COLECCIONES CERRADAS PARA INTERVALOS

Edilberto Sarmiento
Universidad Distrital.

Carmen Pulido
Universidad Distrital.

1 Nociones Preliminares.

Algunas notaciones.
Sea X un conjunto no vacío y A un subconjunto de X.
Se denota por $|A|$ el cardinal del conjunto A, $\varrho(A)$ a la colección de todos los subconjuntos de A y por $\mathbf{H}(A)$ la colección de hiperconjuntos de A:

$$\varrho(A) = \{B \subseteq X : B \subseteq A\}$$
$$H(A) = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$$

Si A y D son subconjuntos de X, con $A \subseteq D$, la colección de todos los conjuntos que están entre A y D es:

$$[A, D] = \{B \subseteq X : A \subseteq B \subseteq D\}$$

Si $\mathbf{A}$ es una colección de subconjuntos de X,

$$c\mathbf{A} = \varrho(X) - \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}c = \{B \subseteq X : (X - B) \in \mathbf{A}\}$$
$$c\mathbf{A}c = \{B \subseteq X : (X - B) \notin \mathbf{A}\} = \varrho(X) - \mathbf{A}c$$

Resultado

$$|\varrho(A)| = 2^{|A|}, \quad |\mathbf{H}(A)| = 2^{|X|-|A|} \quad |c\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|.$$

Para cada entero positivo $m \leq |X|$, $\varrho_m(X)$ es la colección de subconjuntos de X que tienen m elementos:

$\varrho_m(X) = \{B \subseteq C : |B| = m\}.$, $|\varrho_m(X)| = \binom{|X|}{k}$, si X es finito.
$\varrho(A)_* = \varrho(A) - \{\emptyset\}$,
$\varrho(A)^* = \varrho(A) - \{A\}$,
$\varrho(A) = \varrho(A) - \{\emptyset, A\}$.
$\varrho(A)_{**} = (\varrho(A) - \{\emptyset\}) - \{\{x\} : x \in A\}$,
$\varrho(A)^{**} = (\varrho(A) - \{A\}) - \{A - \{x\} : x \in A\}$.
$\varrho(A)^*_{**} = (\varrho(A) - \{\emptyset, A\}) - \{\{x\} : x \in A\}$.
$\varrho(A)^{**}_* = (\varrho(A) - \{\emptyset, A\}) - \{A - \{x\} : x \in A\}$.
$\mathbf{H}(A)_* = \mathbf{H}(A) - \{A\}$, $\mathbf{H}(A)^* = \mathbf{H}(A) - \{X\}$ $\mathbf{H}(A)^*_* = \mathbf{H}(A) - \{A, X\}$.

1.1 Definición y Ejemplos.

Definición.
Sea X un conjunto. Una colección $\mathbf{A}$ es cerrada para intervalos si

$$A, B \in \mathbf{A} \text{ y } A \subseteq C \subseteq B, \text{ entonces } C \in \mathbf{A}.$$

El conjunto formado por todas las colecciones cerradas para intervalos sobre X se denota por $CI(X)$.

Ejemplos sobre conjuntos finitos.
Si $X = \emptyset$ entonces $CI(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Si $X = \{1\}$, entonces $CI(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, X\}, \{X\}\}$.
Sea $X = \{1, 2\}$,
$\varrho(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
$\varrho^2(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}$,
$\{\{2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}$,
$\{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}$,
$\{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$,
$\{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \varrho(X)\}$.
Hay un total de 13 colecciones cerradas para intervalos.
Las siguientes colecciones no son cerradas para intervalos:
$\{\emptyset, \{1, 2\}\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $\{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Ejemplos sobre un conjunto arbitrario X.

1. $\emptyset, \varrho(X) \in CI(X)$.

2. Si $A \in \varrho(X)$, $\mathbf{A} = \{A\} \in CI(X)$. Las colecciones unitarias son cerradas para intervalos.

3. Si A $\nsubseteqq$ B $\wedge$ B $\nsubseteqq$ A, $\{A, B\} \in CI(X)$

4. Si $\ A \subseteq B,\ \ A = cAc = \mathbf{H}(A) \cap \varrho(B) = [A, B] \in CI(X)$

5. $B = \{A : |A| = n \vee |A| = n + 1\} = \varrho_n(X) \cup \varrho_{n+1}(X) \in CI(X)$

6. Si $0 \leq m \leq n \leq |X|, \mathbf{A} = \bigcup\limits_{k=m}^{n} \varrho_k(X) \in CI(X)$

7. Si una colección esta formada por conjuntos no comparables entonces es cerrada para intervalos.

8. Si una colección es cerrada para subconjuntos es cerrada para intervalos.

9. Si una colección es cerrada para hiperconjuntos es cerrada para intervalos.

10. Si A es cerrada para hiperconjuntos y B es cerrada para subconjuntos la intersección de las dos es cerrada para intervalos.

Observación.
Si $\emptyset, X \in \mathbf{A}$ y $\ \mathbf{A} \in CI(X)$ entonces $\mathbf{A} = \varrho(X)$.

1.2 El Conjunto Ordenado $CI(X)$.

Debido a que el conjunto de colecciones cerradas para intervalos esta contenido en el conjunto de partes de partes de X, $(\varrho^2(X))$, y este último esta ordenada por la inclusión, entonces $CI(X)$ hereda el mismo orden. En el siguiente apartado se enumeran algunas de las propiedades de este conjunto ordenado.

Proposición.

1. El mínimo y máximo de $CI(X)$ son $\emptyset$ y $\varrho(X)$ respectivamente.

2. Sea $\{\ A_i\ \}_{i \in I} \subseteq CI(X)$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in CI(X)$.

Demostración.

2. $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ es una familia de colecciones de $CI(X)$

$$\begin{aligned} A, B \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{A}_i \wedge A \subseteq C \subseteq B &\iff (\forall i \in I)(A, B \in \mathbf{A}_i) \wedge A \subseteq C \subseteq B \\ &\iff (\forall i \in I)(A, B \in \mathbf{A}_i \wedge A \subseteq C \subseteq B) \\ &\implies (\forall i \in I)(C \in \mathbf{A}_i), \text{ pues } \ \mathbf{A}_i \in CI(X) \\ &\implies C \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

Luego $\bigcap_{i\in I} \mathbf{A}_i \in CI(X)$.

Observación.
La familia $CI(X)$ no siempre es cerrada para uniones de pares

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

Las colecciones $\mathbf{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \mathbf{B} = \{\{1, 2, 3\}\}$ son cerradas para intervalos pero $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ no es cerrada para intervalos.

Proposición.

1. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una cadena en $(CI(X), \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in CI(X)$.

2. $(CI(X), \subseteq)$ posee elementos maximales.

Proposición. $\mathbf{A} \in CI(X) \Longrightarrow \mathbf{A}c \in CI(X)$.

Demostración.

Sean $D, F \in \mathbf{A}c, D \subseteq G \subseteq F$
$\Longrightarrow cD, cF \in \mathbf{A}c, F \subseteq cG \subseteq cD$
$\Longrightarrow cG \in \mathbf{A}$
$\Longrightarrow G \in \mathbf{A}c$.

1.3 Colecciones no cerradas para intevalos.

En este apartado se estudian las colecciones que no son cerradas para intervalos, ya que su estudio es equivalente al de las colecciones cerradas para intervalos y porque hemos encontrado mas resultados para este tipo de colecciones.

Definición.
Sea X un conjunto y $\mathbf{A}$ una colección sobre X. $\mathbf{A}$ no es cerrada para intervalos si existen $A, B \in \mathbf{A}$ y $C \in \varrho(X)$, con $A \subseteq C \subseteq B$ y $C \notin \mathbf{A}$.
El conjunto de todas las colecciones no cerradas para intervalos sobre el conjunto X se denota por $NCI(X)$. $NCI(X) = \varrho^2(X) - CI(X)$

Ejemplos de colecciones no cerradas para intervaos.
Las siguientes colecciones de conjuntos no son cerradas para intervalos:

1. $\{\emptyset, A\}$ tal que $|A| > 1$
2. $\varrho_m(X) \cup \varrho_n(X)$ con $|m - n| > 2$
3. $\varrho_m(X) \cup \{\emptyset\}$ con $m \geq 2$

Aproximación al número de colecciones cerradas parqa intervalos.
Notación.
Se denota por $M(X)$ al conjunto formado por las colecciones distintas de $\varrho(X)$ que contienen a $\emptyset$ y X :

$$M(X) = \{\mathbf{A} \in \varrho^2(X)^*_* : \{\emptyset, X\} \subseteq \mathbf{A}\}$$

Proposición.

$M(X) \subseteq NCI(X)$.
Demostración.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} \in M(X) & \Longleftrightarrow & \mathbf{A} \in \varrho^2(X) \wedge \mathbf{A} \neq \varrho(X) \wedge \{\emptyset, X\} \subseteq \mathbf{A} \\ & \Longrightarrow & (\exists B \in \varrho(X))(B \neq \emptyset \wedge B \neq X)(B \notin \mathbf{A}) \\ & \Longrightarrow & \emptyset \subseteq B \subseteq X \wedge B \notin \mathbf{A}, \{\emptyset, X\} \subseteq \mathbf{A} \\ & \Longrightarrow & \mathbf{A} \in NCI(X) \end{array}$$

Teorema.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \varrho(\varrho(X))^{**}_{*} & \rightarrow & M(X) \\ & \boldsymbol{A} & \rightarrow & \boldsymbol{A} \cup \{\emptyset, X\} \end{array}$$

es biyectiva

Demostraciòn.

1. *Inyectividad.*

   Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \varrho(\varrho(X)^{*}_{*})^{*}$ *y* $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ *entonces, existe* $A \in \boldsymbol{A}$, $A \notin \{\emptyset, X\}$ *y* $A \notin \boldsymbol{B}$, *luego* $\boldsymbol{A} \cup \{\emptyset, X\} \neq \boldsymbol{B} \cup \{\emptyset, X\}$ *y* $\varphi(\boldsymbol{A}) \neq \varphi(\boldsymbol{B})$.

2. *Sobreyectividad.*
   Sea $\boldsymbol{B} \in M(X)$, *entonces* $\{\emptyset, X\} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \neq \varrho(X)$ *así que existe* $\boldsymbol{B} - \{\emptyset, X\} \in \varrho(\varrho(X)^{*}_{*})^{*}$ *es tal que* $\varphi(\boldsymbol{B} - \{\emptyset, X\}) = (\boldsymbol{B} - \{\emptyset, X\}) \cup \{\emptyset, X\}\} = \boldsymbol{B}$.

Corolario. 1. $2^{2^{|X|-2}} - 1 \leq |NCI(X)|$.

2. $|CI(X)| \leq 2^{2^{|X|}} - (2^{2^{|X|-2}} - 1)$.

Demostraciòn. 1. $(X)| = |\varrho(\varrho(X)^{*}_{*})^{*}| = |\varrho(\varrho(X)^{*}_{*})| - 1 = 2^{|\varrho(X) - \{\emptyset, X\}|} - 1 = 2^{2^{|X|-2}} - 1$

2. *Se tiene a partir de 1 usando complemento.*

A continuación vamos a mostrar otra forma de aproximar el número de colecciones cerradas para intervalos.

Proposición. *Sea* $A \in \varrho(X)$ *la función:*

$$\varphi_A : \varrho(A) \quad \rightarrow \quad NCI(X) \;\; R \rightarrow \varrho(A) - \{R\}$$

1. φ_A *esta bien definida.*

2. φ_A *es inyectiva.*

3. $Im(\varphi_A) \subseteq NCI(X)$.

4. $|Im(\varphi_A)| = 2^{|A|} - 2 \leq |NCI(X)|$.

5. *Si* $A, B \in \varrho(X)^*_{**}$ *con* $A \neq B$, *entonces* $Im(\varphi_A) \cap Im(\varphi_B) = \emptyset$.

Demostración.

2. Sean $B_1, B_2 \in \varrho(A)$, $B_1 \neq B_2 \in \varrho(A)$, luego $(\varrho(A) - \{B_1\}) \neq (\varrho(A) - \{B_2\})$

así que $\varphi_A(B_1) \neq \varphi_A(B_2)$.
4. $|\varrho(A)^*_*| = |Im(\varphi_A)| \leq |NCI(X)|$, luego $2^{|A|} - 2 \leq |NCI(X)|$.
5. Si $\mathbf{B} \in Im(\varphi_A)$, existe $R \in \varrho(A)$ tal que $\mathbf{B} = \varrho(A) - \{R\}$. Sea $S \in \varrho(B)^*_*$
,

- Si $A \subseteq B, B \in (\varrho(B) - \{S\})$ y $B \notin (\varrho(A) - \{R\})$.
- Si $B \subseteq A, A \in (\varrho(A) - \{R\})$ y $A \notin (\varrho(B) - \{S\})$.
- Si $A \nsubseteq B$ *y* $B \nsubseteq A, B \in (\varrho(B) - \{S\})$ *y* $B \notin (\varrho(A) - \{R\})$.

En cualquiera de los 3 casos anteriores
$\varrho(A) - \{R\} \neq \varrho(B) - \{S\}$, luego $\mathbf{B} \notin Im(\varphi_B)$ y $m(\varphi_A) \cap Im(\varphi_B) = \emptyset$.

Teorema. *Si* $|X| = n$, $3(3^{n-1} - 2^n + 1) \leq |NCI(X)|$.

Demostración.

$$|\overset{+}{\bigcup_{A\in\varrho(X)^*_{**}}} Im(\varphi_A)| \leq |NCI(X)| \Longleftrightarrow \left|\sum_{A\in\varrho(X)^*_{**}} Im(\varphi_A)\right| \leq |NCI(X)|$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{A\in\varrho(X)^*_{**}} \left(2^{|A|} - 2\right) \leq |NCI(X)|.$$

$$\sum_{A\in\varrho(X)^*_{**}} \left(2^{|A|} - 2\right) \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \left(2^k - 2\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2^k - 2\right) + 1 - 2^n + 2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^k - 2^n + 3 =$$

$$3^n - 22^n - 2^n + 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

Luego $3(3^{n-1} - 2^n + 1) \leq |NCI(X)|$.
Ahora trabajaremos con los hiperconjuntos de $\mathbf{H}(A)$
Sea $A \in \varrho(X)$ definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} \phi_A: & H(A)^*_* & \to NCI(X) & \\ & R & \to & H(A) - \{R\} \end{array}$$

1. ϕ_A es inyectiva.

   Sean $B_1, B_2 \in H(A), B_1 \neq B_2$, entonces $\phi_A(B_1) \neq \phi_A(B_2)$, así́ $H(A) - \{B_1\} \neq H(A) - \{B_2\}$

   luego existe $B_2 \in H(A) - \{B_1\} \wedge B_2 \notin H(A) - \{B_2\}$.

2. $Im(\phi_A) \subseteq NCI(X)$, luego $|Im\phi_A| = |H(A)^*_*| = 2^{|X|-|A|} - 2$

3. $\overset{+}{\bigcup\limits_{A \in \varrho(X)^*_{**}}} Im(\phi_A) \subseteq NCI(X)$

   Si $A \neq B$ entonces$Im(\phi_A) \cap Im(\phi_B) = \emptyset$

   para todo $R_1 \in A$ y para todo $R_2 \in B$ tenemos $H(A) - \{R1\} \neq H(B) - \{R2\}$

Teorema. *1. Si* $|X| = n$, $6(3^{n-1} - 2^n + 1) \leq |NCI(X)|$.

2. Si $|X| = n$, $|CI(X)| \leq 2^{2^n} - 6(3^{n-1} - 2^n + 1)$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{A\in\varrho(X)_*^{**}}^{+} Im(\phi_A) \right| \leq |NCI(X)| \\
& \Longleftrightarrow \left| \sum_{A\in\varrho(X)_*^{**}} Im(\phi_A) \right| \leq |NCI(X)| \\
& \Longleftrightarrow \sum_{A\in\varrho(X)_*^{**}} \left(2^{n-|A|}-2\right) \leq |NCI(X)|.
\end{aligned}
$$

1. $$
\begin{aligned}
& \sum_{A\in\varrho(X)_*^{**}} \left(2^{n-|A|}-2\right) \\
& = \sum_{A\in\varrho(X)_*^{**}} 2^{n-|A|} - \sum_{A\in\varrho(X)_*^{**}} 2 \\
& = \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k} 2^{n-k} - 2\left|\varrho(X)_*^{**}\right| \\
& = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} - 2^n - 2n - 1 - 2(2^n - 2 - n) \\
& = 3^n - 32^n + 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1).
\end{aligned}
$$

Como $\bigcup_{A\in\varrho(X)_*^{**}}^{+} Im(\phi_A) \overset{+}{\cup} \bigcup_{A\in\varrho(X)_{**}^{*}}^{+} Im(\varphi_A)$, entonces $6(3^{n-1} - 2^n + 1) \leq |NCI(X)|$ y por complemento se cumple la parte 2.

El siguiente resultado permite encontrar una cota inferior para el cardinal de CI(X).

Proposición.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |CI(X)|$$

Demostración.

$\varrho(\varrho_k(X))_* \subseteq CI(X)$, $0 \leq k \leq n$

$\bigcup_{k=0}^{n} \varrho(\varrho_k(X))_* \subseteq CI(X)$ y la unión es disyunta

en términos de cardinal tenemos:

$$\sum_{k=0}^{n} |\varrho(\varrho_k(X))_*| = \sum_{k=0}^{n} \left(2^{|(\varrho_k(X))|} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |CI(X)|.$$

1.4 Menor Colección cerrada para intervalos que contiene a una colección.

Debido a que no todas las colecciones sobre un conjunto X son cerradas para intervalos se estudiará el siguiente problema:
Dada una colección de conjuntos encontrar la menor colección cerrada para intervalos que contenga a dicha colección.

Proposición.
Sea $\mathbf{A} \in \varrho^2(X)$
La colección $\cap\{\mathbf{B} \in CI(x) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}\}$ es cerrada para intervalos,
Es decir:
$\cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}\}$ es la menor colección de $CI(X)$ que contiene a $\mathbf{A}$.

Definición.
Sea $\mathbf{A} \in \varrho^2(X)$. Se define , la colección generada por $\mathbf{A}$ como:

$$< \mathbf{A} >= \cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}\}$$

Ejemplos.

1. El generado de una colección cerrada para intervalos es ella misma.
   $< \mathbf{A} >= \mathbf{A}$ si $\mathbf{A} \in CI(X)$.
2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $\mathbf{A} = \{\{1, 2\}, \{2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
4. $< \mathbf{A} >= \{\{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

Proposición.
Si $(\mathbf{A}, \subseteq)$ tiene máximo y mínimo entonces $< \mathbf{A} >= [A, B]$, donde $A = max(\mathbf{A}), B = min(\mathbf{A})$
Demostración.
$\subseteq$) Para cada $S \in \mathbf{A}$, $A \subseteq S \subseteq B$, luego $S \in [A, B]$, entonces $\mathbf{A} \subseteq [A, B]$ y aplicando el operador generado en cada miembro de la contenencia anterior se obtiene $< \mathbf{A} >\subseteq< [A, B] >= [A, B]$.

$\supseteq$ La colección $< \mathbf{A} >$ es cerrada para intervalos y contiene a $\mathbf{A}$, luego si $A, B \in \mathbf{A}$, entonces $A, B \in < \mathbf{A} >$, Para cada $P \in [A, B]$, se tiene $A \subseteq P \subseteq B$ así $P \in < \mathbf{A} >$ y $[A, B] \subseteq < \mathbf{A} >$.

Proposición.
La función

$$\begin{array}{lcl} <>: \varrho^2(X) & \to & CI(X) \\ \quad\ \mathbf{A} & \to & \cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}\} \end{array}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. $< \emptyset >= \emptyset$

   Demostración.

   $\emptyset \in \{\mathbf{B} \in CI(X) : \emptyset \subseteq \mathbf{B}\} \Longrightarrow \cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \emptyset \subseteq \mathbf{B}\} \subseteq \emptyset$. $< \emptyset > \subseteq \emptyset$.

2. $< \varrho(X) >= \varrho(X)$

   Demostración.

   $< \varrho(X) >= \cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \varrho(X) \subseteq \mathbf{B}\} = \cap\{\varrho(X)\} = \varrho(X)$

3. $\mathbf{A} \subseteq < \mathbf{A} >$

   Demostración.

   Para Cada $\mathbf{B} \in \{\mathbf{D} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}\}, \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ así que $\cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}\}$

4. La función $<>$ es un morfismo de conjuntos ordenados.

   Es decir, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Longrightarrow < \mathbf{A} > \subseteq < \mathbf{B} >$

   Como: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$,

   $\{\mathbf{D} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}\} \supseteq \{\mathbf{D} \in CI(X) | \mathbf{B} \subseteq \mathbf{D}\}$

   $\cap\{\mathbf{D} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}\} \supseteq \cap\{\mathbf{D} \in CI(X) | \mathbf{B} \subseteq \mathcal{D}\}$

   $< \mathbf{A} > \subseteq < \mathbf{B} >$

5. $< \mathbf{A} > \cup < \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{A} \cup \mathbf{B} >$

Demostración.

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}\cup\mathbf{B} \Longrightarrow < \mathbf{A} > \subseteq < \mathbf{A}\cup\mathbf{B} >$

$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}\cup\mathbf{B} \Longrightarrow < \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{A}\cup\mathbf{B} >$

$< \mathbf{A} > \cup < \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{A} \cup \mathbf{B} >$

6. $<< \mathbf{A} >> = < \mathbf{A} >$

   Demostración.

   $\mathbf{A} \subseteq < \mathbf{A} > \Longrightarrow < \mathbf{A} > \subseteq << \mathbf{A} >>$

   $\supseteq$) por propiedad No. 3

   $< \mathbf{A} > \subseteq << \mathbf{A} >>$

   $\subseteq$ como $< \mathbf{A} > \in \{\mathbf{B} \in CI(X) :< \mathbf{A} > \subseteq \mathbf{B}\}$

   $\cap\{\mathbf{B} \in CI(X) :< \mathbf{A} > \subseteq \mathbf{B}\} \subseteq < \mathbf{A} > \Longrightarrow << \mathbf{A} >> \subseteq < \mathcal{A} >$

7. $< \mathbf{A} \cap \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{A} > \cap < \mathbf{B} >$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} & \Longrightarrow & < \mathbf{A} \cap \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{A} >, \mathbf{A}\cap \\ \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B} & \Longrightarrow & < \mathbf{A} \cap \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{B} > \\ & \Longrightarrow & < \mathbf{A} \cap \mathbf{B} > \subseteq < \mathbf{A} > \cap < \mathbf{B} > \end{array}$$

8. Los puntos fijos de $<>$ son las colecciones cerradas para intervalos.

$$\begin{array}{rcl} < \mathbf{A} > = \mathbf{A} & \Longleftrightarrow & \mathbf{A} \in CI(X) \\ < \mathbf{A} > = \mathbf{A} & \Longrightarrow & \mathbf{A} \in CI(X) \\ \mathbf{A} \in CI(X) & \Longrightarrow & \mathbf{A} \in \{\mathbf{cal}B \in CI(X)/\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}\} \\ & \Longrightarrow & \cap\{\mathbf{B} \in CI(X) : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{cal}B\} \subseteq \mathbf{A} \\ & \Longrightarrow & < \mathbf{A} > \subseteq \mathbf{A} \\ & \Longrightarrow & < \mathbf{A} > = \mathbf{A} \end{array}$$

9. $\bigcup\limits_{i\in I} \langle \mathbf{A}_i \rangle \subset. \left\langle \bigcup\limits_{i\in I} \mathbf{A}_i \right\rangle$

   $\mathbf{A}_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \mathbf{A}_i \Longrightarrow \langle \mathbf{A}_i \rangle \subseteq \left\langle \bigcup\limits_{i\in I} \mathbf{A}_i \right\rangle \subseteq \mathbf{A}_i$ para todo i

$$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \langle \mathbf{A}_i \rangle \subset. \left\langle \bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i \right\rangle.$$

Proposición.
$< \mathbf{A} >= \{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\}$
Demostración.
$\subseteq$) Como $[D, D] = \{D\}$, Claramente $A \subseteq \{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\}$.
Sea $D \in < \mathbf{A} >$
Si $D \in \mathbf{A}$, $D \in \{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\}$
Si $D \in < \mathbf{A} > -\mathbf{A}$, existen $A, B \in \mathbf{A}$ tal que $A \subseteq D \subseteq B$, luego
$D \in \cup\{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\}$.
$\supseteq$)$D \in \{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\}$, existen $A, B \in \mathbf{A}$ tal que $D \in [A, B]$, luego $A, B \in < \mathbf{A} >$ y $A \subseteq D \subseteq B$, como $< A >$ es cerrada para intervalos
$D \in < \mathbf{A} >$.
Nota.
Si X es un conjunto finito y $\mathbf{A}$ es una colección , entonces:
para todo $A \in \mathbf{A}$ existen $D \in Max(\mathbf{A})$ y $B \in min(\mathbf{A})$ tal que $B \subseteq A \subseteq D$.

Teorema. *Sea X un conjunto finito y $\boldsymbol{A} \in \wp^2(X)$, entonces:*
$< \boldsymbol{A} >= \{[A, B] : A \in min(\boldsymbol{A}) \;\; y \;\; B \in max(\boldsymbol{A})\}$

Demostración.
$\supseteq$) Como $min(\mathbf{A}) \cup máx(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$,
$\{[A, B] : A \in min(\mathbf{A}) \wedge B \in máx(\mathbf{A})\} \subseteq \{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\}$, luego
$\cup\{[A, B] : A \in min(\mathbf{A}), B \in máx(\mathbf{A})\} \subseteq \cup\{[A, B] : A, B \in \mathbf{A}\} =< \mathbf{A} >$.
$\subseteq$ Sea $D \in < \mathbf{A} >, existeA, B \in \mathbf{A}$ tal que $D \in [A, B]$ y $A \subseteq D \subseteq B$
para $B \in \mathbf{A}$, existe $M \in Máx(\mathbf{A})$ tal que $B \subseteq M$ y para $A \in \mathbf{A}$, existe $m \in m \subseteq n(A)$ talque $m \subseteq A$, luego m$\subseteq$ A $\subseteq D \subseteq B \subseteq M$ así $m \subseteq D \subseteq M$ y $D \in [m, M]$ por lo tanto $D \in \{[A, B] : A \in min(\mathbf{A}) \wedge B \in máx(\mathbf{A})\}$.

1.4.1 Fibras de función generado.

En este apartado se caracterizan para un conjunto finito, todas las preimagines de una colección cerrada para intervalos, bajo la función generado.

Proposición.
$máx(\mathbf{B}) \cup min(\mathbf{B}) = m$

1. $\mathbf{B}$ es el máximo de la fibra

Demostración.

Si $\mathbf{A} \in F_{<>}(\mathbf{B})$ entonces $\mathbf{B} =< \mathcal{A} >\supseteq \mathbf{A}$, así que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

2. $< \max(\mathbf{B}) \cup \min(\mathbf{B}) >= \mathbf{B}$.

   Demostración.

   $\subseteq)$ $\max(\mathbf{B}) \cup \min(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{B}$

   luego $< \max(\mathbf{B}) \cup \min(\mathbf{B}) >\subseteq< \mathbf{B} \geq \mathbf{B}$

   $\supseteq)$ Si $B \in \mathbf{B}$, como X es finito, $\mathbf{B}$ tiene suficientes maximales y minimales. Luego existen P $\in$ min $(\mathbf{B})$, Q $\in \max(\mathbf{B})$ tal que $P \subseteq B \subseteq Qas \subseteq B \in [P,Q]$ y $B \in \cup\{[P,Q]|P \in min(\mathbf{B}), Q \in max(\mathbf{B})\}$ y como

   $< max(\mathbf{B}) \cup min(\mathbf{B}) >= \cup\{[P,Q]|P,Q \in (max(\mathbf{B}) \cup min(\mathbf{B}))\}$, entonces $\mathbf{B} \in< max(\mathbf{B}) \cup min(\mathbf{B}) >$.

3. $min(\mathbf{B}) \cup max(\mathbf{B})$ es el mínimo de la fibra.

   Demostración.

   Sea $\mathbf{A}$ un elemento de la fibra de $\mathbf{B}$ por la función generado. Luego:

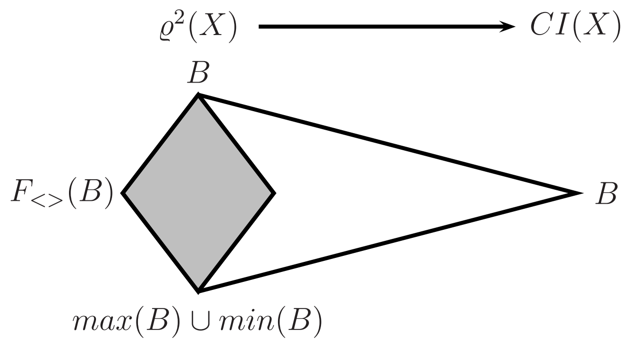
   $\{[P,Q]|P \in min\mathbf{A} \wedge Q \in max(\mathbf{A})\} = \mathbf{B}$

   Supongamos que $min(\mathbf{B}) \cup mx(\mathbf{B}) \subsetneq \mathbf{A}$, esto es existe $M \in \max(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{B}$ y $M \notin \mathbf{A}, M \in< \mathbf{A} >$ por lo tanto existe $P \in min(\mathbf{A})$ y $Q \in \max(\mathbf{A})$ tal que:

   $P \subseteq M \subseteq Q, Q \notin \mathbf{B}$ porque $M \in \max(\mathbf{B})$, de esta forma $Q \notin< \mathbf{A} >$ entonces $Q \notin \mathbf{A}$, esto contradice que $Q \in \max(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{A}$.

4. La fibra de una colección $\mathbf{B}$ cerrada para intervalos por la función generado es la familia de colecciones que están entre $\min(\mathbf{B}) \cup \max(\mathbf{B})$ y $\mathbf{B}$. En símbolos:

$$
\begin{aligned}
F <> (\mathbf{B}) &= [(min\mathbf{B} \cup max\mathbf{B}), \mathbf{B}]. \\
&= \{\mathcal{C}|min\mathbf{B} \cup max\mathbf{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathbf{B}\}
\end{aligned}
$$



Bibliografía

[1] DAVEY Y PRIESTLEY. Introduction to Latices and order. Cambridge University Press. 1994

[2] EISENBERG MURRAY. Axiomatic Theory of sets and classes. Holt, Rinehar and Winston. INC.1971

[3] FERNÁNDEZ P. Y SARMIENTO E. Colecciones cerradas para subconjuntos. Cursillo Coloquio Distrital de Matemáticas. Diciembre de 2000 U.P.N.

[4] GRAVER, J & WATKINS, M. Combinatories with emphasis on the Theory of Graphs. Springer Verlag. 1977

[5] MUÑOZ J. Introducción a la Teoría de Conjuntos. U. N. 1993

[6] PINZON, A. Conjuntos y Estructuras. Harla. 1973

[7] RUIZ C.J. Teoría de la Adjunción. Trabajo de año Sabático. U.N. 1989

[8] SARMIENTO EDILBERTO. Colecciones cerradas para complemento. Memorias encuentro de Geometría Junio de 2000 U.P.N