LA ARTIMÉTICA SEGÚN GOTTLOB FREGE. UN EJEMPLO DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

Jesús Hernando Pérez
Universidad Sergio Arboleda.

La aritmética es una ciencia cotidiana,
capaz de atraer a cualquier persona
que posea sólo un poco de curiosidad.
Enzo Gentile.

1 Introducción.

Quienes por diversos motivos, y en diversas formas, nos hemos dedicado al mundo académico de las matemáticas, tenemos un imperativo moral: desarrollar y fortalecer la cultura matemática a nivel mundial, nacional, regional y local. La matemática, como toda disciplina académica, es una actividad global, que no tiene ningún tipo de frontera geográfica, social o político-religiosa; sin embargo, es desarrollada por personas, cada una de las cuales trabaja en diferentes contextos particulares. En cada uno de estos contextos, es indispensable difundir y expandir el conocimiento que poseemos, el matemático, y actuar como lo que somos: miembros de la comunidad académica de los matemáticos.

La cultura matemática tiene varias componentes. Las tres fundamentales son: Las personas que cultivan la matemática de formas diferentes, desde el simple aprecio o afición, pasando por su divulgación y enseñanza, hasta la investigación; el conocimiento matemático que se encuentra en revistas, libros, medios magnéticos y en el cerebro de quienes la cultivan; y la multitud de instituciones, organizaciones y actividades que los académicos han organizado, o realizan, para el desarrollo y consolidación de este extraordinario e importante mundo intelectual. Desarrollar y ampliar la cultura matemática significa, entonces, aumentar el número de personas que respetan, aprecian, o practican la matemática; ampliar y mejorar los medios para su difusión y lograr que las instituciones y organizaciones funcionen lo mejor posible.

La intención del presente trabajo es la de llamar la atención acerca de un punto fundamental en el proceso de formación de docentes en matemáticas. Me parece que erróneamente se ha venido planteando una disyuntiva que no tiene fundamento alguno: los docentes de matemáticas no son matemáticos o no deben ser matemáticos. Esta falsa disyuntiva tiene como origen un mal entendido que vale la pena elucidar y aclarar. Si se continúa formulando esta disyuntiva, no estaremos contribuyendo en nada al desarrollo y fortalecimiento de la cultura matemática. Debemos señalar, por el contrario, que todo docente de matemáticas debe ser, primero y antes que nada, matemático, es decir, creador de conocimiento matemático, no necesariamente inédito. Naturalmente, la pregunta que sigue es ¿pero qué clase de matemático? Es aquí donde aparece la confusión, porque la matemática se desarrolla y realiza en niveles; hay básicamente tres niveles: elemental, superior y avanzado, cada uno correspondiente a los niveles respectivos en los cuales está organizado el servicio educativo. Naturalmente, dentro de cada nivel hay subniveles.

La tesis que se desarrollará en este escrito es la siguiente:

Todo docente de matemáticas debe ser un matemático, al menos a nivel elemental.

Nos enfrentamos entonces a la siguiente pregunta:

¿Existen las matemáticas elementales? O equivalentemente:

¿Existe el álgebra elemental?
¿Existe la aritmética elemental?
¿Existe la lógica elemental?
¿Existe la geometría elemental?

Si la respuesta a todos estos interrogantes fuera afirmativa existirían, entonces, matemáticos elementales, algebristas elementales, lógicos elementales, geómetras elementales, topólogos elementales y así sucesivamente.

¿Y dónde se formarían estos profesionales? A mi no me cabe la menor duda: en los programas de licenciatura.

Una analogía con el mundo de la música puede ayudar. Allí, sin ningún tipo de confusiones, existe la música popular, la música semi-popular y la llamada música clásica; y en cada nivel, existen compositores, virtuosos, críticos, melómanos y muchas otras personas que logran que la música evolucione y se desarrolle. Y lo más importante: allí no hay distingos ni de edad, ni de raza, ni de género, ni ningún otro tipo de restricción; es realmente espectacular, los niños pueden formar orquestas, participar en conciertos, componer, ganar concursos, etc. Los niños cantores de Viena son un ejemplo extraordinario. ¿Por qué no hay los niños matemáticos de Viena? ¿Es imposible? Lo que parece imposible es que un niño logre formular un teorema en la teoría de la clasificación de Saharon Shelah; pero, está comprobado que pueden hacerlo en aritmética elemental.

Los matemáticos utilizan, aunque muy informalmente, estas tres palabras: elemental, superior, avanzado.

Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Felix Klein, uno de los más grandes educadores matemáticos alemanes, por supuesto matemático, bautiza una de sus obras más populares así:

   Matemática elemental desde un punto de vista superior.

2. Paul Alexandroff, uno de los creadores de la topología, educador el mismo, publicó un folleto para la enseñanza de esta disciplina titulado:

   Conceptos elementales de topología

   Este folleto lo utilizan los educadores de nivel básico y medio, en la antigua Unión Soviética, para enseñar este tópico en sus escuelas y colegios.

3. El profesor David M. Burton publicó, hace ya un buen número de años, el libro: "Teoría elemental de números "Este libro lo utilizan muchos educadores en los Estados Unidos.

4. El profesor Heinrich Dörrie, escribió y publicó el siguiente libro:

   Cien grandes problemas de las matemáticas elementales

5. Un libro de naturaleza histórica, se llama:

   Las raíces históricas de las matemáticas elementales

   Los autores son Lucas Bunt, Phillip Jone y Jack Bedient.

6. El ejemplo del profesor Jerome Keisler es bastante paradigmático. Keisler es uno de los especialistas mundiales en matemática no estándar. Escribió un libro cuyo nombre es Cálculo Elemental y en el cual desarrolla este tema utilizando las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. El mensaje fundamental de este matemático es que lo elemental no son las disciplinas, sino que, cada disciplina matemática tiene su componente elemental.

7. El profesor Francisco Caicedo, primer doctor en matemáticas de la Universidad Nacional, ha escrito un libro cuyo nombre es "Cálculo Avanzado "

Hay pues niveles en las disciplinas y teorías matemáticas.
Pero, ¿cómo definir con exactitud lo que es cada nivel?
La palabra elemental, por ejemplo, se utiliza de diferentes formas:

1. Peyorativamente. Cuando Sherlock Holmes le dice al doctor Watson "Elemental mi querido Watson "no está diciendo que el asunto es elemental sino que, el doctor Watson es bastante estúpido como para no entender la situación.

   Infortunadamente, este uso peyorativo es muy difundido entre los matemáticos avanzados y superiores, particularmente entre aquellos que tienen títulos académicos pero cuyo título no corresponde con lo que verdaderamente son. Esto es muy análogo al uso de palabras como "obvio "o "trivial ". Las personas que más utilizan estas palabras son las que menos entienden.

   Es de lamentar, también, que muchos matemáticos elementales no se reconozcan como tales en razón a este uso peyorativo de la palabra.

2. El uso euclideano-bourbakiano. La obra de Euclides, la más popular, es conocida con el nombre de "Elementos de Geometría ", la del grupo Bourbaki se llama "Elementos de Matemática ". Aquí la palabra "elementos "se refiere, aproximadamente, a fundamentos; se trataría entonces de formular en uno o más textos los principios fundamentales de una disciplina, mostrar cómo se pueden desarrollar lógicamente estos principios y presentar la demostración de los teoremas más importantes de la disciplina en cuestión. Claramente, este no sería el

uso que estamos proponiendo; basta mirar la obra de Bourbaki y examinar, pongamos por caso, el libro sobre integración. De otra parte, podíamos pensar en obras del tipo "Elementos de Geometría Elemental "en la cual las dos palabras tendrían significado diferente.

3. Elemental en el sentido de fácil o superficial. Este sentido tampoco sería aplicable a los trabajos de muchos matemáticos que aunque elementales, son extraordinariamente profundos. El ejemplo que veremos en este escrito es bien paradigmático: Gottlob Frege, con sus escritos más elementales, transformó radicalmente la lógica y la filosofía.

4. El uso del profesor I. Yaglom. Muchos matemáticos soviéticos han reflexionado muy seriamente sobre el tema y han generado una buena cantidad de literatura. El profesor Pogorelov, por ejemplo, escribió un excelente libro titulado "Geometría elemental "; N.V. Efimov, por su parte, escribió el libro "Geometría Superior ". Al compararlos queda claro lo siguiente: la geometría elemental es la euclideana y la superior es la que va de Hilbert a los inicios de la geometría diferencial, donde se abordan las geometrías no euclideanas en sus fundamentos.

El profesor I. Yaglom, en un artículo escrito para participar en un encuentro de celebración en homenaje al profesor Coxeter -otro de los más grandes matemáticos elementales- planteó la siguiente definición:

Geometría elemental es aquella que se puede trabajar y desarrollar en las escuelas y colegios.

Yaglom dice, en el mencionado artículo, que no es posible ofrecer una definición teórica rigurosa, cualquier intento está condenado al fracaso. Ofrece, entonces, una definición experimental. Esto es muy interesante porque estaríamos abocados a realizar experimentos, y así las disciplinas matemáticas elementales serían entonces experimentales. Obsérvese que Yaglom no dice que elemental es lo que se puede enseñar en las escuelas y colegios, tampoco dice que es la matemática de las escuelas y colegios, lo que dice, taxativamente, es que lo elemental es aquello que se puede trabajar y desarrollar en las escuelas y colegios. Pongamos por caso la fórmula de Euler sobre las triangulaciones de una esfera o de una superficie compacta, ¿es un teorema elemental? La respuesta ya no se puede dar especulando o mirando el currículo sino experimentando.

Mencionemos de paso que el artículo al cual estamos haciendo referencia se llama:

Geometría Elemental, ayer y hoy.

Como quien dice, la Geometría Elemental está vivita y coleando. De hecho, el profesor Yaglom pregunta, ¿quiénes deben desarrollar la Geometría Elemental? El mismo responde según su experiencia: los niños, los jóvenes y los docentes de las escuelas y colegios. Por supuesto, con el grafito "los profesores de matemáticas no deben ser matemáticos ", en Colombia jamás lograremos hacer avanzar ni un milímetro la Geometría Elemental o las demás disciplinas de la Matemática Elemental.

Hay un excelente camino para llegar a la Matemática Elemental: los clásicos, personas y teorías. A continuación presentaremos uno de los grandes clásicos de la matemática: Gottlob Frege.

2 Datos biográficos de Frege.

Frege nació el 8 de noviembre de 1848 en Wismar, sobre el mar báltico. Sus padres fueron profesores y directores de una escuela de niños y mujeres adolescentes. Se crió, pues, en un ambiente de estudio y de actividad académica, lo que le permitió, desde muy temprana edad el desarrollo de su talento.

Inició sus estudios universitarios en 1871 en la Universidad de Gotinga, donde siguió cursos de física, matemática, filosofía y religión. Recibió el doctorado, en esta Universidad, con una disertación sobre "Una representación geométrica de las formas imaginarias en el plano ".

En 1874 se vinculó a la Universidad de Jena.

En 1879 publica su obra fundamental "Conceptografía", en la cual se introduce un sistema simbólico para la lógica de primer orden y la desarrolla axiomáticamente. Infortunadamente, este primer sistema de representación no fue muy afortunado y fue superado por el de Peano; sin embargo, varios de los símbolos que utilizó Frege se emplean todavía; por ejemplo, el símbolo ? que hoy en día indica deducción formal. La conceptografía fregeana fue uno de los principales obstáculos en la difusión del pensamiento de este gran innovador.

En 1884 publica "Los fundamentos de la Aritmética", obra de carácter elemental, la cual será motivo de estudio en este trabajo, y que todo profesor de matemáticas debería leer una y otra vez como si se tratara de un clásico de la música, tipo la 9ª sinfonía de Bethoven.

En 1872 publica los trabajos “Sobre concepto y objeto” y “Sobre sentido y referencia”, obras que le valieron el reconocimiento como experto en epistemología dentro del ámbito de la filosofía. Como se verá más adelante, la palabra concepto, tan manipulada por todo el mundo, incluyendo académicos importantes, la utiliza Frege en un sentido nuevo y que se convertirá en la forma matemática de manejar dicha palabra.

El primer volumen de las “Las leyes fundamentales de la Aritmética ”aparecerá en 1893 y el segundo en 1903.

Muere el 26 de julio de 1925, después de una larga actividad académica, aunque un poco decepcionado de la misma, pues Bertrand Rusell descubrió un tremendo error en uno de los principios básicos de su lógica, también numerado el quinto, como el número del famoso postulado de Euclides sobre las paralelas. Así como el quinto postulado dio origen a las geometrías no euclideanas, el mejoramiento del quinto postulado fregeano dio origen a la moderna teoría de conjuntos. Esta misma debilidad señalada por Rusell era aplicable a la Teoría de Cantor. Así que podemos decir algo crucial: las teorías de Frege y Cantor son contradictorias pero, es posible trabajar con ellas y obtener muy buenos resultados.

3 Fundamentos de la Aritmética.

En la introducción de esta joya de la literatura matemática, Frege plantea el problema que trabajará en la siguiente forma: “A la pregunta de qué es el número uno, o qué denota el número 1, se puede responder: pues una cosa. Y si se hace notar entonces que el enunciado

“el número uno es una cosa ”

no es una definición, porque a un lado se halla el artículo determinado y al otro, el indeterminado, y que tal enunciado sólo expresa que el número uno pertenece a las cosas, pero no nos dice que cosa es, entonces quizá quien nos ha formulado la pregunta nos invitará a que escojamos una cosa cualquiera, a la que decidimos llamar uno. Pero si todos tuvieran derecho a entender bajo este nombre lo que quieran, resultaría que el enunciado anterior sobre el uno se referiría a cosas distintas para distintas personas, no habría ningún contenido común a tales enunciados”.

Desde el puro comienzo Frege plantea claramente su método que será el mismo de Rusell y de todos aquellos que construyeron la corriente logicista en filosofía y en matemáticas: el análisis lógico; en las oraciones del lenguaje común, las palabras desempeñan funciones diferentes; por ejemplo, "es "funciona como igualdad en muchos contextos pero como pertenencia en otros; cuando funciona como igualdad contribuye a establecer una definición pero, este no es el caso en el segundo tipo de funcionamiento.

Aunque el libro está organizado en cinco capítulos, en esta exposición dividiremos la obra en tres partes:

- Diferentes concepciones sobre el números antes del autor.
- La definición de número según el autor.
- La formulación del programa de reducción a la lógica de los otros conceptos de número (entero, racional, real, complejo)

En la primera parte, Frege explica lo que los números no son.

Recoge entonces formulaciones anteriores y les hace un análisis lógico riguroso; consideremos el ejemplo de John S. Mill.

"Que, sin embargo, tenemos conciencia de ellos como cosas, y no como meros signos, se hace evidente a partir del hecho de que todo nuestro proceso de razonamiento se lleva a cabo predicando de ellos propiedades de cosas. Al resolver una ecuación algebraica ¿qué reglas seguimos? Pues aplicando en cada paso a "a ", "b "y "x "la proposición que dice que cosas iguales añadidas a cosas iguales hacen cosas iguales, y que cosas iguales sustraídas de cosas iguales dejan cosas iguales, así como otras propiedades fundamentadas en estas dos."

Desde la misma introducción, Frege refuta esta manera de entender solicitando que se muestre la cosa que nombra un determinado número. Adicionalmente, no se puede confundir el uso metafórico de las palabras con su uso descriptivo, Mill hubiera expresado mejor sus ideas si hubiera diferenciado estos dos unos. "Cosa "es una palabra que tiene como referencia objetos físicos que luego se vuelve una palabra que puede denotar cualquier tipo de entidad, como cuando se dice, refiriéndose a una situación extraña "que cosa más rara ".

El argumento siguiente de Frege, en contra de la idea de número como objeto físico o como propiedades de los objetos físicos reza como sigue: los objetos físicos tienen propiedades de naturaleza muy diversa como el color, el tamaño, la forma, la contextura, la cantidad de moléculas, etc. La mayoría de estas propiedades están bien definidas, no así lo numérico. Cada objeto físico o agregado de objetos físicos muestra diferentes números: número de caras, de lados, de vértices, de moléculas, de átomos, de componentes, etc. No hay una cosa que se muestre únicamente como dos o como uno o como tres.

Si cada número fuera la propiedad de un objeto físico o de alguna entidad física, ¿cómo explicar que dichos números se apliquen también a colecciones abstractas?

"Los tres pensamientos básicos de John Mill "sería, entonces, una expresión carente de sentido.

El tres no es la propiedad característica de tres sillas, pues el tres se aplica también a tres mesas, tres animales, tres filósofos, tres matemáticos, tres ideas, etc.

Cada número, ¿es entonces una imagen mental?

"Número ", ¿es una idea, una intuición, una imagen mental?

Dice Frege:

"Si el número fuera una imagen, la Aritmética sería Sicología. Y lo es tanto como la Astronomía. Así como esta no se ocupa de imágenes de los planetas, sino de los planetas mismos, tampoco el objeto de la Aritmética es una imagen. Si el dos fuera una imagen, esta sería ante todo solamente mía. La imagen que tiene otro es ya, en cuanto tal, otra imagen. Entonces tendríamos quizá muchos millones de doses ".

El siguiente argumento lo introdujo Pitágoras y fue utilizado por Pitágoras en su libro "El arenario. "

Hay números que no se refieren a ninguna cosa y tampoco son imaginables:

Si llamamos W al número de granos de arena en el universo (hoy podríamos decir, el número de partículas elementales en el universo), el número

$$\Omega + 8\Omega^2 + \Omega,$$

es mucho mayor que Ω, no se corresponde con ninguna cosa o colección de cosas y escapa a la imaginación, tan sólo sabemos que existe porque podemos nombrarlo. Considérese el número

$$\Omega^{\Omega^{\cdots\Omega}},$$

¿Qué son entonces los números?

Según Frege, los números no son objetos físicos, ni colecciones de objetos físicos; tampoco son imágenes o ideas, ni colecciones de ningún tipo. Tampoco “aquellos que es común a una clase de colecciones”, que era la definición de Cantor. Tampoco es la totalidad de los usos que se dan a cada uno de ellos, pues tales usos no están determinados.

La respuesta de Frege es

Un número es un concepto.

Frege dedica, entonces, la segunda parte del libro en cuestión a explicar su definición de concepto y su definición de número.

Un concepto es una función proposicional. Esta frase tiene la misma estructura ambigua que la frase inicial: un número es una cosa.

La diferencia cualitativa, ahora, es que Frege utiliza nociones muy bien definidas: función de una parte y función proposicional de la otra, y para cada número escribe la función proposicional que le corresponde.

El concepto “altura” es en realidad la función proposicional “x es alto”, la cual posee un dominio H (las personas) y un codominio $\{V, F\}$, el de los valores de verdad (V) verdadero y (F) falso.

Esta idea de función proposicional, utilizada muy informalmente por Frege, es uno de los elementos fundamentales de la lógica moderna, la cual ha logrado formular de manera totalmente rigurosa las ideas básicas de Frege, que como Rusell lo demostró, eran inconsistentes.

Pero, sigamos con nuestro autor.

Las funciones proposicionales pueden tener más de un argumento

$$\begin{gathered} H \times H \longrightarrow \{V, F\} \\ x \text{ es hijo de } y \end{gathered}$$

Cada variable está asociada a un “tipo” y existe, también, el tipo proposicional. En los ejemplos que hemos presentado, el tipo es “ser humano”, que en realidad es la función proposicional “x es un ser humano”

Aquí se ven ya las debilidades y las fortalezas del planteamiento de Frege:

1. Primera fortaleza es que intenta trabajar únicamente con entidades lógicas: proposiciones, conectivos y cuantificadores. Esta formulación la mantienen todos los logicistas contemporáneos: las entidades matemáticas son todas entidades lógicas; esencialmente proposiciones en un cierto lenguaje formal.

2. Frege se dio cuenta que se necesita trabajar en un lenguaje formal y no en un lenguaje común; por eso, se dedicó a la conceptografía.

3. Sin embargo, en la obra que estamos colocando como ejemplo de matemá tica elemental, Frege no introduce ningún tipo de formalismo y se dedica a desarrollar sus puntos de vista utilizando únicamente el lenguaje común. Sus ejemplos son entonces en el lenguaje común.

4. Al trabajar en el lenguaje común no se da cuenta de su principal debilidad: si las proposiciones son funciones proposicionales y $\varphi(x)$ es una de ellas, ¿se puede aplicar φ a ella misma? En otras palabras, ¿tiene sentido $\varphi(\varphi)$? Y al hacerlo en su criptografía, las complicaciones de la misma le impiden ver este detalle.

5. Sin embargo, Frege era muy consciente de otro hecho fundamental: el lenguaje común es vehículo para el sinsentido; por eso, utilizó dos palabras fundamentales, "sentido" y "referencia". Sin embargo su reflexión no enfocó bien el tema y pasó por alto el siguiente hecho:

   Las funciones proposicionales deben tener un sentido que no es único; así, "x es alto" puede verse como función proposicional entre personas, también entre edificios pero, claramente no entre serpientes, o números; "2 es alto" es un sinsentido. Sin embargo, este es el origen de la expresión "fórmula bien formada" que se utilizará posteriormente en lógica.

Estas pequeñas reflexiones señalan muy bien la importancia de Frege, así que vale la pena continuar con la presentación de su definición de número, que aunque ya no se utiliza modernamente, abrió las puertas al logicismo que está vivito y coleando.

Hay pues que analizar paso a paso los conceptos hasta llegar a los básicos, que serían los indefinidos.

Así, el concepto "relaciones biyectivas", según nuestro autor, sería la función proposicional

$\varphi(\varphi, a, b, c, d, e, f) = \Psi(\varphi, a, b, c)$ y $\eta(\varphi, d, e, f)$, donde

$\Psi(\varphi, a, b, c) \equiv$ Si $\varphi(a, b)$ y $\varphi(a, c)$ entonces $b = c$

$\eta(\varphi, d, e, f) \equiv$ Si $\varphi(d, f)$ y $\varphi(e, f)$ entonces $d = e$

El concepto "F es equinumeroso con G", donde F, G con a su vez conceptos, significa lo mismo que, o es la función proposicional:

"Existe una relación biyectiva φ que relaciona las entidades que caen bajo el concepto F con las entidades que caen bajo el concepto G"
"El número que corresponde al concepto F" es la función "x es equinumeroso a F"
"n es un número natural o cardinal" es la función
"Existe un concepto F tal que n es el número que corresponde al concepto F"

4 El impacto de la obra de Frege.

El 16 de junio de 1902, Bertrand Rusell envió una carta a Frege en la cual planteaba la siguiente situación:
Existen conceptos que no son autoaplicables como
$\varphi(x) \equiv x$ es una cuchara, puesto que $\varphi(\varphi)$ es falso; existen también conceptos que sí son autoaplicables como

$$\Psi(y) \equiv y \text{ no es una cuchara,}$$

puesto que $\Psi(\Psi)$ es verdadera
Si se considera el concepto
$\varphi(\epsilon) \equiv \epsilon$ es un concepto que no es autoaplicable;
se tendrá la siguiente situación paradójica:
Suponiendo que φ es autoaplicable, entonces $\varphi(\varphi)$ será verdadera y en consecuencia f debe ser un concepto que no es auto-aplicable y entonces $\varphi(\varphi)$ será falsa.
Suponiendo ahora que φ no es autoaplicable $\varphi(\varphi)$ será falsa y entonces φ no es un concepto que no es autoaplicable; es decir, φ es autoaplicable y así $\varphi(\varphi)$ debe ser verdadera.
En conclusión
Φ es autoaplicable si y sólo si φ no es autoaplicable.
El 22 de junio del mismo año Frege le respondió a Russell con una carta en la cual manifiesta, entre otras cosa, lo siguiente:
"Su descubrimiento de la contradicción me ha sorprendido de una manera que no se puede expresar en palabras, me gustaría decir que me ha dejado estupefacto, pues ha derrumbado los cimientos sobre los cuales trataba de fundamentar la aritmética"

Este tremendo golpe desanimó un poco a Frege pero no a Russell, quien encontró un extraordinario tema de investigación. La historia que sigue incluye como uno de los asuntos centrales la solución de este enigma. Es algo similar a lo que sucedió con el descubrimiento de la inconmensurabilidad en la antigua Grecia. Siguiendo esta analogía, podemos afirmar que el pitagorismo y la teoría fregeana son constructos académicos limitados o contradictorios. Sin embargo, continúan siendo fuente de inspiración. Tal vez uno de los más grandes errores en los procesos de divulgación y difusión de las matemáticas se encuentren en este punto: como las teorías clásicas o antiguas son limitadas o falsas entonces, no vale la pena conocerlas.

El caso de Frege ilustra muy bien la situación. Hoy en día, todos sabemos que la Teoría de Frege es contradictoria pero, ¿realmente lo sabemos? O solamente estamos enterados de este "chisme", es apenas un imaginario para todos. ¿Cuántos educadores hemos leído los Fundamentos de la Aritmética?, o análogamente, ¿cuántos educadores hemos leído los Elementos de Geometría de Euclides? La verdad es que hemos caído en una trampa: como nos vienen metiendo el cuento que los educadores matemáticos no debemos ser matemáticos, entonces, no debemos trabajar las matemáticas seriamente y en consecuencia, no debemos ocuparnos de los clásicos de la matemática. Los clásicos de la matemática son los grandes creadores de conocimiento matemático, así este sea limitado e incluso contradictorio.

La obra de Frege muestra algo espectacular: la creatividad matemática puede llevar a contradicciones. Pero no sólo eso, también este otro hecho: una buena cantidad de conocimiento matemático se construye tratando de resolver "anomalías" o contradicciones. Lo que siguió a Frege es una muestra clara: rejuveneció la Filosofía de la Matemática, surgieron nuevas corrientes filosóficas y nuevas teorías matemáticas. ¿Qué más se le puede pedir a un gran innovador? Sólo una cosa: que deje ver su componente elemental, como Frege. Su libro Fundamentos de la Aritmética es una obra maestra de matemática y filosofía elementales y por su puesto, no triviales. Leer este libro una y otra vez es exactamente lo mismo que oír una y otra vez la novena sinfonía de Bethoven. En esta obra hay varios aportes trascendentales:

1. Se inicia el estudio matemático del lenguaje. Estas ideas iniciales de Frege han evolucionado hasta convertirse en una verdadera disciplina independiente: la Lingüística Matemática. Esta última teoría mantiene una buena cantidad de cualidades adjudicadas por Frege como de carácter altamente elemental.

2. El lenguaje común, a pesar de que puede conducir al sinsentido y a la contradicción, es una fuente elemental de ejemplos matemáticos. El lenguaje común, pongamos por caso, es un muy bonito ejemplo de infinito potencial. Noam Chomsky, uno de los constructores de la Lingüística Matemática, lo hizo explícito en la siguiente forma completamente elemental:

Siempre es posible construir oraciones tan largas, en número de fonemas o de palabras como se quiera. En efecto, si X es una oración de longitud n, la oración "X es una oración de longitud n" tiene longitud $n + 6$.

De otra parte, Frege nos introdujo al mundo de las "funciones proposicionales". Los ejemplos más utilizados por los matemáticos son las funciones numéricas, lo cual supone el conocimiento de los sistemas numéricos o algunos de ellos; las funciones proposicionales, por su parte, no suponen absolutamente nada diferente al lenguaje común, están en el lenguaje que manejan los niños desde los tres años. Ojo colegas educadores, no se necesita tener veinte años para llegar al tema de las funciones y las relaciones, están en el lenguaje.

5 Conclusiones.

Hay varias razones por las cuales es absolutamente indispensable que el profesor de matemáticas, no importa el nivel en el cual trabaje, sea un matemático, por lo menos elemental. El profesor I. Yaglom lo ha dicho muy claramente, no hay matemática escolar sino matemática elemental, y esta última es cualquier tipo de matemática siempre y cuando pueda trabajarse y desarrollarse en las escuelas y colegios; y claro, esto depende de muchas cosas, en primera instancia de los profesores de matemáticas. Pero claro, si los profesores de matemáticas no son matemáticos, ¿cómo es posible que ellos la trabajen y la desarrollen?

A propósito, ¿cuántos profesores de matemáticas conocen a Yaglom?

Naturalmente, viene el problema del millón: ¿Cómo es posible trabajar y desarrollar la matemática en un aula, en las peores condiciones, y con 35 o más estudiantes?

Me parece que llegó la hora de plantear el tema fundamental de la Didáctica: habrían dos tipos de Didáctica, aquella que nos ayuda a trabajar en las aulas comunes y corrientes y la otra para trabajar con los niños que muestran talento matemático.

Y que quede claro de una vez y para siempre, no se trata de hacer discriminaciones, es exactamente análogo a lo siguiente: no todos pueden pertenecer al equipo de fútbol y tampoco todos pueden pertenecer a la orquesta del colegio. Es demasiado simple, los niños (as), adolescentes y jóvenes, muestran intereses muy personales desde muy temprana edad y hay, entonces, necesidad de acompañarlos (as) y asesorarlos (as).

Nuestra tesis fundamental es la siguiente: la mayor debilidad de nuestro sistema educativo es que perdemos los talentos, ni siquiera nos preocupamos, salvo excepciones muy puntuales, por su existencia.

Tampoco se trata de convertir en matemáticos a los niños y a las niñas que muestran talento o interés en las matemáticas, se trataría simplemente de orientar y apoyar el desarrollo de ese talento, el cual podrá ser utilizado en cualquier otro ámbito académico, cultural o profesional.

Y claro, quien no posea creatividad matemática, al menos a nivel elemental, tampoco podrá ayudar a otros para que desarrollen y fortalezcan su creatividad matemática.

Referencias

[1] BEANEY Michel y otros. *The Frege Reader Blackwell publishers*, Oxford and Massachusetts, 1997.

[2] FREGE Gottlob. *Fundamentos de la Aritmética*, Editorial Laia, Barcelona, 1972.

[3] RUSSELL Bertrand. *La evolución de mi pensamiento Filosófico*, Alianza Editorial, Madrid, 1976.

Universidad Sergio Arboleda

Grupo MUSA.E1

Universidad Nacional.