ALGUNAS CATEGORÍAS TOPOLÓGICAS ASOCIADAS A COLECCIONES DE CONJUNTOS

Reinaldo Montañez Puentes
Profesor de Matemáticas
Universidad Nacional.

Alberto Donado Núñez
Profesor de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional.

Resumen.

Utilizando los conceptos de categorías topológicas, subcategorías reflexivas y subcategorías correflexivas, se presentan dos categorías denominadas COL y PTOP, que surgen al generalizar a colecciones la noción de abierto dada en los espacios topológicos, permitiendo en estas abordar, nociones topológicas como la conexidad, separación y compacidad entre otras. La categoría PTOP resulta topológica y reflexiva en la de los espacios topológicos y la categoría COL, que no es topológica, es reflexiva en la categoría PTOP.

En el estudio de estas categorías se describen algunas construcciones de carácter categórico, como estructuras iniciales, estructuras finales, productos y fibras.

1 Conceptos preliminares.

1.1 Categorías topológicas.

Las categorías topológicas surgen al estudiar algunas propiedades del functor olvido de estructura de la categoría de los espacios topológicos en la de los conjuntos, en particular aquellas que relacionan estructuras iniciales y finales [2].

La siguiente definición de categoría topológica es una modificación de la presentada por Preuss [6] y se puede probar [8] que es equivalente a la presentada por Adamek [1].

1. Definición. Sea $F : C \to CONJ$[1] un functor. Se dice que C es una

[1]La categoría de los conjuntos

categoría topológica con respecto a F, si se satisfacen las siguientes condiciones:

i. F es un functor fiel. Esto es, para todo par de morfismos $f, g : A \to B$ de C tales que $F(f) = F(g)$, se tiene que $f = g$.

ii. F es apto para la construcción de estructuras iniciales. Esto es, para toda función $f : A \to B$ y todo objeto B tal que $F(B) = B$, existe un objeto A tal que $F(A) = A$ y un morfismo f tal que $F(f) = f$ con la siguiente propiedad universal: para todo objeto C de C con $F(C) = C$ y toda función $h : C \to A$ tal que $f \circ h : C \to B$ es morfismo en C, existe un morfismo $h : C \to A$ tal que $F(h) = h$.

iii. F es apto para la construcción de estructuras finales. Esto es, para toda función $f : A \to B$ y todo objeto A tal que $F(A) = A$, existe un objeto B tal que $F(B) = B$ y un morfismo f tal que $F(f) = f$ con la siguiente propiedad universal: para todo objeto D de C con $F(D) = D$ y toda función $h : B \to D$ tal que $h \circ f : A \to D$ es morfismo en C , existe un morfismo $h : B \to D$ tal que $F(h) = h$.

iv. Para cada conjunto X la fibra sobre X es un retículo completo [1]. Esto es $\{X : F(X) = X\}$ es un retículo completo con el orden dado por: $X_1 < X_2$, si y solo si, existe un morfismo $f : X_1 \to X_2$ tal que $F(f) = 1_X$.

Existen procedimientos para obtener categorías topológicas. En un artículo de Herrlich [5] se muestra una forma de obtener una categoría topológica a partir de un objeto fijo A de una categoría concreta [1] en la que adicionalmente todas las funciones constantes son morfismos.

El proceso de construcción es el siguiente: A partir de un objeto $A = (A, \tau)$ de una categoría concreta C, se construye la categoría $MaxA$ considerando: Como objetos pares (X, F) donde X es un conjunto y F una colección de funciones $f : A \to X$ tales que:

i. Si $f \in F$ y $g : (A, \tau) \to (A, \tau)$ es un morfismo de C, entonces $f \circ g \in F$.

ii. Si $f : A \to X$ es una función constante, entonces $f \in F$.

Como morfismos $g : (X, F) \to (X', F')$ entre objetos de $MaxA$ las funciones $g : X \to X'$ tales que $f \in F$ implica $g \circ f \in F'$.

Se garantiza que $MaxA$ es una categoría topológica, y aunque estas normalmente son muy grandes, escogiendo algunos objetos específicos, se pueden reconocer varias categorías conocidas.

Si escogemos como objeto fijo al espacio topológico $A = (A, \tau)$, donde A es un conjunto unitario y τ la única topología sobre A, como para toda $f : A \to X$, f es constante, sólo es posible para cada conjunto X encontrar un único objeto (X, F), donde $F = X^A = X$. Por tanto $MaxA$ es equivalente a la categoría $CONJ$ de los conjuntos.

En el artículo de Montañez y Ramírez [7] se muestra que si A es el espacio topológico (A, τ), donde $A = \{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a\}, A\}$, la categoría $MaxA$ corresponde a la categoría topológica de las relaciones reflexivas y si A es el espacio topológico (A, τ), donde $A = \{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, A\}$, la categoría $MaxA$ corresponde a la categoría topológica de las relaciones simétricas.

1.2 Subcategorías reflexivas y correflexivas.

Las nociones de subcategoría reflexiva y correflexiva, expresan de cierta manera nociones de mejoramiento y reflejan en cierto sentido nociones de densidad en teoría de categorías.

Sean C una categoría y H una subcategoría de C. Se dice que H es una subcategoría reflexiva de C si para todo objeto A de C existe un objeto A^* en H y un morfismo $r_A : A \to A^*$ en C tal que para todo objeto B de H y todo morfismo $f : A \to B$ en C, existe un único morfismo $\varphi : A^* \to B$ en H tal que $\varphi \circ r_A = f$.

El hecho de que H resulte reflexiva en C es equivalente a decir que el functor de inclusión de H en C admite adjunto a izquierda. [2]

De manera dual se define subcategoría correflexiva. Esto es, se dice que H es una subcategoría correflexiva de C si para todo objeto A de C existe un objeto A^* en H y un morfismo $r_A : A^* \to A$ en C tal que para todo objeto B de H y todo morfismo $f : B \to A$ en C, existe un único morfismo $\varphi : B \to A^*$ en H tal que $r_A \circ \varphi = f$.

La correflexividad de H en C es equivalente a decir que el functor de inclusión de H en C admite adjunto a derecha. [2]

Otra consecuencia de que H sea una subcategoría reflexiva de C nos permite derivar bajo determinadas condiciones, la existencia de límites y colímites en H, cuando C los tiene, más precisamente se tiene el siguiente teorema [1], relacionado con la completitud. Antes de enunciarlo veamos algunas definiciones que en él están involucradas:

H es una subcategoría plena de C si para todo par de objetos de H, la colección de sus morfismos en C y en H coinciden.

H es cerrada bajo isomorfismos, si para cada objeto de H, todos sus objetos isomorfos están también en H.

1. Teorema. *Si H es una subcategoría plena de C, cerrada bajo isomorfismos y C es completa entonces H es completa, también si C es cocompleta H resulta cocompleta.*

En particular, si C es apta para construir estructuras iniciales o finales entonces H también lo es.

2 Las categorías COL, $PTOP$ y TOP.

En esta sección se describen las categorías de colecciones, de los espacios pretopológicos y topológicos, notadas COL, $PTOP$ y TOP respectivamente.

Estas categorías surgen de extender la noción de abierto a colecciones arbitrarias de subconjuntos y consideramos que éstas son un ambiente adecuado para generalizar, de cierta manera, conceptos de carácter topológico tales como compacidad, separación y conexidad, a colecciones de conjuntos que no necesariamente son espacios topológicos [4].

2.1 La categoría COL.

Dado un conjunto X, una colección sobre X es un elemento de $\wp^2(X)$. Si $\alpha \in \wp^2(X)$, al par (X, α) lo llamaremos un espacio.

Dado un espacio (X, α), para cada $A \subseteq X$ y $x \in X$ diremos que $x \in_\alpha A^\circ$ (x pertenece al interior de A según α) si existe $T \in \alpha$ tal que $x \in T \subseteq A$.

Conviene resaltar que, al igual que en los espacios topológicos, un conjunto A es abierto (según α) si y solo si $A = A^\circ$ y que si A es un conjunto abierto, se tiene que

$$A = \bigcup \{T \in \alpha : T \subseteq A\}$$

La colección de abiertos $\rho_\alpha = \{A \subseteq X : A = A^\circ\}$ tiene entre sus propiedades:

i. $\alpha \subseteq \rho_\alpha$

ii. $\phi \in \rho_\alpha$

iii. Si $A_\lambda \subseteq \rho_\alpha$ entonces $\bigcup_{x\in L} A_\lambda \subseteq \rho_\alpha$

La categoría COL se define por:

- Objetos de COL: La clase de los espacios.
- Morfismos de COL: $f : X \to Y$ es un morfismo entre los espacios (X, α) y (Y, β), si y solo si, para todo $B \in \beta$, $f^!(B) \in \rho_\alpha$
- La ley de composición entre los morfismos del COL corresponde a la composición usual de funciones.

Para el estudio de esta categoría, en cuanto a su estructura de carácter topológico, consideramos el functor olvido de estructura de la categoría COL en la de los conjuntos, functor que por su definición, resulta fiel de manera natural.

2.2 La categoría $PTOP$.

Dado X conjunto y $\rho \in \wp^2(X)$, diremos que ρ es una pretopología sobre X si

i. $\phi \in \rho$

ii. Si $\{A_\lambda\} \subseteq \rho$ entonces $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \in \rho$

Al par (X, ρ), lo llamaremos un espacio pretopológico.
La categoría $PTOP$ se define por:

- Objetos de $PTOP$: La clase de los espacios pretopológicos.
- Morfimos de $PTOP$: $f : X \to Y$ es un morfismo entre (X, ρ) y (Y, μ) si y solo si $f^!(M) \in \rho$ para todo $M \in \mu$.

- La ley de composición de morfismos corresponde a la composición usual de funciones.

Nuevamente se considera el functor olvido de estructura de la categoría $PTOP$ en la de los conjuntos.

2.3 La categoría TOP.

Es la de los espacios topológicos. [1]

3 Algunos resultados obtenidos en el estudio de estas categorías.

3.1 Estructuras iniciales en COL.

El problema de encontrar una colección a para X que haga de una función $f : X \to Y$ un morfismo en COL a partir de un espacio (Y, β), tiene solución óptima en COL, debido a que:

$$\begin{array}{cc} COL & (X,?) \xrightarrow{f} (Y,\beta) \\ \hline CONJ & X \xrightarrow{f} Y \end{array}$$

i. Si $\alpha = \{f^!(B) : B \in \beta\}$, la función $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ es claramente un morfismo.

ii. Si existe un espacio (Z,γ) y una función $h : Z \to X$ tal que $f \circ h : (Z,\gamma) \to (X,\beta)$ es un morfismo, entonces para todo $A \in \rho_\alpha$, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
(X,\alpha) \arrow[r, "f"] & (Y,\beta) \\
(Z,\gamma) \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "f \circ h"'] &
\end{tikzcd}$$

$A = \bigcup_{\lambda \in L} f^!(B_\lambda)$ con $B_\lambda \in \beta$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} h^!(A) &= h^!(\bigcup_{\lambda \in L} f^!(B_\lambda)) \\ &= \bigcup_{\lambda \in L} h^!(f^!(B_\lambda)) \\ &= \bigcup_{\lambda \in L} (h^! \circ f^!)(B_\lambda) \\ &= \bigcup_{\lambda \in L} (f \circ h)^!(B_\lambda) \end{aligned}$$

y por ser $f \circ h$ un morfismo de COL, podemos afirmar que

$$\bigcup_{\lambda \in L} (f \circ h)^!(B_\lambda) \in \rho_\gamma$$

lo que nos permite concluir que $h : (Z, \gamma) \to (X, \alpha)$ es un morfismo de COL.

3.2 Estructuras finales en COL.

$$\begin{array}{cc} COL & (X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, ?) \\ \hline CONJ & X \xrightarrow{f} Y \end{array}$$

Dado un espacio (X, α) y una función $f : X \to Y$, la colección óptima sobre Y que hace de f un morfismo en COL es:

$$\beta = \{B \subseteq Y : f^!(B) \in a\}$$

debido a que:

$$\begin{tikzcd} (X,\alpha) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h \circ f"'] & (Y,\beta) \arrow[d, dashed, "h"] \\ & (Z,\gamma) \end{tikzcd}$$

i. $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un morfismo

ii. Si existe un espacio (Z, γ) y una función $h : Y \to Z$ tal que $h \circ f : (X, \alpha) \to (Z, \gamma)$ es un morfismo, entonces para todo $C \in \gamma$, como $(h \circ f)^!(C) = f^!(h^!(C)) \in \alpha$, se tiene que $h^!(C) \in \beta$ y por tanto $h : (Y, \beta) \to (Z, \gamma)$ es un morfismo en COL.

3.3 COL no es una categoría topológica.

La fibra en COL no es completa, debido a que el functor olvido no es fuertemente fiel, esto es, existen objetos distintos que son isomorfos. Por ejemplo, si

$$X = \{a, b\},$$

$$a = \{\{a\}, \{b\}\},$$

$$b = \{X, \{a\}, \{b\}\},$$

se tiene que la función identidad en X es un isomorfismo de (X, α) en (X, β), lo cual implica que $(X, \alpha) \leq (X, \beta)$ y $(X, \beta) \leq (X, \alpha)$ y sin embargo $\alpha \neq \beta$. De lo anterior se sigue que la categoría COL no es topológica

3.4 La categoría $PTOP$ como subcategoría reflexiva de COL.

La categoría $PTOP$ es una subcategoría de COL. La reflexividad de $PTOP$ en COL expresa que a todo espacio de COL se le puede asociar de manera óptima una pretopología, lo cual se describe a continuación.
Sea (X, α) un espacio en la categoría COL. Como ρ_α es una pretopología sobre X, (X, ρ_α) es un objeto de la categoría $PTOP$.
La reflexión de (X, α) es (X, ρ_α) junto con el morfismo $i_X : (X, \alpha) \to (X, \rho_\alpha)$ definido por $i_X(x) = x$ para toda $x \in X$; en efecto, si (Y, μ) es un espacio pretopológico y $f : (X, \alpha) \to (Y, \mu)$ es un morfismo de la categoría COL, la misma función f definida de (X, ρ_α) en (Y, μ) resulta morfismo en $PTOP$,

ya que para todo $M \in \mu$ se tiene que $f^!(M) \in \rho_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
(X,\alpha) \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & (X,\rho_\alpha) \arrow[d, "f"] \\
& (Y,\mu)
\end{tikzcd}$$

Esta reflexividad nos permite garantizar que en $PTOP$ hay también estructuras iniciales y finales y se obtienen de la misma manera que en las colecciones.

En efecto, si en (3.1) la colección β es una pretopología sobre Y, la colección $\alpha = \{f^!(B) : B \in \beta\} = f^!(\beta)$ que es la estructura inicial en COL, también es una pretopología y es la estructura inicial en $PTOP$; y si en (3.2) α es una pretopología sobre X, la colección $\beta = \{B \subseteq Y : f^!(B) \in \alpha\}$ que es la estructura final en COL también es una pretopología, correspondiente a la estructura final en $PTOP$.

Así pues, se determina un functor $\rho : COL \to PTOP$ el cual determina el mejoramiento de la estructura y asigna a cada espacio (X,α) el objeto (X,ρ_α) y a cada morfismo $f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$ le asigna el morfismo $\rho(f) : (X,\rho_\alpha) \to (Y,\rho_\beta)$ definido por $\rho(f) := i_Y \circ f$.

$$COL \xrightarrow{\rho} PTOP$$

$$\begin{tikzcd}
(X,\alpha) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & (X,\rho_\alpha) \arrow[d, "\rho(f) = 1_Y \circ f"] \\
(Y,\beta) \arrow[r, "i_Y"'] & (Y,\rho_\beta)
\end{tikzcd}$$

3.5 $PTOP$ es una subcategoría reflexiva de TOP.

La reflexividad de $PTOP$ en TOP expresa cómo construir de manera óptima un espacio topológico a partir de una pretopología, considerando la pretopología como subbase.

Sea (X, ρ) un espacio pretopológico. Si $\ll \rho \gg$ es la topología generada por ρ como subbase, al espacio pretopológico (X, ρ) le asignamos el espacio topológico $(X, \ll \rho \gg)$, el cual, junto con el morfismo $i_X : (X, \rho) \to (X, \ll \rho \gg)$ definido por $i_X(x) = x$ es la reflexión de (X, ρ), puesto que si $f : (X, \rho) \to (Y, \mu)$ es un morfismo en $PTOP$, la misma función f de (X, ρ) en $(X, \ll \rho \gg)$ resulta ser un morfismo en TOP ya que $\rho \subseteq \ll \rho \gg$.

$$\begin{tikzcd}
(X, \rho) \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & (X, \ll \rho \gg) \arrow[d, "f"] \\
& (Y, \mu)
\end{tikzcd}$$

El functor $\ll \gg : PTOP \to TOP$ que determina esta reflexividad asigna a cada espacio pretopológico (X, ρ) el espacio topológico $(X, \ll \rho \gg)$ y a cada morfismo $f : (X, \rho) \to (Y, \mu)$ en $PTOP$ el morfismo $\ll f \gg = i_Y \circ f : (X, \ll \rho \gg) \to (Y, \ll \mu \gg)$

$$PTOP \xrightarrow{\rho} TOP$$

$$\begin{tikzcd}
(X, \rho) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & (X, \ll \rho \gg) \arrow[d, "\rho(f) = 1_Y \circ f"] \\
(Y, \mu) \arrow[r, "i_Y"'] & (Y, \ll \rho \gg)
\end{tikzcd}$$

Por tanto, como TOP es una categoría completa $PTOP$ también lo es, esto es, existen productos, coproductos, igualadores, etc..., además la fibra es un retículo completo. Así por ejemplo, en la fibra, dada $\{\rho_i\}_{i \in I}$ una colección de pretopologías sobre un conjunto X,

$$\bigcap_{i \in I} \rho_i = \inf\{\rho_i\}_{i \in I} \text{ y}$$

$$\rho_{\bigcup_{i \in I} \rho_i} = \sup\{\rho_i\}_{i \in I}$$

Las pretopologías $0 = \{\emptyset\}$ y $1 = \wp(X)$ son respectivamente el mínimo y el máximo elemento en el retículo de pretopologías sobre X.
En lo que al producto se refiere, si (X, ρ) y (Y, μ) son espacios pretopológicos, sobre $X \times Y$, $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ las funciones proyección del producto, la colección

$$\pi = p_1^!(\alpha) \cup p_2^!(\beta)$$

no necesariamente es una pretopología, pero sus abiertos (ρ_π) corresponden a la pretopología producto.

Referencias

[1] Adamek J., Herrlich H., Strecker G.,*Abstract and concrete categories: The joy of Cats*, Wiley .- international, New York, 1990.

[2] Adamek J., *Theory of mathematical structures.* D. Reidel Publishing Company. Boston, Lancaster. 1983.

[3] Arbib M., Manes E., *Arrows, Structures, and Functors.* Academic Press Inc. New York. 1995.

[4] Donado A., *Topología y Colecciones.* Publicación del Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. 1.998.

[5] Herrlich Horst. Sequential Structures. 24 categorical aspects. Writes Research 24. Akademic-Verlag-Berlín. 1985.

[6] Preuss Gerhard. *Theory of topologycal structures "An aproach to categorical topology"* . D. Reidel Publishing Company. 1998.

[7] Ramirez M., Montañez R. *Algunas categorías de relaciones como categorías topológicas.* Memorias VII encuentro de Geometría y sus aplicaciones. Junio 1996. Universidad Pedagógica Nacional.

[8] Ruiz C., Ardila V., Montañez R., *Nociones equivalentes de categorías topológicas.* Artículo publicado en el Boletín de Matemáticas, Nueva serie, Volumen VII, Número 1, Junio de 2000. Publicación del Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.