# Isometrías y paralelogramos

**Brigitte Sánchez**
*Profesora Instituto Pedagógico Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
Juanitasan82@msn.com

**Jaime Fonseca**
*Profesor Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
jfgonzalez@uni.peagogica.edu.co

**Resumen**

En los libros de texto de geometría elemental, se encuentran estudios intuitivos de las isometrías y algunas de sus propiedades, sin embargo, existen propiedades difícilmente demostrables o verificables de acuerdo con los métodos que allí se proponen. El siguiente escrito, pretende mostrar una manera de estudiar las isometrías, también conocidas como transformaciones rígidas, definiéndolas a partir de paralelogramos de manera que se puedan demostrar todas sus propiedades, y con ello, apoyar el estudio en conocimientos previos de geometría. Es de aclarar que en el tratamiento dado, se presenta una combinación de conocimientos en álgebra y geometría.

## 1. Transformaciones rígidas

A continuación se presentan algunas definiciones necesarias para iniciar el estudio de las transformaciones rígidas.

**Definición 1.** *Si $V$ y $W$ son dos espacios vectoriales sobre un campo (escalares), una función $F$ de $V$ en $W$ se llama transformación lineal de $V$ en $W(F : V \to W)$ si tiene las siguientes propiedades:*

- $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$
- $F(cX) = cF(X)$ *para todo $c$ un escalar*

**Definición 2.** *Una transformación rígida $T$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ ($T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) tal que para cualquier par de puntos $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, se cumple que:*

$$d(X_1, X_2) = d(T(X_1), T(X_2))$$

Es decir, cuando se habla de transformaciones rígidas, se hace referencia a funciones que aplicadas a dos puntos, conservan la distancia entre ellos.

El actual trabajo se limitará al estudio de las transformaciones rígidas en el plano euclidiano $\Pi$, con lo que definimos el conjunto

$$\mathbf{R} = \{T \mid T : \Pi \to \Pi\}, \text{ siendo } T \text{ una transformación rígida.}$$

# 2. Paralelogramos

Antes de dar una definición de una clase de transformación rígida, es necesario definir y probar algunas propiedades de los paralelogramos.

**Definición 3.** *Un paralelogramo $ABCD$ es:*

1. *Si $A$,$B$,$C$,$D$ son puntos no colineales, esto es el cuadrilátero $ABCD$ donde $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.*
2. *Si $A$,$B$,$C$,$D$ son colineales, esto es la unión $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ (en este caso, el paralelogramo es degenerado)*

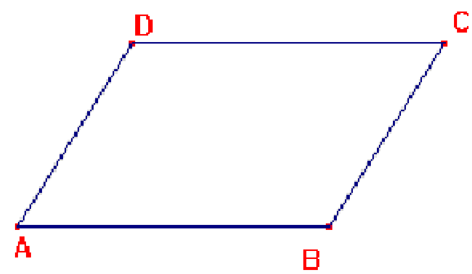



Figura 1: Paralelogramos

Si se reordenan cíclicamente los vértices, se puede concluir que cualquiera de las siguientes expresiones son equivalentes y hacen referencia al mismo paralelogramo:

$$\square ABCD \leftrightarrow \square BCDA \leftrightarrow \square CDAB \leftrightarrow \square DABC$$

$$\square DABC \leftrightarrow \square DCBA \leftrightarrow \square CBAD \leftrightarrow \square BADC \leftrightarrow \square ADCB$$

Con esta definición, se puede deducir la siguiente propiedad de los paralelogramos:

**Teorema 1.** *Si existe el paralelogramo $\square ABCD$ con $A$,$B$,$C$,$D$ no colineales, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.*

La existencia de determinados paralelogramos cumplen propiedades como:

**Teorema 2 (Transitividad de paralelogramos).** *Si existen los paralelogramos $\square ABCD$ y $\square CDEF$, existe el paralelogramo $\square ABFE$.*

*Demostración.* i) Si $A$,$B$,$C$,$D$,$E$,$F$ son puntos colineales tenemos que

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AD} \cong \overline{BC}, \overline{CD} \cong \overline{EF} \text{ y } \overline{CF} \cong \overline{DE}$$

respectivamente.

Como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

De $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{CF} \cong \overline{DE}$, existe $T_1 \in \mathbf{R}$, tal que

$$T_1(\overline{AD}) = \overline{BC} \;\text{ y }\; T_1(\overline{DE}) = \overline{CF}$$

de donde obtenemos que

$$d(A, D) = d(T(A), T(D)) = d(B, C) \;\text{ y }\; d(D, E) = d(T(D), T(E)) = d(C, F)$$

Por consiguiente,

$$d(A, E) = d(T(A), T(E)) = d(B, F)$$

luego

$$T(\overline{AE}) = \overline{BF}$$

por lo tanto

$$\overline{AE} \cong \overline{BF}$$

Recordemos que $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AE} \cong \overline{BF}$, luego existe el paralelogramo $\square ABFE$.

ii) Si $A$, $B$, $C$, $D$ son puntos colineales y $C$, $D$, $E$, $F$ son puntos no colineales, tenemos que
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{CF} \parallel \overline{DE}$ respectivamente.(Figura 2) De la

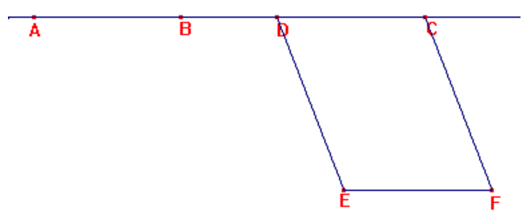



Figura 2: Transitividad entre paralelogramos (1)

colinealidad de $A$, $B$, $C$, $D$ tenemos que $\overline{AB} = \overline{CD}$, además $\overline{CD} = \overline{EF}$, luego $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.

Ahora, debemos probar que $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$, para ello probaremos que los triángulos $ADE$ y $BCF$ existen y son congruentes, de esta forma concluiremos que $\angle DAE \cong \angle CBF$ con lo que nos quedará probado.

Los triángulos $ADE$ y $BCF$ existen ya que los puntos $A$, $D$, $E$ son no colineales al igual que los puntos $B$, $C$, $F$.

Por el teorema anterior

$$\overline{ED} \parallel \overline{CF}$$

además la recta $CD$ intercepta las rectas paralelas $DE$ y $CF$, luego

$$\angle ADE \cong \angle BCF$$

adicionalmente

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

y por el criterio LAL

$$\triangle ADE \cong \triangle BCF$$

Por consiguiente

$$\angle DAE \cong \angle CBF$$

con lo que

$$\overline{AE} \parallel \overline{BF}$$

Como $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$, tenemos que existe el paralelogramo $ABFE$.

iii) Si $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ son puntos no colineales tenemos que

$$\overline{CD} \parallel \overline{AB},\ \overline{BC} \parallel \overline{DA},\ \overline{CD} \parallel \overline{EF} \text{ y } \overline{CF} \parallel \overline{DE}$$

respectivamente.(Figura 3) Como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$, entonces

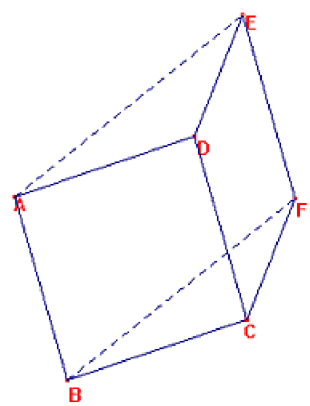



Figura 3: Transitividad entre paralelogramos (2)

$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.

Debemos mostrar que $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$, para lo cual, demostraremos que $\angle AED \cong \angle BFC$ probando que $\triangle ADE \cong \triangle BCF$.

Por el teorema anterior

$$\overline{AD} \cong \overline{BC}$$

y

$$\overline{DE} \cong \overline{CF}$$

Si consideramos la recta transversal $\overline{CD}$ y analizamos los ángulos $\angle ADE$ y $\angle BCF$, nos daremos cuenta que son congruentes, ya que

$$\angle DCF \cong \angle QDE$$

con $Q \in \overline{CD}$ y $\angle ADQ \cong \angle BCD$. Por el criterio LAL, $\triangle ADE \cong \triangle BCF$, con lo que $\angle AED \cong \angle BFC$ y por ende, $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$

De lo anterior, existe el paralelogramo $ABFE$.

Por i), ii) y iii) se demuestra el teorema. □

**Criterio 1 (Principio del cuarto vértice principal).** *Si existen los paralelogramos $ABCD$ y $ABCF$, entonces $D = F$.*

*Demostración.* De la existencia del paralelogramo $ABCD$,

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

y de la existencia del $\square ABCF$,

$$\overline{AB} \parallel \overline{CF} \text{ y } \overline{BC} \parallel \overline{AF}$$

de donde

$$\overline{CD} \parallel \overline{CF} \text{ y } \overline{AF} \parallel \overline{AD}$$

Si todos los puntos no son colineales, puede ocurrir que $D = F$ ó que $D$ y $F$ estén en distintos semiplanos de la recta $AC$. Si ocurre el segundo caso, $F$ y $B$ están en el mismo semiplano de $\overleftrightarrow{AC}$ y no existiría el paralelogramo $ABCF$. Luego, $D = F$.

Si los paralelogramos son degenerados, como $A \neq C$, para que $\overline{CF} \cong \overline{CD} y$
$\overline{AF} \cong \overline{AD}$ debe ocurrir que $D = F$. □

Existe una definición alternativa de paralelogramo que sin alterar la definición y propiedades anteriores, utiliza nuevos elementos para caracterizar el paralelogramo.

**Definición 4 (Definición alternativa de paralelogramo).** *El cuadrilátero $ABCD$ será llamado un paralelogramo $ABCD$ si y sólo si $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tiene el mismo punto medio.*

**Teorema 3 (Propiedad transitiva alternativa de paralelogramo).** *Sea $\square ABCD$ y $\square BEDF$, existe $\square AECF$.*

*Demostración.* Debemos probar que $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$ tienen el mismo punto medio.

Como existen $\square ABCD$ y $\square BEDF$, de la definición de paralelogramo, existe $X$ tal que es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, y existe $X'$ tal que es punto medio de $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$.

El punto medio de un segmento es único y tenemos que $X$ y $X'$ son puntos medios de $\overline{BD}$, por consiguiente, $X = X'$ y $X$ es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$, luego existe $\square AECF$. □

# 3. Clases de transformaciones rígidas

Tomando como base las características de un paralelogramo, se pueden definir las transformaciones rígidas y demostrar algunas de sus propiedades.

## 3.1. Traslaciones

**Definición 5 (Traslación).** *Supongamos que $P$ y $Q$ son puntos fijos (no necesariamente distintos) en $\Pi$, entonces se define*

$$\begin{aligned} \overline{QP} :& \Pi \to \Pi \\ & X \mapsto \overline{QP}(X) \end{aligned}$$

*donde existe $\square QPX\overline{QP}(X)$.*

Si se nombra $X'$ a la traslación de $X$ en la dirección de $P$ a $Q$, a través de la distancia entre $P$ y $Q$, entonces, la definición se puede reescribir así:

Para cualquier punto $X$ en $\Pi$, $\overline{QP}(X) = X'$ si y sólo si $\square QPXX'$.

A lo largo del texto se presentarán algunas demostraciones, como una manera de mostrar el tratamiento que se les da a las transformaciones cuando logran ser definidas a partir de paralelogramos.

**Teorema 4.** *Si $P = Q$, entonces $\overline{PP} = I_\Pi$.*

*Demostración.* Por definición se tiene que $\overline{PP}(X) = X'$ si y sólo si existe $\square PPXX'$, de donde $\overline{PP} \cong \overline{XX'}$, luego $X' = X$. Como $\overline{PP}(X) = X' = X$ para todo $X \in \Pi$, entonces $\overline{PP} = I_\Pi$. $\square$

Aunque se concibieron las traslaciones como una clase de transformaciones rígidas, es necesario probar que cumplen la condición para pertenecer a este conjunto.

**Teorema 5.** *Para cualquier par de puntos $Q, P \in \Pi$, $\overline{Q'P} \in \mathbf{R}$.*

*Demostración.* Sean $X, Y$ dos puntos arbitrarios de $\Pi$, entonces por definición de $\overline{QP}$, se tiene que existen los paralelogramos $\square QPX\overline{QP}(X)$ y $\square QPY\overline{QP}(Y)$ respectivamente.
Por reordenamiento cíclico de $\square QPX\overline{QP}(X)$ se obtiene $\square X\overline{QP}(X)PQ$ y, por transitividad con $\square QPY\overline{QP}(Y)$ existe $\square X\overline{QP}(X)\overline{QP}(Y)Y$, luego,

$$\overline{XY} \cong \overline{\overline{QP}(X)\overline{QP}(Y)}$$

y por consiguiente $d(X,Y) = d(\overline{QP}(X), \overline{QP}(Y))$.
Así, $\overline{QP}$ preserva distancias, luego es una transformación rígida. $\square$

**Teorema 6.** *Si $P \neq Q$ entonces $\overline{QP}(P) = Q$.*

*Demostración.* Por definición de $\overline{QP}$ existe $\square QPP\overline{QP}(P)$, entonces

$$d(P,P) = d(Q, \overline{QP}(P))$$

Como $d(P,P)=0$ se tiene que

$$d(Q,\overline{QP}(P))=0$$

y por ende,

$$Q=\overline{QP}(P)$$

$\square$

**Teorema 7.** *Si $P\neq Q$, entonces $\overline{QP}$ no tiene puntos fijos*

*Demostración.* Suponga que $X$ es un punto fijo, entonces $\overline{QP}(X)=X$. Por definición de $\overline{QP}$ existe $\square QPXX$, de donde $\overline{QP}\cong\overline{XX}$ y $d(P,Q)=d(X,X)$, así $P=Q$. Lo cual es una contradicción a la hipótesis. $\square$

En este momento, surge la inquietud acerca de cuándo dos traslaciones son iguales, qué características cumplen y cómo se puede garantizar de manera eficaz tal igualdad. Los siguientes dos teoremas, aclararán tales preguntas.

**Teorema 8.** *$\overline{QP}=\overline{SR}$ si y sólo si tienen el mismo efecto sobre un punto.*

*Demostración.*

i) Suponga que para algún punto $A\in\Pi$,

$$\overline{QP}(A)=\overline{SR}(A)$$

Se mostrará que

$$\overline{QP}(X)=\overline{SR}(X)$$

para cada $X\in\Pi$.

Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, entonces por definición de $\overline{QP}$ y de $\overline{SR}$, existen $\square QPX\overline{QP}(X)$ y $\square SRX\overline{SR}(X)$ que por reordenamiento cíclico es el paralelogramo $\square RS\overline{SR}(X)X$.

Por hipótesis, $\overline{QP}(A)=\overline{SR}(A)=A'$, entonces existen $\square QPAA'$ y $\square SRAA'$; si se reordena este último, se obtiene $\square AA'SR$ y por transitividad con $\square QPAA'$, existe $\square QPRS$; nuevamente, por transitividad con $\square RS\overline{SR}(X)X$, existe $\square QPX\overline{SR}(X)$, y por el principio del cuarto vértice principal entre este último y $\square QPX\overline{QP}(X)$, se obtiene que $\overline{QP}(X)=\overline{SR}(X)$.

Puesto que $X$ es un punto arbitrario en $\Pi$, $\overline{QP}=\overline{SR}$.

ii) Suponga que $\overline{QP}=\overline{SR}$, entonces por definición de igualdad entre dos transformaciones $\overline{QP}(A)=\overline{SR}(A)$ para $A\in\Pi$.

Por i) y ii) queda demostrado que $\overline{QP}=\overline{SR}$ si y sólo si $\overline{QP}(A)=\overline{SR}(A)$ para algún $A\in\Pi$. $\square$

Otro criterio para probar la igualdad de dos traslaciones y , es probar que existe el PQSR, así mismo, si las traslaciones son iguales, existe el paralelogramo.

**Teorema 9.** *$\overline{QP}=\overline{SR}$ si y sólo si existe $\square PQSR$.*

*Demostración.*

i) Si existe $\square PQSR$, por reordenamiento cíclico existe $\square SRPQ$, y por definición de $\overline{SR}$, $\overline{SR}(P) = Q$; además por el teorema 6, tenemos que $\overline{QP}(P) = Q$ y del teorema anterior, concluimos que $\overline{QP} = \overline{SR}$.

ii) Si $\overline{QP} = \overline{SR}$, entonces $\overline{QP}(P) = \overline{SR}(P)$. Sabemos que $\overline{QP}(P) = Q$, luego $Q = \overline{SR}(P)$ y por definición de $\overline{SR}$, existe el paralelogramo $\square SRPQ$ que por reordenamiento cíclico es equivalente a $\square PQSR$.

Por i) y ii) concluimos que $\overline{QP} = \overline{SR}$ si y sólo si existe $\square PQSR$. $\square$

De forma similar pueden demostrarse propiedades como $\overline{QP}^{-1} = \overline{QP}$ y la composición de dos traslaciones $\overline{RQ}$ y $\overline{QP}$ es la traslación $\overline{RP}$.
Para estudiar la siguiente clase de transformación rígida se requiere tomar la definición alternativa de paralelogramo, que no altera la definición y propiedades anteriores, sino que utiliza nuevos elementos que también caracterizan el paralelogramo.

## Reflexiones centrales

**Definición 6 (Reflexión Central).** *Suponga que $P$ es un punto fijo en $\Pi$. La reflexión central $[P]$ sobre $P$ (llamado el centro de la reflexión central) se define:*

$$\begin{aligned}[P] :& \Pi \to \Pi \\ & X \mapsto [P](X)\end{aligned}$$

*Donde para cualquier punto $X$, existe el paralelogramo $\square PXP[P](X)$.*

Si se nombra $X'$ a la imagen de $X$ por $[P]$, se puede escribir la definición así:

$$[P](X) = X' \text{ si y sólo si existe } \square PXP[P](X), \text{ siendo } P \text{ el punto medio de } \overline{XX'}.$$

Teniendo en cuenta esta definición, se pueden demostrar algunas propiedades de las reflexiones centrales, tales como la contenencia en el conjunto de transformaciones rígidas, ($[P] \in \mathbf{R}$) y

**Teorema 10.** *$[P]$ no tiene puntos fijos distintos a $P$.*

*Demostración.* Suponga que existe algún punto $X$ en $\Pi$ que es punto fijo de $[P]$, entonces $[P](X) = X$, se probará que $X = P$.
Por definición de $[P]$ existe $\square PXP[P](X)$, y por hipótesis $[P](X) = X$, luego existe $\square PXPX$, de esta manera el punto medio de $\overline{PP}$ es el mismo punto medio de $\overline{XX}$, con lo que se demuestra que $P = X$. $\square$

Al igual que en las traslaciones, las reflexiones centrales son iguales si asignan la misma imagen a un punto arbitrario de $\Pi$, este no es el único criterio que determina la igualdad entre dos reflexiones centrales, existe otro que a partir de la igualdad entre los centros de las reflexiones deduce lo mismo: $[P] = [Q]$ si y sólo si $P = Q$.

Por otro lado, la transformación inversa de una reflexión central es ella misma

**Teorema 11.** $[P]^{-1} = [P]$.

*Demostración.* Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, se mostrará que

$$[P]^{-1}(X) = [P](X)$$

Por definición de $[P]$, existe $\square PXP[P](X)$; como $[P]^{-1} \in \mathbf{R}$, si se aplica al paralelogramo anterior, se convierte en

$$\square[P]^{-1}(P)[P]^{-1}(X)[P]^{-1}(P)[P]^{-1}([P](X))$$

Si se tiene en cuenta que $[P]^{-1}(P) = P$, entonces el último paralelogramo se puede denotar como $\square P[P]^{-1}(X)PX$ o también como $\square PXP[P]^{-1}(X)$, por el principio del cuarto vértice principal con $\square PXP[P](X)$ se obtiene que

$$[P](X) = [P]^{-1}(X) \quad \square$$

A diferencia de las traslaciones, las reflexiones con la operación de composición no son una estructura cerrada; en los siguientes teoremas se mostrará cuál es el resultado de componer dos reflexiones centrales, así mismo, se dejará ver la relación entre las reflexiones y las traslaciones.

**Teorema 12.** $[Q] \circ [P] = \overline{RP}$, *donde* $R = [Q](P)$

*Demostración.* Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, se quiere probar que

$$([Q] \circ [P])(X) = \overline{RP}(X)$$

Sea $[P](X) = X'$, $[Q](X') = X''$, por hipótesis se tiene que $[Q](P) = R$, entonces existen $\square PXPX'$, $\square QX'QX''$ y $\square QPQR$ respectivamente, el último paralelogramo puede denotarse por $\square RQPQ$ y, por transitividad con $\square QX'QX''$, existe $\square RX'PX''$ que puede escribirse como $\square PX'RX''$.

Nuevamente, por transitividad con $\square PXPX'$, existe $\square PXX''R$ que es equivalente a $\square RPXX''$.

Debido a la existencia de $\overline{RP}$, existe $\square RPX\overline{RP}(X)$ y por el principio del cuarto vértice principal con $\square RPXX''$, se obtiene $\overline{RP}(X) = X''$, sustituyendo $X''$, se obtiene

$$\overline{RP} = ([Q] \circ [P])(X)$$

Luego

$$\overline{SR}(X) = ([Q] \circ [P])(X)$$

para cualquier $X \in \Pi$; con lo que se demuestra que

$$[Q] \circ [P] = \overline{RP} \quad \square$$

A partir de este teorema, se demuestra que: para cualquier traslación $T$ y algún punto fijo $P$, existe un único punto $Q$, tal que $T = [Q] \circ [P]$; así mismo, para alguna traslación $T$ y algún punto fijo $Q$, existe un único punto $P$, tal que $T = [Q] \circ [P]$ y, para cualquier traslación $T$ y alguna reflexión central $U$, $U \circ T$ y $T \circ U$ son reflexiones centrales.

## 3.2. Rotaciones

Para definir esta clase de transformaciones rígidas, se requiere que el paralelogramo tenga características especiales, específicamente, debe tener todos sus lados congruentes, es decir, debe ser un rombo.

**Definición 7.** *Sea $P$ un punto fijo y un ángulo $\alpha$ tal que $\alpha \in [-180^o, 180^o]$. Se define la rotación $[P(\alpha)]$ sobre el punto $P$ (centro de la rotación) a través de $\alpha$ (ángulo dirigido) como:*

$$\begin{aligned} [P(\alpha)] :& \Pi \to \Pi \\ & X \mapsto [P(\alpha)](X) \end{aligned}$$

*Donde existe el rombo $\square AXP[P(\alpha)](X)$ y $\angle XP[P(\alpha)](X) = \alpha$.*

**Teorema 13.** *Si $X = P$, $[P(\alpha)](X) = X$.*

*Demostración.* Supongamos que $[P(\alpha)](X) = X'$, por definición existe el rombo $\square AXPX'$, como $X = P$, este rombo se puede reescribir como $\square AXXX'$, por lo que

$$\overline{XX} \cong \overline{AX'} \cong \overline{XX'}$$

por tanto

$$d(X, X') = d(X, X) = 0$$

por ende, $X = X'$ y $[P(\alpha)](X) = X$. □

**Teorema 14.** $[P(\alpha)] \in \mathbf{R}$.

*Demostración.* Sean $X$ y $Y$ dos puntos arbitrarios en $\Pi$, debemos mostrar que

$$d(X, Y) = d([P(\alpha)](X),\ [P(\alpha)](Y))$$

Para probar que la distancia de $X$ a $Y$ es igual a la distancia de $[P(\alpha)](X)$ a $[P(\alpha)](Y)$, debemos probar que $\triangle PXY \cong \triangle P[P(\alpha)](X)[P(\alpha)](Y)$.

De la definición de $[P(\alpha)](X)$ y $[P(\alpha)](Y)$, existen los rombos $\square AXP[P(\alpha)](X)$ y $\square BYP[P(\alpha)](Y)$, por lo que

$$d(P, X) = d(P, [P(\alpha)](X)) \text{ y } d(P, Y) = d(P, [P(\alpha)](Y))$$

Nos falta probar que

$$\angle YPX \cong \angle [P(\alpha)](Y)P[P(\alpha)](X)$$

para completar los argumentos que exige el criterio LAL y demostrar la congruencia que necesitamos. Para ello, se presentan dos casos(Figura 4):

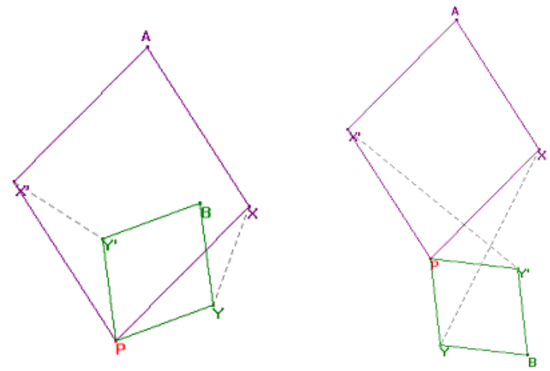



Figura 4: $[P(\alpha)] \in \mathbf{R}$.

i) Si $\beta = \angle YPX$ y $0 < \beta < \alpha$ (Primera ilustración de figura 4), entonces

$$[P(\alpha)](Y)PY = \angle[P(\alpha)](Y)PX + \alpha XPY = \alpha$$

$$XP[P(\alpha)](X) = \angle XP[P(\alpha)](Y) + [P(\alpha)](X)P[P(\alpha)](Y) = \alpha$$

Por tanto

$$[P(\alpha)](Y)PX + \angle XPY = \angle XP[P(\alpha)](Y) + \angle[P(\alpha)](X)P[P(\alpha)](Y)$$

Con lo que

$$\angle XPY = \angle[P(\alpha)](X)P[P(\alpha)](Y)$$

que era lo que queríamos demostrar.

ii) Si $\beta = \angle YPX$ y $0 < \alpha < \beta$ (Segunda ilustración de la figura 4), la demostración es análoga a la anterior.

Así

$$\triangle PXY \cong \triangle P[P(\alpha)](X)[P(\alpha)](Y)$$

por el criterio LAL, con lo que tenemos que

$$d([P(\alpha)](X), [P(\alpha)](Y)) = d(X, Y) \quad \square$$

**Teorema 15.** $[P(0^o)] = I_\Pi$.

*Demostración.* Queremos mostrar que para un punto arbitrario $X \in \Pi$, $[P(0^o)](X) = X$.
Sea $X$ un punto arbitrario en $\Pi$, por definición de $[P(0^o)]$,

$$\angle XP[P(0^o)](X) = 0^o$$

además $\angle XPX = 0^o$ luego

$$\angle XP[P(0^o)](X) = \angle XPX$$

Por otro lado, existe el rombo $\square AXP[P(0^o)](X)$ y por tanto,

$$d(P,[P(0^o)](X)) = d(P,X)$$

Por el criterio LAL,

$$\triangle XPX \cong \triangle XP[P(0^o)](X)$$

y por definición de transformación, existe $T$ tal que

$$T(\overline{[P(0^o)(X)X]}) = \overline{XX}$$

así que

$$d([P(0^o)](X),X) = d(X,X) = 0$$

y por ende $[P(0^o)](X) = X$ para cualquier $X \in \Pi$. $\square$

Existen ciertas características que nos facilitan determinar en ciertos casos cuál puede ser el resultado de aplicar una rotación a determinados puntos, los dos teoremas siguientes nos mostrarán tales casos.

**Teorema 16.** $[P(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [P(\beta+\alpha)]$

*Demostración.* Sea $X$ un punto arbitrario de $\Pi$ y $X'$ tal que $[P(\alpha)(X) = X'$, entonces existe el rombo $\square AXPX'$ tal que $\angle XPX' = \alpha$. Escojamos al punto $X''$ tal que $[P(\alpha)](X') = X''$, existe el rombo $\square BX'PX''$ tal que $\angle X'PX'' = \beta$. De lo anterior

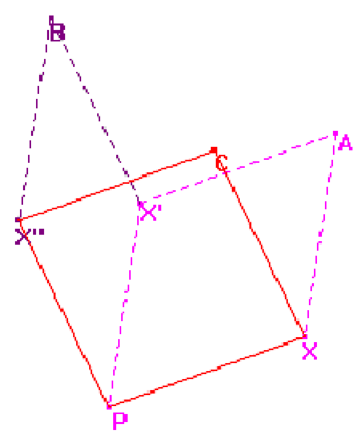



Figura 5: Composición de rotaciones

obtenemos que:

$$d(P,X) = d(P,X') = d(P,X'')$$

y

$$\alpha + \beta = \angle XPX' + \angle X'PX'' = \angle XPX''$$

Por el postulado de las paralelas, existen las rectas $\overleftrightarrow{XC}$ y $\overleftrightarrow{X''C}$ paralelas a las rectas $\overleftrightarrow{PX''}$ y $\overleftrightarrow{PX}$ respectivamente, luego, existe $\square PXCX''$ tal que $\overline{PX} \cong \overline{PX''}$ y por transitividad entre los segmentos congruentes, existe el rombo $\square XPX''C$. Por la definición de rotación,

$$[P(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [P(\beta + \alpha)] \quad \square$$

## 3.3. Reflexiones axiales

Esta clase de transformaciones, no son explícitamente definidas a partir de paralelogramos sino, a partir de reflexiones centrales, lo cual comporta la existencia de un paralelogramo

**Definición 8 (Reflexión axial).** *Sea $l$ una recta fija en $\Pi$, la reflexión axial $[l]$ sobre la recta $l$ (eje de la reflexión axial) se define:*

$$\begin{aligned} [l] :& \Pi \to \Pi \\ & X \mapsto [l](X) \end{aligned}$$

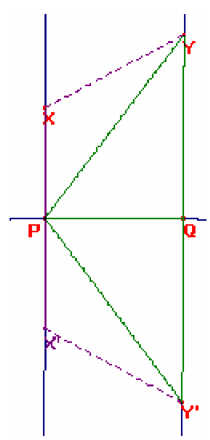
*Donde $[l](X)$ es la reflexión central $[P](X)$ siendo $P$ la intersección entre $l$ y la recta perpendicular a $l$ por $X$.*

La reflexión axial así definida, implica la existencia del paralelogramo $\square PXP[P](X)$.

**Teorema 17.** $[l] \in \mathbf{R}$.

*Demostración.* Sean $X, Y \in \Pi$ y $P$ y $Q$ los puntos de intersección entre $l$ y la perpendicular a $l$ por $X$, y la intersección de $l$ con la perpendicular a $l$ por $Y$, respectivamente.

De la definición de reflexión axial, existen los paralelogramos $\square PXPX'$ y $\square QYQY'$ donde $[P](X) = X'$ y $[Q](Y) = Y'$, lo que implica que $d(P, X') = d(P, X)$ y $d(Q, Y') = d(Q, Y)$ y por la manera en que se determinan los puntos $P$ y $Q$, las rectas $\overline{XX'}$ y $\overline{YY'}$ son perpendiculares a $l$ y por ende, paralelas. Demostraremos que $\triangle YXP \cong \triangle Y'X'P$.




Dado que $\overline{YQ} \cong \overline{Y'Q}$ y los ángulos $\angle YQP$ y $\angle Y'QP$ son rectos,

$$\triangle YPQ \cong \triangle Y'PQ$$

por lo tanto $\overline{YP} \cong \overline{Y'P}$ y $\angle YPQ \cong \angle Y'PQ$.
Por otro lado,

$$\overline{XP} \cong \overline{X'P}$$

y los ángulos $\angle YPX$ y $\angle X'PQ$ son rectos; como

$$\angle YPQ \cong \angle Y'PQ$$

entonces $\angle YPX \cong \angle Y'PX$. En consecuencia,

$$\triangle YPX \cong \triangle Y'PX'$$

y por ende, $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$.
Con lo que demostramos que $d(X,Y) = d(X',Y')$. $\square$

**Teorema 18.** $[l](X) = X$ *si y sólo si* $X \in l$.

*Demostración.* i) Si $X \in l$, es el mismo punto de intersección entre $l$ y su perpendicular $X$, por lo tanto,

$$[l](X) = [X](X) = X$$

por lo tanto $[l](X) = X$.

ii) Si para algún $X \in \Pi$ se cumple $[l](X) = X$ entonces existe un punto $P$ tal que es el punto de intersección entre $l$ y su perpendicular por $X$, luego $[P](X) = X$. Como $[P]$ tiene como único punto fijo a $P$, entonces $X = P$, por ende, $X \in l$. $\square$

**Teorema 19.** $[l] = [m]$ *si y sólo si* $l = m$.

*Demostración.* i) Si $l = m$, para cada punto $X$ del plano $\Pi$, $[l](X) = [m](X)$, por lo que $[l] = [m]$.

ii) Si $[l] = [m]$, entonces, para todo $X \in \Pi$, existen los paralelogramos $PXPX'$ y $QXQX'$, donde $P$ es el punto de intersección entre $l$ y la perpendicular a $l$ por $X$, y $Q$ es la intersección de $m$ con la perpendicular de $m$ por $X$. Esto quiere decir que para $X$, las reflexiones centrales

$$[P](X) = X' = [Q](X)$$

y por tanto, $P = Q$[1]. Con lo anterior, las rectas $m$ y $n$ son iguales.

Por i) y ii) se demuestra que $[l] = [m]$ si y solo si $l = m$. $\square$

**Teorema 20.** *Si* $l$ *y* $m$ *son rectas paralelas, entonces* $[m] \circ [l] = \overrightarrow{RP}$, *donde la dirección de* $P$ *a* $R$ *es la dirección de* $l$ *a* $m$ *sobre la perpendicular y a través de una distancia igual a* $2d(l,m)$.

[1] Teorema: $[P] = [Q]$ si y sólo si $P = Q$

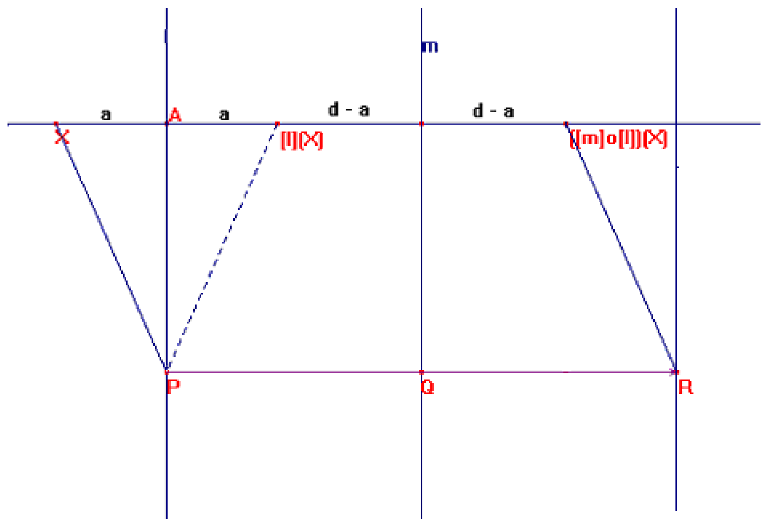



Figura 6: Composición de reflexiones axiales con ejes paralelos

*Demostración.* Sean los puntos $A$ y $B$ tales que son los puntos de intersección entre $l$ y la perpendicular de $l$ por $X$, y la intersección de $m$ con la perpendicular de $m$ por $X'$, respectivamente. Por el paralelismo entre $l$ y $m$, también $B$ es la intersección entre $m$ y la perpendicular a $m$ por $X$.

Para cada $X$ de $\Pi$, se tiene que los centros de las reflexiones centrales $[B]$ y $[A]$ dependen de $X$; la composición $([B] \circ [A])(X)$ es el punto $\overline{CA}(X)$, donde $C = [B](A)$.

Por la manera en que se determinan los centros de las reflexiones $[B]$ y $[A]$, y la forma en que se tomaron $R$ y $P$, tenemos que

$$\overleftrightarrow{X([B] \circ [A])(X)} \parallel \overleftrightarrow{PR}$$

Por otro lado, $\angle XPA \cong \angle [A](X)PA$ y $\angle [A](X)PA \cong \angle ([B] \circ [A])(X)RR_1$. Por consiguiente,

$$\angle XPA \cong \angle ([B] \circ [A])(X)RR_1$$

de donde

$$\overleftrightarrow{([m] \circ [l])(X)R} \parallel \overleftrightarrow{XP}$$

luego existe $\square XPR([B] \circ [A])(X)$ que por reordenamiento cíclico es

$$\square PR([B] \circ [A])(X)X$$

La translación determinada por los puntos $X$ y $([B] \circ [A])(X)$, donde $B$ y $A$ dependen de $X$, tiene el mismo efecto que la translación $\overleftrightarrow{PR}$, y ese conjunto de translaciones determinan la composición $[m] \circ [l]$, por lo tanto $[m] \circ [l] = \overleftrightarrow{PR}$.

Ahora,

$$d(X, X'') = d(X, X') + d(X', X'')$$

y por las propiedades de los paralelogramos que definen las reflexiones centrales,

$$\begin{aligned} d(X,X') + d(X',X'') =& 2d(A,X') + 2d(X',B) \\ =& 2(d(A,X') + d(X',B)) \end{aligned}$$

Como $A$, $X'$ y $B$ son colineales,

$$d(X,X'') = 2d(A,B)$$

Como $A$ y $B$ están sobre una perpendicular a las rectas $l$ y $m$, respectivamente,

$$d(X,X'') = 2d(l,m) \quad \square$$

**Teorema 21.** *Sea $\overline{BA}$ y una recta $l \perp \overleftrightarrow{AB}$, existe una recta $m$ tal que $l \parallel m$ y*

$$\overline{AB} = [m] \circ [l]$$

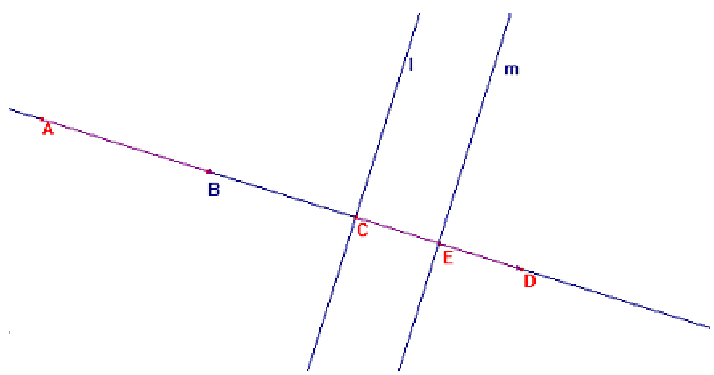



Figura 7: Translaciones como composición de reflexiones axiales(1)

*Demostración.* Sea $C$ el punto de intersección entre las rectas $l$ y $\overleftrightarrow{AB}$. Existe un punto $D \in \overleftrightarrow{AB}$, tal que $\overline{AB} = DC$ y $\square ABDC$.

Si llamamos $E$ al punto medio de $\overline{CD}$ y, sea $m$ la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ por $E$, entonces, por el teorema anterior, $DC = [m] \circ [l]$, luego, $\overline{AB} = [m] \circ [l]$ quedando demostrado el teorema. $\square$

**Teorema 22.** *Si $l \perp m$, entonces $[m] \circ [l] = [P]$, donde $P$ es el punto de intersección entre $m$ y $l$.*

*Demostración.* Sean los puntos $A$ y $B$ de intersección entre $l$ y la perpendicular de $l$ por $X$, y la intersección de $m$ con la perpendicular de $m$ por $X'$, respectivamente.

Para cada punto $X$ del plano $([m] \circ [l])(X) = ([B] \circ [A])(X)$; la composición entre las dos reflexiones centrales es igual a la translación determinada por los puntos $B'$ y $A$, donde $B$ es el punto medio de $\overline{B'A}$.

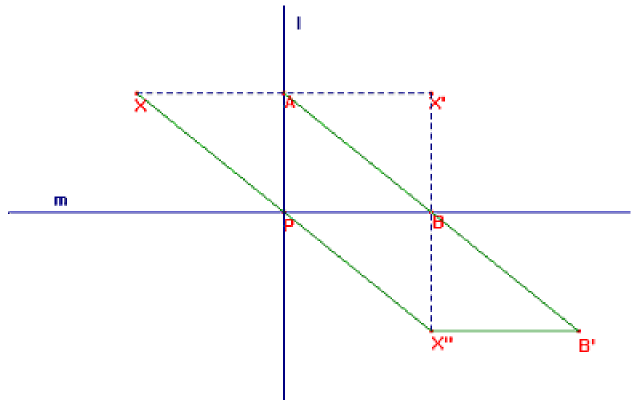



Figura 8: Reflexiones centrales como composición de reflexiones axiales

Vamos a demostrar que $\triangle XAP \cong \triangle B'X''B$.
Por la definición de $[B](X')$,

$$\overline{BX''} \cong \overline{X'B}, \quad \overline{BA} \cong \overline{B'B}$$

pues $B$ es punto medio de $\overline{B'A}$ y, $\angle X'BA \cong \angle X''BB'$, por criterio LAL

$$\triangle X'AB \cong \triangle X''B'B$$

de donde $\angle ABX' \cong \angle B'X''B$, lo cual implica que

$$\overline{X'X} \parallel \overline{X''P}$$

Por otro lado, $\overline{X'X} \parallel m$, $l \perp m$ y $\overrightarrow{X'X''} \parallel l$, luego $\overrightarrow{X'X} \perp \overleftrightarrow{X'X''}$, además $\overline{XA} \cong \overline{X'A}$ y $\overline{PA} \cong \overline{X'B}$ por tanto $\triangle XAP \cong \triangle AX'B$. Por transitividad, $\triangle XAP \cong \triangle B'X''B$. Por ende, los segmentos $\overline{XA}$ y $\overline{B'X'}$ son congruentes y paralelos, con lo que se puede deducir que existe el $\square XAB'X''$. Luego,
$\overline{AB'} \cong \overline{XX''}$, como $B$ es punto medio de $\overline{B'A}$ y $\overline{PB}$ es paralela a uno de los lados del paralelogramo, entonces $P$ es punto medio de $\overline{X''X}$.
Finalmente, hemos fijado un punto $P$ que no depende de $X$, tal que

$$[P](X) = X'' = ([B] \circ [A])(X) = ([m] \circ [l])(X) \quad \square$$

# Bibliografía

[1] BELL, E., *Historia de matemática*. Mac Graw Hill, 1995. p. 457.

[2] COXETER, H., *Geometric transformations group and other topics*. Mathematical association of America, En: CUPM geometry conference. 1968.

[3] EUCLIDES., *Los Elementos*.

[4] GARCÍA-VALCÁRCEL., 1996. p.193.

[5] GONZÁLEZ, J.; SÁNCHEZ, B., *Tutorial de Presentación acerca de algunas Aplicaciones de los Grupos Cociente*. Proyecto de Pregrado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, 2004.

[6] GUERRERO, C., *Los entornos virtuales de aprendizaje como instrumento de mediación*. Universidad de Salamanca.
http://www3.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_04/n4_art_suarez.htm.

[7] GUGGENHEIMER., *Heinrich Plane Geometry and its groups*. Holden day. 1967.

[8] IRIBARREN, I., *Matemáticas e Informática: una historia de influencias recíprocas.*
http://www.analitica.com/bitblioteca/iribarren/matematicas.asp

[9] JONASSEN, D., *Computadores como herramientas de la mente*. Eduteka.
http://www.eduteka.org/tema_mes.php3?TemaID=0012¿

[10] KATZ, V., *A history of mathematics*. Addison - Wesley, 1998. p. 673.

[11] MODENOV P.; PARKHOMENKO A., *Geometric transformations*. En: Euclidean and affine tranformations. Vol I. Academic press. 1965.

[12] MORENO, L., *Instrumentos matemáticos computacionales.*
http://www.eduteka. org/tema_mes.php3?TemaID=0003

[13] PASTOR, J.; GUTIERREZ, A., *El grupo de las isometrías del plano*. Síntesis.

[14] PASTOR, R., *Historia de la matemática*. Gedisa, 1986. p. 182.

[15] PÉREZ, E., *Estructuras Algebraicas*. Universidad Pedagógica Nacional. 2001.

[16] PÉREZ, E., *Manuscrito Aplicaciones de transformaciones rígidas.*

[17] POLEO, C.,
http://www.monografias.com/trabajos6/intert/intert2.shtml

[18] RIBNIKOV, K., *Historia de las matemáticas*. Moscú : Mir, 1987. p. 353.

[19] SALOMON, G.; PERKINS, D.; GLOBERSON. T., *Coparticipación en el conocimiento: al ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes*. 1992. p. 6-22. (Comunicación, lenguaje y educación, N° 13).

[20] YAGLOM, I., *Geometric Transformations*. Yale university. Panel. 1986.