sea M un producto de dos variedades, $M = M_1 \times M_2$, y sea $\{\omega_i^p\}$, $1 \le i \le b^p(M_1) = dimH^p(M_1)$, una base de $H^p(M_1)$ y $\{\eta_j^{r-p}\}$ una base de $H^{r-p}(M_2)$, $1 \le j \le dimH^{r-p}(M_2)$. Claramente $\omega_i^p \wedge \eta_i^{r-p}$, $(0 \le p \le r)$ es una r-forma cerrada en M, y es fácil mostrar que no es exacta, ver [6] ; por tanto $\omega_i^p \wedge \eta_i^{r-p} \in H^r(M)$. Recíprocamente un elemento de $H^r(M)$ puede ser descompuesto en una suma directa de elementos de $H^p(M_1)$ y $H^{r-p}(M_2)$ para $0 \leq p \leq r$.

La generalización del resultado anterior es conocida como la **fórmula de Künneth**, la cual esta dada por:

$$H^r(M) \equiv \bigoplus_{p+q=r} [H^p(M_1) \otimes H^q(M_2).]$$

Esta fórmula también relaciona los anillos de cohomología de las respectivas variedades; como tenemos a continuación:

$$\begin{aligned} H^*(M) &= \sum_{r=1}^{m} H^r(M) = \sum_{r=1}^{m} \bigoplus_{p+q=r} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2) \\ &= \sum_{p} H^p(M_1) \bigotimes \sum_{q} H^q(M_2) = H^*(M_1) \otimes H^*(M_2). \end{aligned}$$

Así, para concluir sus aplicaciones dentro de los temas vistos, esta fórmula en términos de los números de Betti tiene la siguiente presentación:

$$b^r(M) = \sum_{p+q=r} b^p(M_1) b^q(M_2).$$

Veamos que sucede con sus respectivas características de Euler si $M = M_1 \times M_2$. ¿Será que $\chi(M) = \chi(M_1)\chi(M_2)$? El siguiente cálculo nos permite responder a esta pregunta:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{r} (-1)^r b^r(M) = \sum_{r} (-1)^r [\sum_{p+q=r} b^p(M_1) b^q(M_2)] \\ &= \sum_{r} (-1)^{p+q} [\sum_{p+q=r} b^p(M_1) b^q(M_2)] = \sum_{p} (-1)^p b^p(M_1) \sum_{q} (-1)^q b^q(M_2) \\ &= \chi(M_1)\chi(M_2) \end{aligned}$$

Apliquemos todo lo tratado anteriormente en el toro, $T^2 = S^1 \times S^1$.

Tenemos que $H^0(S^1) = H_0(S^1) = \mathbb{R}$ y que $H^1(S^1) = H_1(S^1) = \mathbb{R}$; por tanto:

$$\begin{aligned} H^0(T^2) &= \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ H^1(T^2) &= (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) = \mathbb{R} \\ H^2(T^2) &= \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

De forma clara $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$ pues el producto de dos números reales es un número real. Como los números de Betti de S^1 son $b^0(S^1) = dim H^0(S^1) = 1$ y $b^1(S^1) = dim H^1(S^1) = 1$; su correspondiente característica de Euler será:

$$\chi(S^1) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i b^i(S^1) = (-1)^0 1 + (-1)^1 1 = 0,$$

para obtener finalmente, que la característica de Euler de T^2 es

$$\chi(T^2) = \chi(S^1)\chi(S^1) = 0.$$

Bibliografía

[1] CHOQUET-BRUHAT, C.; DEWITT-MORETTE, M.; DILLARD-BLEICK., *Analysis, Manifolds and Physics*. Elseiver Science Publisher B.V, 1989.

[2] HATCHER., *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[3] IVORRA, C., *Topología Algebraica (con aplicaciones a la Geometría Diferencial).* www.uv.es/∼ivorra/Libros/Topalg.pdf

[4] LIPSCHUTZ, S., *General Topology*. Schaum Publishing co, 1965.

[5] MACLANE, S., *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1971.

[6] NAKAHARA, M., *Geometry, Topology, and Physics*. Institude of Physics Publishing, 1990.

[7] NASH, C.; SEN, S., *Topology and Geometry for Physics*. Academic Press, 1983.

[8] PRICE, MARK., *A proff of the De Rham theorem using induction on open sets*. 1998.

[9] SPIVAK, M., *Cálculo en Variedades*. Reverté, 1988.