Universidad de los Andes

Cinvestav

Departamento de Matemática Educativa

De Ptolomeo a las Nociones Trigonométricas en el Aula

Gerardo Cruz Márquez
DME, Cinvestav-IPN
México
gerardo.cruz@cinvestav.mx

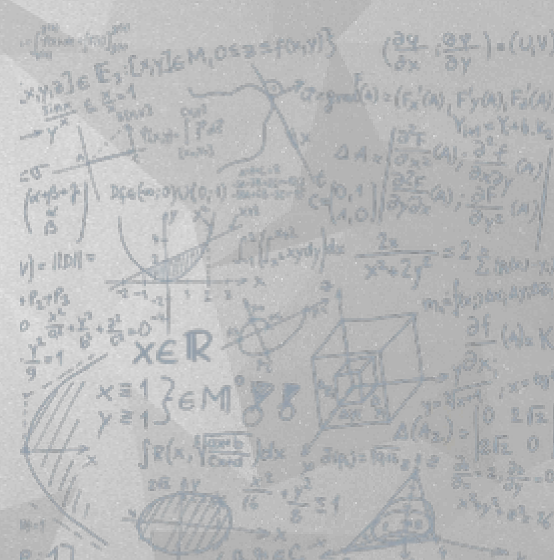
Índice

¿Qué observamos en la escuela?

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Bajos resultados de la clase de Matemáticas en la Educación Secundaria, Bachillerato y Educación Superior

Problemática en los bloques o cursos de Trigonometría



Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

¿Qué sabemos al respecto?

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Las NT en la escuela

Trigonometría Clásica			Trigonometría Analítica		
Razones Trigonométricas	Resolución de Triángulos	Plano Cartesiano	Círculo Unitario	Grados-Radianes	Funciones Trigonométricas

De Kee, Mura y Dionne (1996); Maldonado (2005); Jácome (2011); Montiel (2013); Scholz (2014)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Errores, dificultades y fenómenos reportados bajo este tratamiento

Inexplicable introducción del círculo unitario

- Brito y Barbosa (2004); Do Nascimento (2005)

Uso indistinto de las NT

- Maldonado (2005); Montiel y Jácome (2014); Montiel (2014)

La trigonometría se aplica en áreas donde se requieren medidas de precisión: por ejem-
plo, se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entr
puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
Fundamentales	Recíprocas
sen $x = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$	csc $x = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}}$
cos $x = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}}$	sec $x = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}}$
tan $x = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}}$	cot $x = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}}$

n la tabla se resumen las seis funciones trigonométricas para cualquiera de los ángulos
agudos de un triángulo rectángulo

Filloy, Rojano, Ojeda, Zubieta y Figueras en Montiel, 2014, p. 1774

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Errores, dificultades y fenómenos reportados bajo este tratamiento

desvinculados da variação dos ângulos. Talvez por isso o hábito de registrar, também observado por nós, por exemplo, um valor de seno de um ângulo a partir das medidas dos lados de um triângulo como:

$$sen = \frac{a}{b} \text{ ao invés de } sen\ \alpha = \frac{a}{b}$$

Brito y Barbosa, 2004, p. 67

Injustificable paso del grado al radián como unidad de medida

- Maldonado (2005); Díaz, Salgado y Díaz (2010)

No identificación del ángulo como variable

- Thompson (2008); Wongapiwatkul, Laosinchai y Panijpan (2011); Brito y Barbosa (2004)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

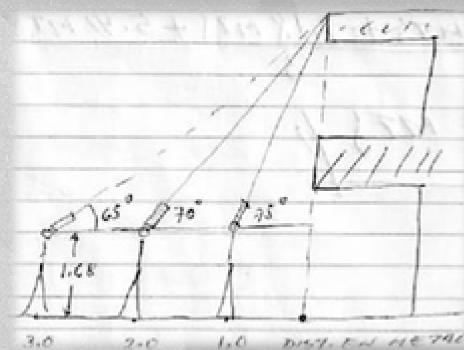
Errores, dificultades y fenómenos reportados bajo este tratamiento

Promoción de un significado lineal y aritmético respecto a las NT*

- Montiel y Jácome (2014)

NT como herramientas técnicas*

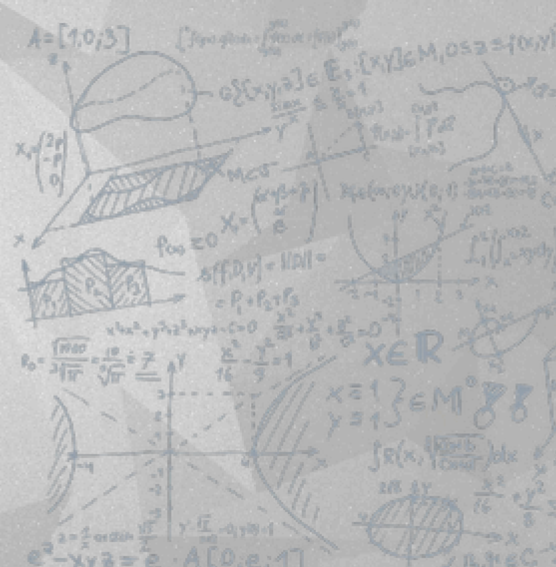
- Araya, Monge y Morales (2007); Mesa y Herbst (2011); Scholz (2014)



Jácome, 2011, p. 102

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Geometría y las NT

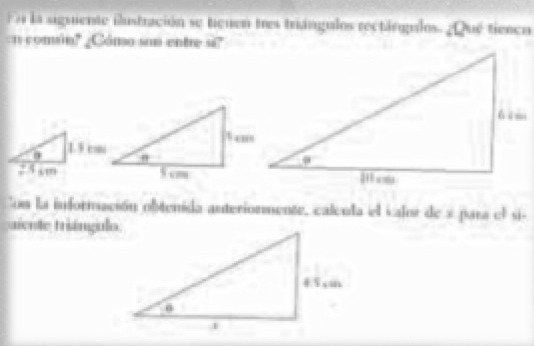


Reincorporación de la construcción geométrica al estudio de las NT*

- Patricio, García y Arrieta (2005); Navarro y Villalva (2009); Jácome (2011); Montiel (2007; 2014)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Geometría y las NT


En la siguiente ilustración se tienen tres triángulos rectángulos. ¿Qué tienen en común? ¿Cómo son entre sí?

Con la información obtenida anteriormente, calcula el valor de x para el siguiente triángulo.

Briseño, Carrasco, Martínez, Palmas, Struck y Verdugo en Montiel, 2014, p. 1776

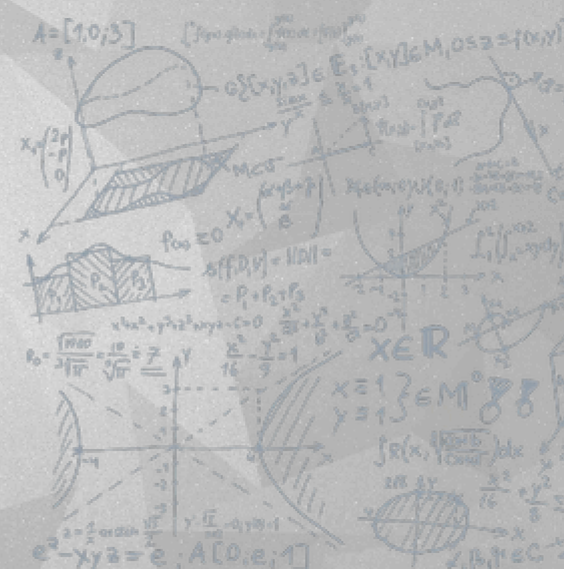
Las construcciones geométricas, así como su semejanza, constituyen condiciones iniciales

- Brito y Barbosa (2004); Díaz, Salgado y Díaz (2010); Mesa y Herbst (2011); Montiel (2014)

Geometría y las NT

La proporcionalidad queda abandonada al terminar el estudio geométrico

- Navarro y Villalva (2009)



Cinvestav
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

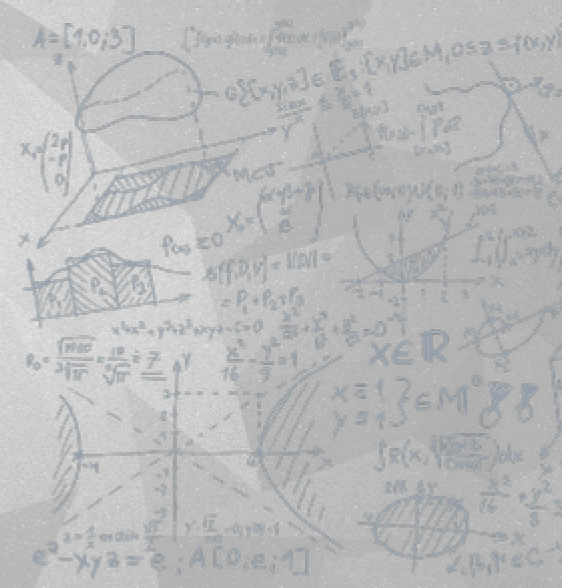
Nuevas Preguntas

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Cinvestav
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

¿Cómo integrar las nociones geométricas al estudio de las NT?

¿Qué nociones geométricas?



Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

¿Cómo responderlas?

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

La **Teoría Socioepistemológica** sostiene que el conocimiento matemático, en tanto producción social, **no fue diseñado para ser enseñado**.

Por tal motivo, en su introducción en el sistema educativo se producen discursos, llamados genéricamente **discurso Matemático Escolar** (dME).

- Cantoral (2013)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Algunas de las características de este **dME** son:

- Atomización en los conceptos
- Carácter hegemónico
- La matemática como un conocimiento acabado y continuo
- Carácter utilitario del conocimiento
- Falta de marcos de referencia

- Soto (2010)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Para rediseñar el dME vigente es necesario **problematizar la matemática**, con el afán de identificar aquellos *usos* y *significaciones* que le son propias al saber y que se han diluido, transformado o perdido en el trascurso de los años, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos.

- Montiel y Buendía (2012)

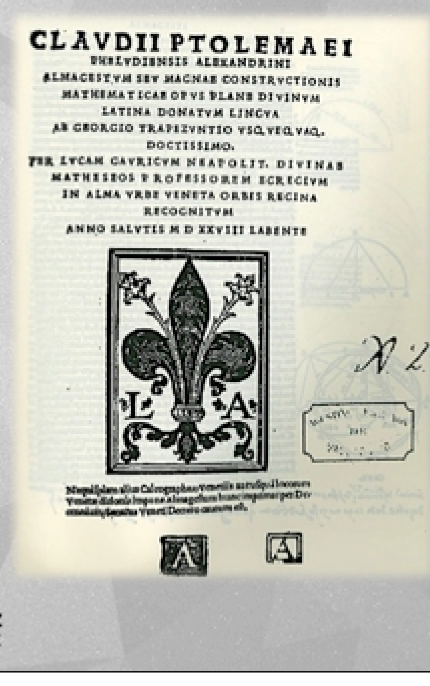
Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

¿Qué estudiamos y cómo lo hacemos?

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Qué estudiamos

Analizamos el **Almagesto**, obra escrita alrededor del S. II d.C. por el astrónomo, geógrafo y matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo, y que la literatura señala como la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría con la que contamos.


CLAVDII PTOLEMAEI
PHELVDIENSIS ALEXANDRINI
ALMAGESTVM SEV MAGNAE CONSTRVCTIONIS
MATHEMATICAE OPVS PLANE DIVINVM
LATINA DONATVM LINGVA
AB GEORGIO TRAPEZVNTIO VSQ. VEQ. VAQ.
DOCTISSIMO.
PER LVCAM GAVRICVM NEAPOLIT. DIVINAE
MATHESEOS PROFESSOREM EGREGIVM
IN ALMA VRBE VENETA ORBIS REGINA
RECOGNITVM
ANNO SALVTIS M D XXVIII LABENTE

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Cómo lo estudiamos

Para realizar el **análisis sociohistórico** de dicha obra nos fue necesario verla al menos desde tres perspectivas: como una **producción con historia**, como un **objeto de difusión** y como parte de una **expresión intelectual global**.

- Espinoza (2009)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Cómo lo estudiamos

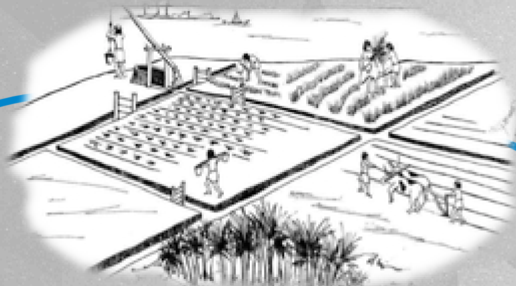
Por otro lado, para el **análisis del documento** se compuso un método tripartito cuyos niveles son: **micro**, análisis de la estructura de cada una de las proposiciones; **meso**, estudio de bloques de proposiciones que comparten un fin; y el nivel **macro**, en el cual se compone una reflexión general sobre la estructura y objetivo de la obra.

- Cruz-Márquez y Montiel (en prensa)

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Análisis Sociohistórico

Problemática:



Civilizaciones Mesopotámicas

- Registro de los fenómenos astronómicos

Civilización Egipcia

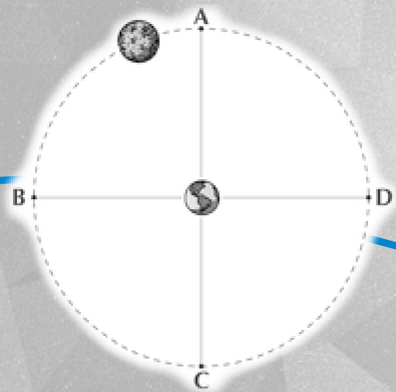
- Interés por la Astronomía y la Geometría

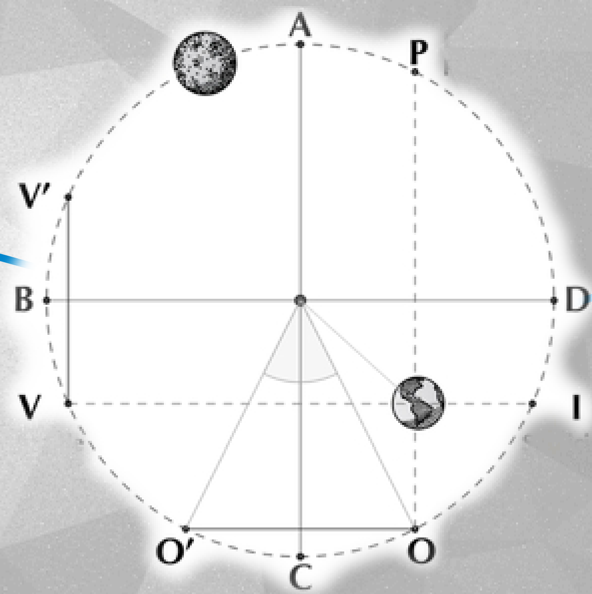
Análisis Sociohistórico

Civilización Griega

- Cosmovisión Aristotélica del Universo

Análisis Sociohistórico





Civilización Griega

- Problemática ángulo-cuerda

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Análisis Sociohistórico

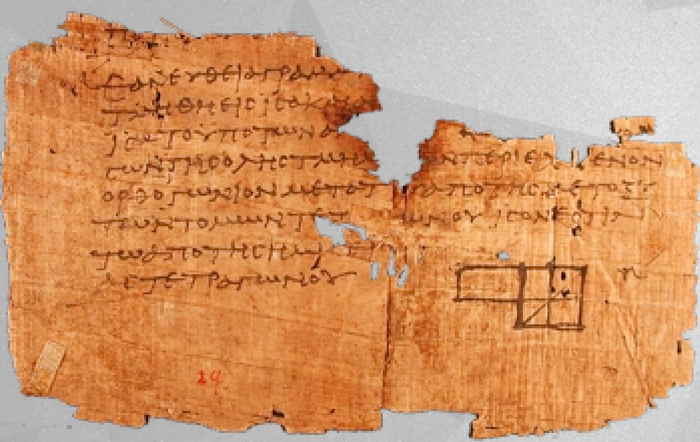
Herramientas:

Civilizaciones Mesopotámica

- Avances Numérico-Aritméticos de las Civilizaciones Mesopotámicas

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Análisis Sociohistórico



Civilización Griega

- Matemática Axiomática Deductiva Griega

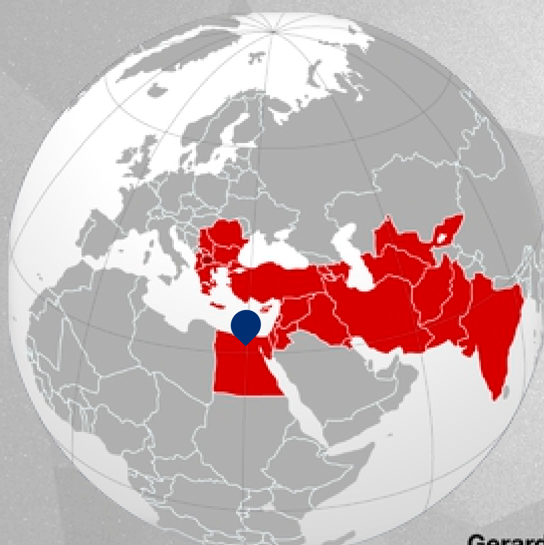
Análisis Sociohistórico

Civilización Griega

- Noción Cuantitativa del Ángulo

Análisis Sociohistórico

Contexto:



Civilización Griega

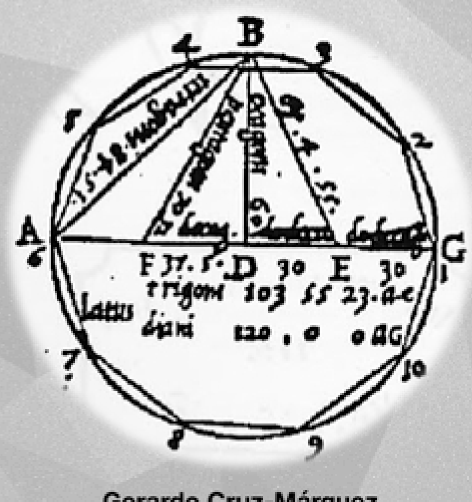
- Fundación de Alejandría, su Museo y su Biblioteca

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Análisis Documental

Identificamos tres momentos de trabajo en la obra de Ptolomeo:

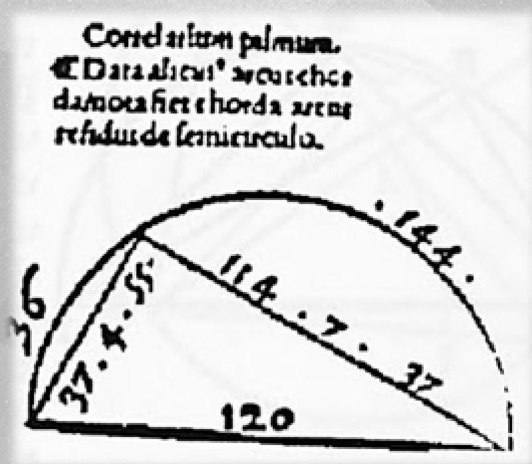
- Primeras cuerdas



Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

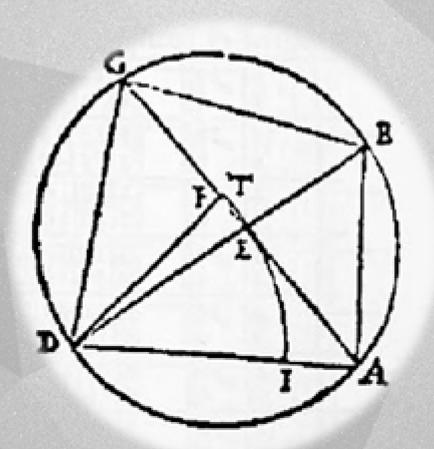
Análisis Documental

- Métodos Geométricos



Análisis Documental

- La cuerda subtensa por un ángulo central de 1°



Análisis Documental

A lo largo de estos tres momentos, las nociones geométricas son utilizadas por Ptolomeo con al menos tres propósitos: como **herramientas de construcción**, como **herramientas teóricas** y como **herramientas numérico-aritméticas**. A la sinergia de estos tres usos que Ptolomeo da a las nociones geométricas es lo en nuestro proyecto denominamos **Trabajo Geométrico (TG)**.

Hipótesis

La problematización llevada a cabo mediante el análisis de contenido referido, nos permitió formular como hipótesis de partida que **la Medición Indirecta de Distancias en el contexto del círculo permite, mediante el TG, confrontar el significado lineal y aritmético que el dME vigente asocia a las razones trigonométricas, así como su resignificación mediante el uso.**

Cinvestav DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

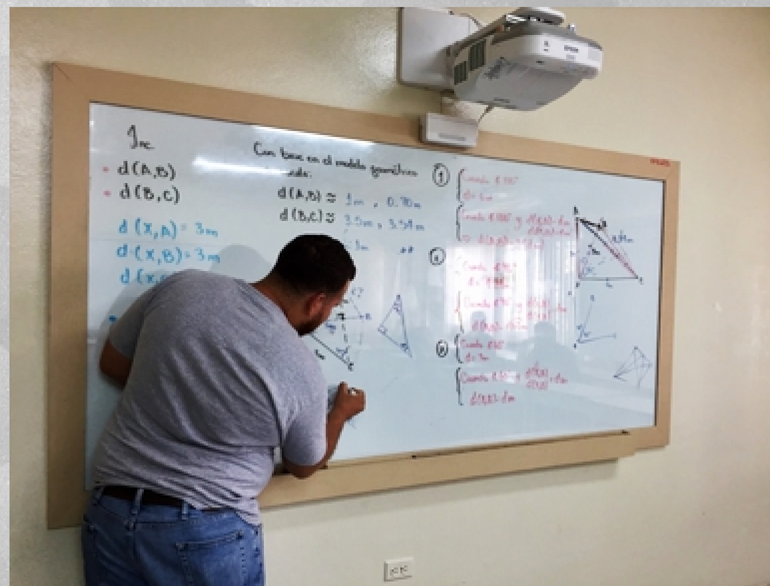
Una Experiencia de Aula

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Cinvestav DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Con el objetivo de validar esta hipótesis, planificamos una Visita Académica en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras. La misma se compuso de un taller llevado a cabo con ocho estudiantes del segundo año del Profesorado en Matemáticas que cursan el espacio pedagógico de Trigonometría y Geometría Analítica, y de dos reuniones con la docente a cargo de dicho espacio.

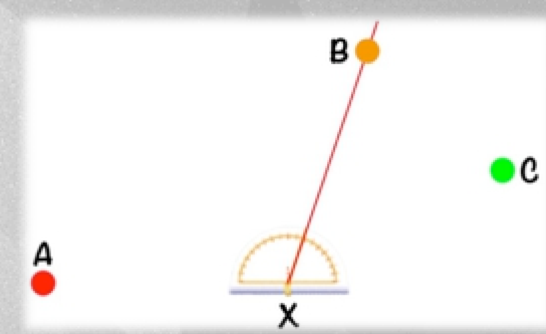
Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx



Situación Problema

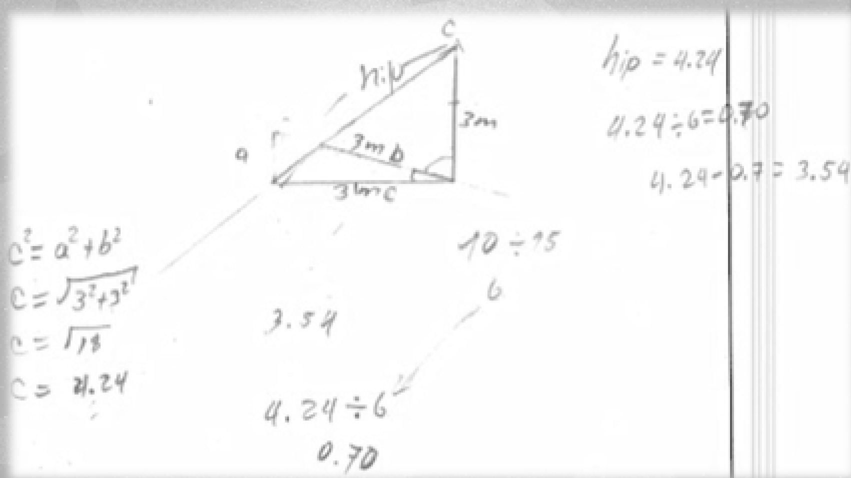
Trabajo Geométrico
- Casos Particulares
- Métodos Geométricos

Vuelta a la Situación Problema



Algunos resultados

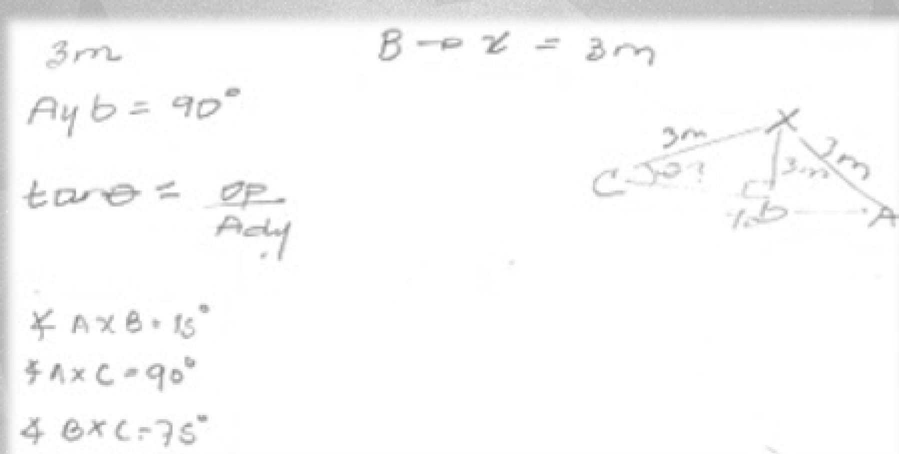
- Tratamiento lineal



A3 - Intenta dividir entre seis las longitud de la hipotenusa para resolver el problema

Algunos resultados

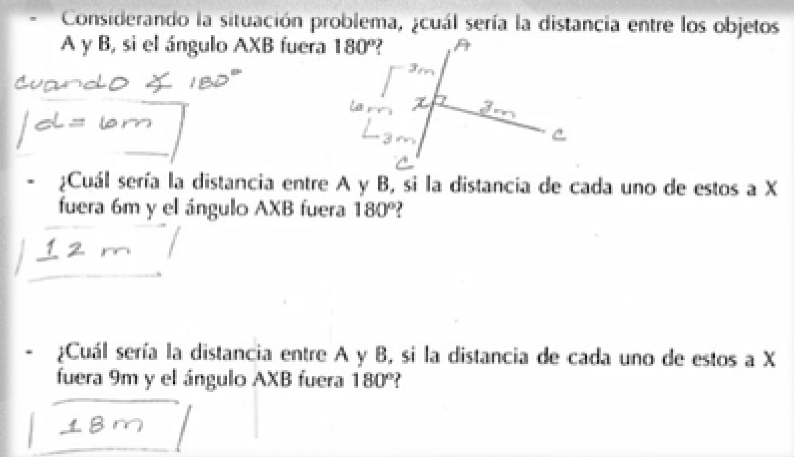
- Tratamiento aritmético



A6 - La falta explícita del triángulo rectángulo en el modelo le imposibilita continuar su estrategia

Algunos resultados

- Casos particulares



- Considerando la situación problema, ¿cuál sería la distancia entre los objetos A y B, si el ángulo AXB fuera 180º?

cuando ∡ 180°

$d = 6m$

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 6m y el ángulo AXB fuera 180º?

12 m

- ¿Cuál sería la distancia entre A y B, si la distancia de cada uno de estos a X fuera 9m y el ángulo AXB fuera 180º?

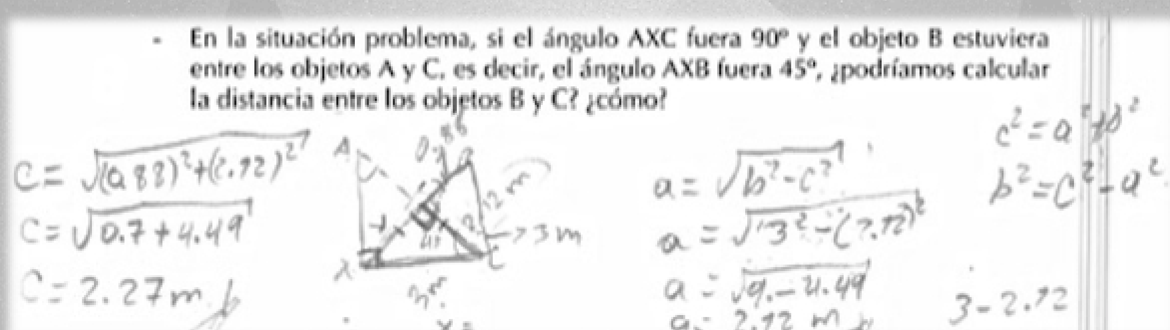
18 m

A6 – Atiende sin problema las relaciones particulares ángulo-cuerda

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Algunos resultados

- Métodos Geométricos



- En la situación problema, si el ángulo AXC fuera 90º y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera 45º, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

$C = \sqrt{(0.88)^2 + (2.12)^2}$

$C = \sqrt{0.7 + 4.49}$

$C = 2.27m$

$a = \sqrt{b^2 - c^2}$

$a = \sqrt{3^2 - (2.12)^2}$

$a = \sqrt{9 - 4.49}$

$a = 2.12\ m$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b^2 = c^2 - a^2$

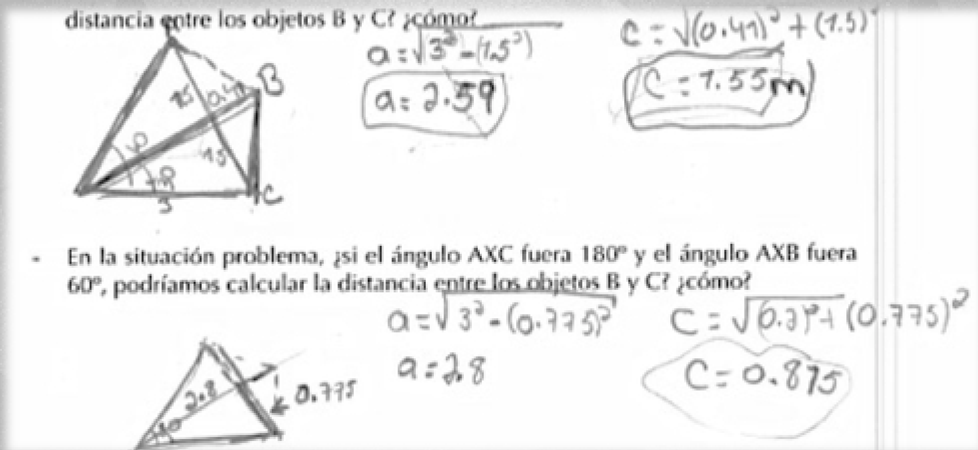
$3 - 2.12$

A3 – Construye y utiliza un método geométrico para calcular la cuerda subtensa por la mitad de un ángulo central conocido

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Algunos resultados

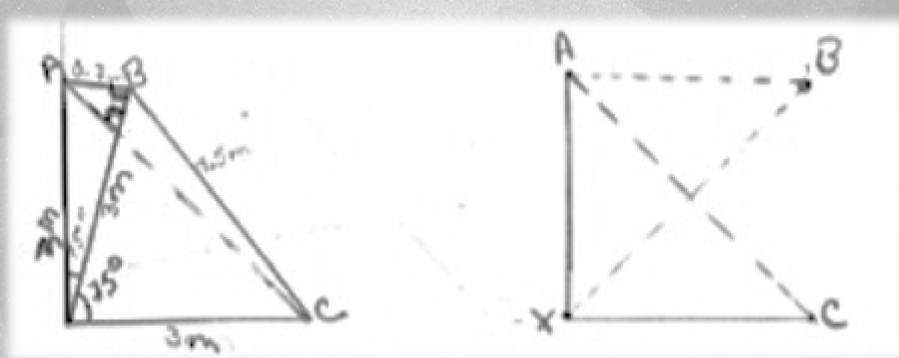
- Vuelta a la Situación Problema



A4 – Aplica el método construido y resuelve parcialmente la situación problema

Algunos resultados

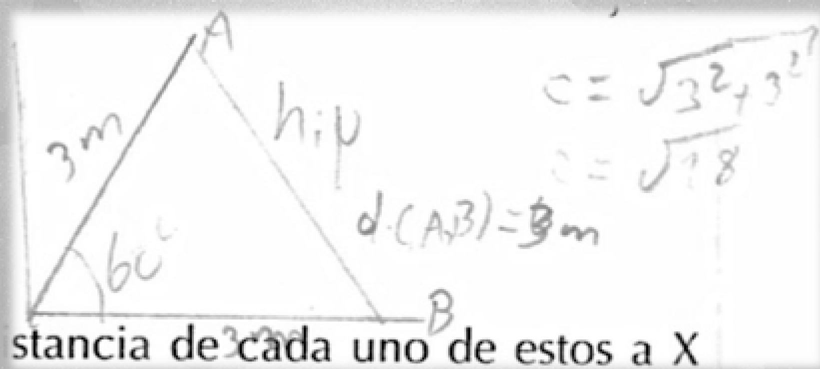
- Adhesión al uso del triángulo rectángulo



A4 – Intenta introducir en su modelo a escala el triángulo rectángulo

Algunos resultados

- Irregularidades en su uso



A4 – Intenta calcular mediante el Teorema de Pitágoras el lado faltante de un triángulo

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Qué sabemos ahora

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

- La problematización y la visita académica llevada a cabo nos permitió, en primera instancia, tener evidencia de que la **Medición Indirecta de Distancias en el contexto del círculo** constituye un espacio propicio para **confrontar el significado lineal y aritmético asociado a las razones trigonométricas**, así como para promover su **resignificación mediante el uso**.

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

- Además, hizo patente la importancia de incorporar nociones como el **círculo**, el **triángulo**, la **proporcionalidad** y sus relaciones para, mediante **procesos de construcción** y **argumentación geométrica**, comenzar a significar las relaciones no proporcionales que se establecen entre un ángulo y las longitudes que subtiende.

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Bibliografía

Andréu, J. (1998). Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada. [Documento en línea]. Recuperado de http://anthropostudio.com/wp-content/uploads/2014/07/Andr%C3%A9u-J.-2000.-Las-t%C3%A9cnicas-de-an%C3%A1lisis-de-contenido-una-revisi%C3%B3n-actualizada..pdf.

Araya, A.; Monge, A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de compresión, indicadores y tareas para su análisis. Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 7(2), 1-31.

Brito, A. y Barbosa, B. (2004) Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. Horizontes, Bragança Paulista. 22(1), 65-70.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona: Gedisa.

Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (en prensa). Preliminares trigonométricos en el Almagesto. Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1(2).

De Kee, S.; Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. For the Learning of Mathematics, 16(2), 19-22.

Bibliografía

Díaz, M.; Salgado, G. y Díaz, V. (2010). La transición: grados→ radianes→ reales. Un obstáculo didáctico. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74, 29-37.

Espinoza, L. (2009). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemologico. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Jácome, G. (2011). Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Maldonado, E. (2005). Un análisis didáctico de la función trigonométrica. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav–IPN, México.

Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. ZDM, 43(1), 41-52.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Bibliografía

Montiel, G. (2007). Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría. En Cecilia Rita Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 590-595). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (p. 1771-1779). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones, 61-88.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. Boletim de Educação Matemática, 28(50), 1193-1216.

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx

Bibliografía

Navarro, P. y Villalva, M. (2009). Un estudio sobre la desarticulación entre la semejanza y la trigonometría en el bachillerato. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22, (p. 287-296). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Patricio, H.; García, C. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas de hacer semejanzas en los triángulos y la emergencia de las razones trigonométricas. En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 619-624). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Scholz, O. (2014). Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Soto, D. (2010). El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Wongapiwatkul, P.; Laosinchai, P. y Panijpan, B. (2011). Enhancing conceptual understanding of trigonometry using Earth geometry and the great circle. Australian Senior Mathematics Journal, 25(1), 54-63.

Gerardo Cruz-Márquez
gerardo.cruz@cinvestav.mx