COMPACTACIONES POR FINITOS PUNTOS

Marcela Rubio[1]
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia.

Resumen.

Se presentan sin demostración[2] algunos resultados sobre la colección de compactaciones por finitos puntos de un espacio topológico: Las relaciones entre diferentes métodos de compactación por finitos puntos, el comportamiento de ciertos cocientes topológicos de compactaciones por finitos puntos y la extensión del método de compactación OLA a espacios no compactos en general.

1 Introducción.

Los espacios compactos son de gran importancia en muchos resultados de diversas ramas de las matemáticas, varios teoremas importantes dependen fuertemente del supuesto que ciertos espacios son compactos. En Cálculo, por ejemplo, el teorema fundamental, el de Rolle, y el del valor medio, dependen de la compacidad; también, las funciones continuas tienen máximos o mínimos locales y su continuidad es uniforme, solamente en subconjuntos compactos (cerrados y acotados) de $\mathbb{R}$. En realidad, las propiedades de los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ fueron la inspiración para la definición de compacidad para espacios topológicos en general.

Así, cuando un espacio no es compacto, es útil buscar una compactación de él.

Definición.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Se llama **compactación** de (X, τ) a todo par $((Y, \mu), f)$, donde:

[1]En este resumen se presentan algunos resultados obtenidos en mi tesis de Maestría, la cual fue dirigida por el Doctor Lorenzo Acosta.

[2]Las demostraciones pueden ser consultadas en [11].

1. f es un homeomorfismo de (X, τ) en $\left(f(X), \mu \mid_{f(X)}\right)$,
2. $f(X)$ es denso en (Y, μ) y
3. (Y, μ) es un espacio topológico compacto.

Se dice que $((Y, \mu), f)$ es una compactación de (X, τ) por finitos puntos, si $Y \setminus f(X)$ es finito. Sea $n \in \mathbb{N}$, $((Y, \mu), f)$ es una compactación de (X, τ) por n puntos, si $|Y \setminus f(X)| = n$.

En esta definición puede suponerse que X es un subespacio de Y y que la función considerada es simplemente la inclusión. Así, salvo homeomorfismos, una compactación de (X, τ) es un espacio compacto (Y, μ) que contiene a X como subespacio denso.

Ejemplos:

- Si $X = (0, 1)$:
  1. $[0, 1]$ es una compactación de X por dos puntos.
  2. S^1, el círculo unitario, es una compactación de X por un punto.
- S^2,la esfera unitaria, es una compactación de $\mathbb{C}$ por un punto.
- En $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{B_r(x)}$ es una compactación de $B_r(x)$ por infinitos puntos.
- Si $A = (0, 1) \cup (2, 3)$:
  1. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1, \acute{o}, (x+1)^2 + y^2 = 1\right\}$ es una compactación de A por un punto.
  2. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1, \acute{o}, (x+2)^2 + y^2 = 1\right\}$ es una compactación de A por dos puntos.
  3. $[0, 1] \cup [2, 3]$ es una compactación de A por cuatro puntos.

2 Métodos de Compactación conocidos.

2.1 Por un punto:

La Compactaión de Alexandrov.

Sean (X, τ) un espacio topológico no compacto y $X_1 = X \cup \{\omega\}$, donde ω es un punto que no pertenece a X.
Si $\eta = \tau \cup \{A \cup \{\omega\} \mid A \in \tau \ \wedge \ X \setminus A \text{ es compacto}\}$, entonces (X_1, η) es una compactación de (X, τ) por un punto, llamada la *compactación de Alexandrov* de (X, τ) .

Esta compactación tiene las siguientes propiedades[3]:

- La compactación de Alexandrov de (X, τ) es la más grande de las compactaciones de (X, τ) por un punto.
- Cuando (X, τ) es de Hausdorff y localmente compacto, la compactación de Alexandrov de (X, τ) es la única de las compactaciones de (X, τ) por un punto que resulta ser de Hausdorff.

Las Compacataciones OLA.

Las compactaciones OLA representan otro método de compactación por un punto, para espacios topológicos T_0 y no compactos. Para presentarlas son necesarios algunos conceptos previos.

Definiciones:

1. Sean R una relación de orden sobre un conjunto X y $x \in X$. Se dice que x es un **minimal** de R si

$$y \in X \quad \wedge \quad y \; R \; x \Rightarrow y = x.$$

[3]Para ampliar esta información puede consultarse [9].

2. Sea (X,τ) un espacio topológico. Se define la relación $\alpha(\tau)$ sobre X por

$$\alpha(\tau) = \{(x,y) \in X \times X \mid x \in adh_\tau \{y\}\}.$$

- $\alpha(\tau)$ es en general una relación de preorden.
- Si (X,τ) es T_0, $\alpha(\tau)$ es una relación de orden: **Orden de especialización,** cuyos minimales son precisamente los puntos cerrados.

3. Sea (X,τ) un espacio topológico T_0. Se definen los siguientes subconjuntos:

$$M_\tau = \{x \in X \mid \{x\} = adh_\tau \{x\}\}$$
$$L_\tau = \{x \in X \mid adh_\tau \{x\} \cap M_\tau = \emptyset\},$$

el primero, el conjunto de los puntos cerrados de (X,τ) (ó minimales de $(X,\alpha(\tau)))$ y el segundo, el conjunto de los puntos que en su adherencia no tienen puntos cerrados.

Proposición. *Sean (X,τ) un espacio topológico T_0, no compacto; $X_1 = X \cup \{\omega\}$, donde ω es un punto que no pertenece a X, y*

$$\tau_A = \tau \cup \{G \cup \{\omega\} \mid G \in \tau \ \wedge \ A \subseteq G\},$$

donde $A = (M_\tau \setminus B) \cup L_\tau$, $B \subseteq M_\tau$ finito.
*Entonces (X_1, τ_A) es una **compactación OLA**[4] de (X,τ).*

Es importante notar que existen compactaciones OLA de (X,τ) que no son la compactación de Alexandrov, como lo garantiza la siguiente propiedad, tomada de [5].

Propiedad: *Sea τ una topología T_0 sobre X, no compacta y U-Scott $(\sigma(\alpha(\tau)) \subseteq \tau)$. El compactado de Alexandrov de (X,τ) es de la forma OLA si y sólo si $\alpha(\tau)$, el orden de especialización, tiene finitos minimales.*

[4]Esta noción fue introducida por Lorenzo Acosta y Epifanio Lozano en [5].

Por ejemplo, considérese el espacio topológico $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Es claro que $\alpha(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \triangle_{\mathbb{N}} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ y por tanto el compactado de Alexandrov de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ no es de tipo OLA.

2.2 Por n puntos:

Fijamos (X,τ) no compacto, $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X \cup \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ donde $\omega_1, ..., \omega_n$ son n puntos distintos que no pertenecen a X.

Topologías y Compactaciones Estelares.

Si X contiene n subconjuntos abiertos U_i, $i = 1, ..., n$, entonces

$$\mathcal{B} = \tau \cup \{(U_i \setminus K) \cup \{\omega_i\} \mid K \subseteq X \text{ es cerrado-compacto; } i \in \{1, ..., n\}\}$$

es base de una topología μ sobre X_n, la cual es llamada **topología estelar**[5] asociada a $U_1, ..., U_n$.

Notaremos $\mu = \langle\langle U_1, ..., U_n \rangle\rangle$ a la topología estelar sobre X_n asociada a $U_1, ..., U_n$.

Proposición. (X_n, μ) *es una compactación de* (X,τ) *si y sólo si*

1. $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ *es compacto, y*
2. $U_i \nsubseteq K$ *para cada* K *subconjunto cerrado-compacto de* X*, para cada* $i \in \{1, ..., n\}$. (Implica que $U_i \neq \emptyset$, para cada i)

Compactaciones de Magill.

Si X contiene n subconjuntos abiertos no vacíos G_i, $i = 1, ..., n$; disyuntos dos a dos tales que:

[5] Tomada de [10].

1. $H = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ es compacto y
2. $X \setminus \bigcup_{j \neq i} G_j$ no es compacto para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

entonces

$\mathcal{B}^* = \tau \cup \{A \cup \{\omega_i\} \mid A \in \tau, (H \cup G_i) \cap (X \setminus A)$ es compacto en X; $i \in \{_1, ..., _n\}\}$

es base para una topología ρ sobre X_n.

Observemos que $H \cup G_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} G_j$ para cada $i \in \{_1, ..., _n\}$.

Proposiciones[6]**:**

1. *(X_n, ρ) es una compactación de (X, τ) por n puntos.*
2. *Si (X, τ) es localmente compacto y T_2 entonces (X_n, ρ) es T_2.*

3 La Colección de Compactaciones por Finitos Puntos.

Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto. Llamamos $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\}$ un conjunto de puntos distintos que no pertenecen a X y $X_0 = X$, $X_n = X_{n-1} \cup \{\omega_n\} = X \cup \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ para $n \geq 1$. Así, salvo homeomorfismos, toda compactación de (X, τ) por n puntos se puede ver como X_n dotado de una topología conveniente, de modo que X es un subespacio de la compactación. Para $n \geq 1$ definimos:

$$\mathcal{C}_n = \{\eta \in Top(X_n) \mid (X_n, \eta) \text{ es compactación de } (X, \tau)\}.$$

Definición. Diremos que una compactación (Y, μ) de (X, τ) es una compactación de **Clase A** si $X \in \mu$ ó equivalentemente si $\tau \subseteq \mu$.

$$\mathcal{AC}_n = \{\eta \in Top(X_n) \mid (X_n, \eta) \text{ es compactación de } (X, \tau) \wedge X \in \eta\}.$$

[6] Consultar [6] para más detalles.

Observaciones:

1. Las compactaciones mencionadas: OLA, Alexandrov, estelares y de Magill son todas de clase A.
2. Si (X_n, μ) es una compactación T_1 de (X, τ) entonces (X_n, μ) es de clase A.
3. X es abierto en cualquier compactación de (X, τ) por un punto, es decir, $\mathcal{AC}_1 = \mathcal{C}_1$.
4. Veremos que la observación anterior no se puede generalizar para compactaciones por más de un punto.

Definición. Un espacio topológico (Y, υ) se dice **hiperconexo** si $\upsilon \setminus \{\emptyset\}$ es una colección cerrada para intersecciones finitas, es decir, si cada par de abiertos no vacíos tiene intersección no vacía.

Ejemplos:

- Son hiperconexos:
  1. (Y, φ), donde Y es un conjunto infinito y φ es la topología de cofinitos.
  2. $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología con base $\{(-a, a) \subset \mathbb{R} \,|a > 0\}$.
  3. $(\mathbb{R}, \mu)$, donde μ es la topología con base $\{(a, +\infty) \subset \mathbb{R} \,|a \in \mathbb{R}\}$.
- No es hiperconexo: $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Proposición. *Si (X, τ) es un espacio topológico hiperconexo, no compacto, entonces, para $n > 1$, (X_n, μ) es una compactación de (X, τ) por más de un punto que no es de clase A, donde*

$$\mu = \{A \cup \{\omega_1\} \mid A \in \tau \setminus \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, X_n\}.$$

4 Cocientes de Compactaciones por Finitos Puntos.

Se presentan dos resultados interesantes referentes al comportamiento de cocientes de compactaciones de clase A, en los cuales se hace una identificación entre los puntos adicionales.

Teorema 1. *Sea (X_n, μ) una compactación de clase A de (X, τ) por n puntos, $n > 1$.*
Si definimos una relación de equivalencia R en $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ y si $\diamond = R \cup \{(x, x) \mid x \in X\}$, entonces $(X_n/\diamond, \mu/\diamond)$ es una compactación de clase A de (X, τ) por m puntos, donde
$m = |\{\omega_1, ..., \omega_n\}/R| \leq n$.

- Si en el teorema anterior (X_n, μ) es una compactación T_2, entonces $(X_n/\diamond, \mu/\diamond)$ también es una compactación T_2.

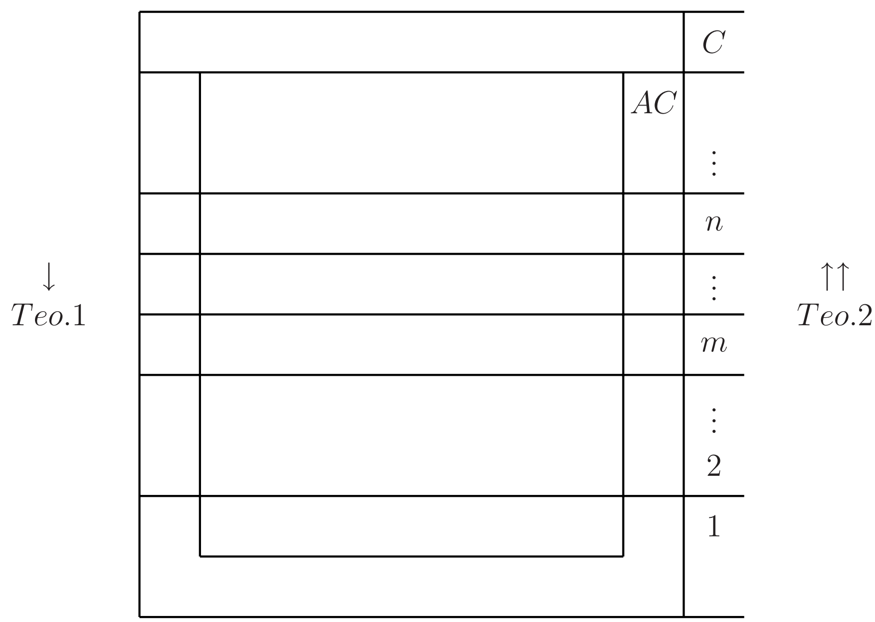
Teorema 2. *Si (X_m, μ) es una compactación de clase A de (X, τ) por m puntos, entonces para todo $n > m$ existe (X_n, β) una compactación de clase A de (X, τ) por n puntos, tal que $(X_n/\diamond, \beta/\diamond) \cong (X_m, \mu)$ para cierta relación de equivalencia $\diamond$ sobre X_n.*

Basta cosiderar:

$$\beta = \mu \cup \{B \cup A \mid B \subseteq \{\omega_{m+1}, ..., \omega_n\}; A \in \mu \ , \ \{\omega_1\} \cup A \in \mu\},$$

donde $\diamond$ relaciona $\omega_1, \omega_{m+1}, ..., \omega_n$ entre sí. Cabe anotar que ésta no es la única forma de construir a β.

En el siguiente esquema se resume lo que se ha presentado hasta el momento:



5 Compataciones de Clase A y Orden

Sea $\mathcal{AC} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{AC}_n$ la colección de compactaciones de clase A de (X, τ) por finitos puntos. Se tienen las siguientes observaciones.

- $(\mathcal{AC}_n, \subseteq)$ y $(\mathcal{AC}, \subseteq)$ son conjuntos ordenados.
- Para cada $n \geq 1$, $(\mathcal{AC}_n, \subseteq)$ es estable por intersecciones de colecciones no vacías.
- El cambio de nivel entre compactaciones de clase A, a través de los cocientes definidos anteriormente, respeta intersecciones de colecciones no vacías.
- $(\mathcal{AC}_1, \subseteq)$ es un retículo completo, con:

1. Elemento mínimo (X_1, μ), donde $\mu = \tau \cup \{X_1\}$.
2. Elemento máximo (X_1, λ), donde λ es la compactación de Alexandrov de (X, τ).

- Obsérvese que para $n > 1$, $(\mathcal{AC}_n, \subseteq)$ no es un retículo completo:

1. Tiene elemento mínimo (X_n, μ), donde $\mu = \tau \cup \{X_n\}$.
2. Carece de elemento máximo. No se tiene extremo superior para cualquier par de elementos de $\mathcal{AC}_n$.

Ejemplo: Sean $X = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual y dos compactaciones estelares de X por dos puntos: $\eta = \langle\langle U_1, U_2\rangle\rangle$, $\beta = \langle\langle V_1, V_2\rangle\rangle$, con $U_1 = \left(0, \frac{1}{4}\right) = V_2$, $U_2 = \left(\frac{3}{4}, 1\right) = V_1$.
Cualquier cota superior de η y β debe contener a la topología generada por η y β : $\langle \eta \cup \beta\rangle$, pero $(X_2, \langle \eta \cup \beta\rangle)$ no es una compactación de X, puesto que X no es denso en X_2 :
$\{\omega_1\} = [\{\omega_1\} \cup U_1] \cap [\{\omega_1\} \cup V_1] \in \langle \eta \cup \beta\rangle$ y por tanto, tampoco lo será cualquier cota superior.

5.1 Para Compactaciones Estelares.

Notaremos

$$\mathbf{E_n} = \{\mu \in Top(X_n) \mid (X_n, \mu) \text{es una compactación estelar de} (X, \tau)\}$$

es claro que todas las compactaciones de $\mathcal{E}_n$ son de clase A.
Los siguientes son algunos de los resultados obtenidos con respecto a la relación de orden entre compactaciones estelares.

- $(\mathcal{E}_n, \subseteq)$ tiene como elemento mínimo a $\Omega = \langle\langle U_1, ..., U_n\rangle\rangle$, donde $U_i = X$ para cada i.

- Para $n = 1 : \Omega = \langle\langle X \rangle\rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$, donde

$$\mathcal{B} = \tau \cup \{\{\omega_1\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ cerrado-compacto}\}.$$

  Ω es la *compactación de Alexandrov* de (X, τ), de modo que Ω es la **única** compactación estelar de (X, τ) por un punto.

- Sean $\mu = \langle\langle U_1, ..., U_n \rangle\rangle$, $\beta = \langle\langle V_1, ..., V_n \rangle\rangle$ dos topologías estelares sobre X_n.

  Si $V_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $\mu \subseteq \beta$.

- La intersección de dos topologías (compactaciones) estelares es una topología (compactación) estelar:

  Si $\mu = \langle\langle U_1, ..., U_n \rangle\rangle$, $\beta = \langle\langle V_1, ..., V_n \rangle\rangle$ entonces $\mu \cap \beta = \eta$, donde $\eta = \langle\langle U_1 \cup V_1, ..., U_n \cup V_n \rangle\rangle$.

En conclusión, $\mathcal{E}_n$ es una colección estable para intersecciones finitas.

6 Cocientes de Compactaciones Estelares.

Los cocientes de compactaciones de clase A, descritos anteriormente, se comportan de manera interesante en el caso de las compactaciones estelares.

- Si (X_n, μ) es una compactación estelar de (X, τ) por n puntos, donde $\mu = \langle\langle U_1, ..., U_n \rangle\rangle$ y $\diamond = \{(x, x) \mid x \in X_n\} \cup R$ en X_n, donde R es una relación de equivalencia en $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, entonces $(X_n/\diamond, \mu/\diamond)$ es una compactación **estelar** de (X, τ), con $\mu/\diamond = \langle\langle M_1, ..., M_m \rangle\rangle$ donde $M_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} U_{ij}$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

Ejemplo:
Si $\diamond$ identifica solamente a ω_1 con ω_2 en X_n entonces, en X_{n-1} se tiene:

$$\mu/\diamond \ = \langle\langle U_1 \cup U_2, U_3, ..., U_n \rangle\rangle = \langle\langle U_1, U_3, ..., U_n \rangle\rangle \cap \langle\langle U_2, U_3, ..., U_n \rangle\rangle .$$

- Si (X_m, μ) con $\mu = \langle\langle U_1, ..., U_m \rangle\rangle$ es una compactación estelar de (X, τ) por m puntos, entonces (X_n, β) con

$$\beta = \langle\langle U_1, U_2, ..., U_m, U_1, ..., U_1 \rangle\rangle$$

es una compactación estelar de (X, τ) por n puntos, $n \geq m$, tal que cierto cociente de (X_n, β) es (X_m, μ).

Esta última observación sugiere gran variedad de opciones para construir la topología β.

Ejemplo:
$\beta = \langle\langle U_1, U_2, ..., U_7, U_4, U_3 \rangle\rangle$ es una compactación estelar de (X, τ) por 9 puntos obtenida a partir de la compactación estelar $\mu = \langle\langle U_1, ..., U_7 \rangle\rangle$ de (X, τ) por 7 puntos.
Además, si $\diamond$ es la relación de equivalencia sobre X_9 que identifica ω_4 con ω_8 y ω_3 con ω_9 entonces $(X_9/\diamond, \beta/\diamond)$ es la compactación (X_7, μ).

7 Relación entre las Compactaciones Estelares de Magill y OLA.

Sean $\mathcal{M}_n$: La colección de compactaciones de Magill de X por n puntos y $\mathcal{E}_{Dn}$: La colección de compactaciones estelares de X por n puntos, con abiertos generadores disyuntos dos a dos.

Se tienen los siguientes resultados:

- $\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_{Dn}$.

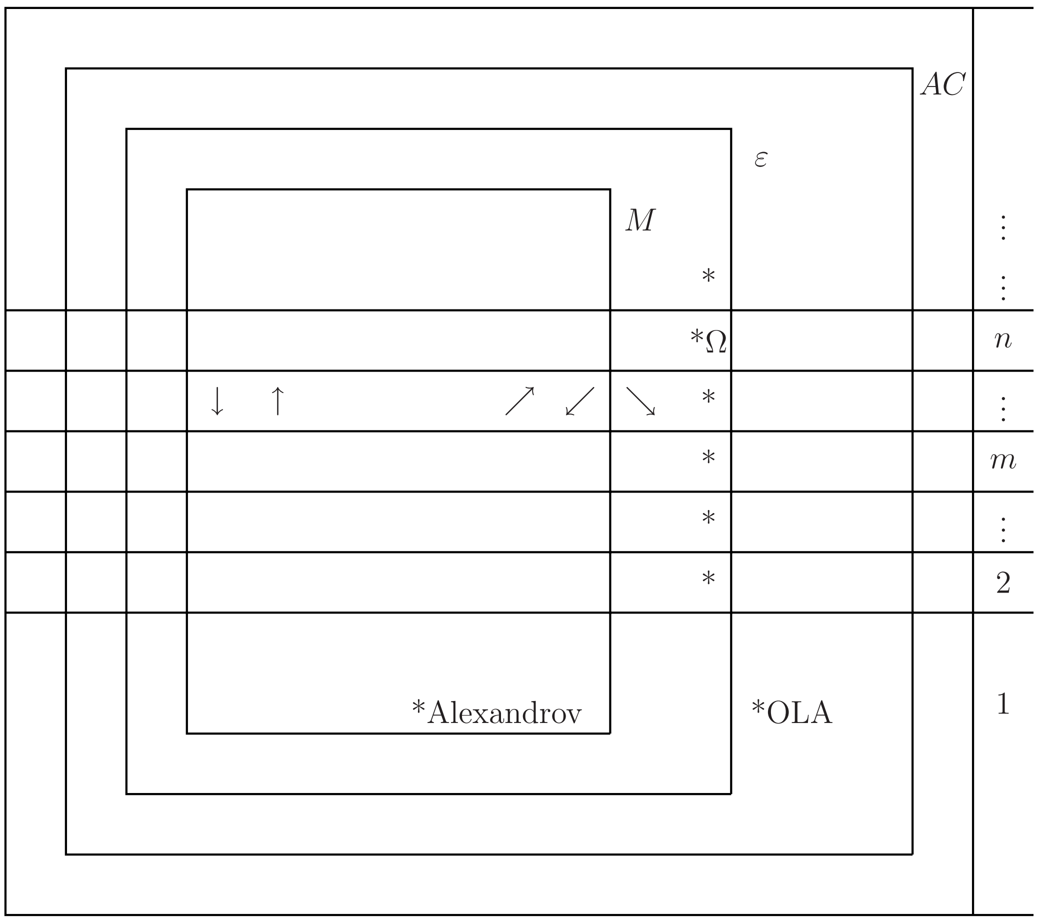
- Si (X_n, η) es una compactación de Magill de (X, τ) por n puntos y $(X_n/\diamond, \eta/\diamond)$ es el cociente ya definido, entonces $(X_n/\diamond, \eta/\diamond)$ es una compactación de Magill de (X, τ) por m puntos.

- Para $n > 1 : \mathcal{M}_n \subsetneqq \mathcal{E}_n$. Basta considerar (X_n, Ω) definido en la sección 5.1.

- Para $n \geq 1 : \mathcal{E}_n \subsetneqq \mathcal{AC}_n$. Consideremos (X_n, μ) donde $\mu = \{X_n\} \cup \tau$.

- Para $n = 1$: Existen compactaciones OLA de X que no son estelares, es decir que no son la compactación de Alexandrov, como se vió en la sección 2.1.

En el siguiente diagrama se resume el estudio hecho hasta el momento de la colección de compactaciones por finitos puntos de un espacio topológico.



En el caso de compactaciones de Hausdorff, siendo X T_2 y localmente compacto, se tiene que las colecciones de compactaciones de Magill de X por n puntos y de compactaciones estelares de X por n puntos coinciden y son todas las posibles compactaciones de Hausdorff de X por n puntos; siendo éste el caso encontrado usualmente en la literatura.

8 Una Generalización de las Compactaciones OLA.

Como se mencionó anteriormente las compactaciones OLA sólo se han definido para espacios T_0 y no compactos, en lo que sigue se hace una generalización de este método de compactación, a espacios no compactos simplemente.

8.1 Relaciones de Equivalencia con Abiertos Saturados.

En esta sección caracterizamos las relaciones de equivalencia definidas sobre un espacio topológico para las cuales los abiertos son saturados.

Sea (X,τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Consideremos el espacio cociente $X/_R$ con su topología cociente

$$\tau/_R = \{A \subseteq X/_R \mid \theta^{-1}(A) \in \tau\},$$

donde $\theta : X \longrightarrow X/_R : \theta(x) = \overline{x}$.

Se dice que un subconjunto B de X es $R-$**saturado**[7], si $\theta^{-1}(\theta(B)) = B$, es decir,

$$(\forall\ y \in B)(\ y\ R\ x \Longrightarrow x \in B).$$

Se tienen los siguientes resultados:

- Sean (X,τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Los abiertos de X son $R-$saturados si y sólo si $R \subseteq \sim_\tau$, donde

$$x \sim_\tau y \iff (x \in adh_\tau\{y\} \quad \wedge \quad y \in adh_\tau\{x\}).$$

[7]Tomada de [4].

- Si X es un espacio topológico T_0 y R es una relación de equivalencia sobre X tal que los abiertos de X son saturados, entonces $R = \Delta_X$.

Sean (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X tal que $R \subseteq \sim$, entonces:

- $\theta : (X, \tau) \longrightarrow (X/_R, \tau/_R)$ es una función abierta y cerrada.
- Los cerrados de X también son subconjuntos $R-$saturados.
- (X, τ) es compacto (conexo) si y sólo si $(X/_R, \tau/_R)$ es compacto (conexo).

8.2 Un Funtor Particular.

Consideremos la máxima de las relaciones de equivalencia definidas sobre un espacio topológico (X, τ), para las cuales los abiertos son saturados, es decir,

$$\sim \;\; = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in adh_\tau \{y\} \;\wedge\; y \in adh_\tau \{x\}\}.$$

Definimos el funtor $F : Top \longrightarrow Top$

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \mapsto & F(X, \tau) = (X/\sim, \tau/\sim) \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) = f_\sim 4 \\ (Y, \mu) & \mapsto & F(Y, \mu) = (Y \sim, \mu \sim) \end{array} \qquad \text{donde } f_\sim(\overline{x}) = \overline{f(x)}.$$

- θ es una transformación natural del funtor identidad en Top al funtor F.
- $(X/\sim, \tau/\sim)$ es T_0.

De modo que $F : Top \longrightarrow TopT_0 \subseteq Top$, donde $TopT_0$ es la categoría de los espacios topológicos T_0. F tiene las siguientes características:

- F es adjunto a izquierda del funtor inclusión $I : TopT_0 \longrightarrow Top$.
- F preserva co-límites e I preserva límites.

- F preserva y refleja compacidad, conexidad y compacidad y conexidad locales.
- F preserva productos y sub-espacios.
- F preserva y refleja sub-espacios densos.
- F preserva epimorfismos.
- F NO preserva monomorfismos.
- F NO refleja monomorfismos ni epimorfismos.
- F NO preserva igualadores y por lo tanto, F no es adjunto a derecha.
- F preserva y refleja topologías concordantes.

8.3 Relación del Funtor F con las Compactaciones.

- Si (X^*, τ^*) es una compactación de (X, τ) entonces $F(X^*, \tau^*)$ es una compactación de $F(X, \tau)$, es decir, F preserva compactaciones.

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \mapsto & F(X,\tau) = (X/\sim, \tau/\sim) \\ i\downarrow & & \downarrow i_{\sim} \\ (X^*,\tau^*) & \mapsto & F(X^*,\tau^*) = (X^*/\sim, \tau^*/\sim) \end{array}$$

- Si (X^*, τ^*) es una compactación de clase A de (X, τ) por n puntos tal que $X^* \setminus X$ es un sub-espacio T_0, entonces

  $F(X^*, \tau^*)$ es una compactación de clase A por n puntos de $F(X, \tau)$.

Además, si observamos que cuando (X^*, τ^*) es una compactación estelar de (X, τ) por n puntos, $X^* \setminus X = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ es un subespacio T_0 de (X^*, τ^*), entonces se tienen las siguientes propiedades:

(X^*, τ^*) es una compactación estelar de (X, τ) por n puntos, $\tau^* = \langle\langle U_1, \cdots, U_n \rangle\rangle$	$\Longrightarrow$	$F(X^*, \tau^*)$ es una compactación estelar de $F(X, \tau)$ por n puntos, $\tau^* \sim= \langle\langle \theta_X(U_1), \cdots, \theta_X(U_n) \rangle\rangle$
$\cdots$ de Alexandrov	$\Longrightarrow$	$\cdots$ es de Alexandrov
$\cdots$ de Magill	$\Longrightarrow$	$\cdots$ es de Magill

- F restringido a las funciones inyectivas refleja compactaciones, es decir, si $f : X \to Y$ es un morfismo uno a uno de Top y $F(f) : F(X) \to F(Y)$ es una compactación, entonces f es una compactación.

8.4 Un Isomorfismo.

Sea (X, τ) un espacio no compacto. Notamos:
$\mathcal{K}$: la colección de compactaciones (X^*, μ) de clase A de (X, τ) por n puntos, tales que $X^* \setminus X$ es un sub-espacio T_0 de X^*, donde $X^* = X \cup \{\omega_1, ..., \omega_n\}$.
Recordemos que, como (X, τ) un espacio no compacto, entonces $(X/\sim, \tau/\sim)$ es no compacto; sea, $\mathcal{K}_o$: la colección de compactaciones $((X/\sim)^*, \eta)$ T_0, de clase A de $(X/\sim, \tau/\sim)$ por n puntos, donde $(X/\sim)^* = X/\sim \cup \{v_1, ..., v_n\}$.

Se tiene que $c = F\mid_{\mathcal{K}}$.

$$\mathcal{K} \; \underset{\xleftarrow{r}}{\xrightarrow{c}} \; \mathcal{K}_o$$

- c es un isomorfismo de conjuntos ordenados entre las colecciones de compactaciones $(\mathcal{K}, \leq)$ y $(\mathcal{K}_o, \leq)$, donde cada orden es el inducido por la inclusión. Llamaremos r a la inversa de c.

Comportamiento de r con las Compactaciones Estelares.

Puesto que las compactaciones estelares de un espacio T_0 y no compacto, son compactaciones T_0 de clase A, al estudiar el comportamiento de r con las compactaciones estelares se obtuvieron las siguientes implicaciones:

Top		*TopT*$_0$
$r((X/\sim)^*,(\tau/\sim)^*)$ es un compactación estelar de (X,τ) por n puntos $\tau^*=\left\langle\left\langle\theta_X^{-1}(V_1),\cdots,\theta_X^{-1}(V_1)\right\rangle\right\rangle$	$\Longleftarrow$	$((X/\sim)^*,(\tau/\sim)^*)$ es un compactación estelar de $((X/\sim),(\tau/\sim))$ por n puntos $(\tau/\sim)^*=\langle\langle V_1,\cdots,V_n\rangle\rangle$
$\cdots$ es de Alexandrov	$\Longleftarrow$	$\cdots$ de Alexandrov
$\cdots$ es de Magill	$\Longleftarrow$	$\cdots$ de Magill

8.5 El Funtor F y las Comactaciones de OLA.

Por medio del isomorfismo r vamos a extender del método de compactaciones OLA para espacios T_0 y no compactos a espacios no compactos en general.

Sea R una relación de **orden** sobre un conjunto X, se dice que:

$$x \text{ es } R-\textbf{minimal} \text{ si } \forall y\in X:\ y\ R\ x\Longrightarrow x=y.$$

Cuando la relación R es de **preorden** sobre X, podemos generalizar la definición de minimal de la siguiente manera:

$$x \text{ es } R-\textbf{minimal} \text{ si } \forall y\in X:\ y\ R\ x\Longrightarrow x\ R\ y.$$

Para el espacio (X,τ) se define el preorden de especialización $\alpha(\tau)$ sobre X por:

$$\alpha(\tau)=\{(x,y)\mid x\in adh_\tau\{y\}\},$$

el cual es de orden si el espacio (X,τ) es T_0.

Con este preorden $\alpha(\tau)$ sobre X consideremos los conjuntos:
$M_\tau=\{x\in X\mid x \text{ es } \alpha(\tau)-\text{minimal}\}$, el conjunto de los minimales de $(X,\alpha(\tau))$, y
$L_\tau=\{x\in X\mid adh_\tau\{x\}\cap M_\tau=\emptyset\}$, el conjunto de los puntos que en su adherencia no tienen minimales. Cuando (X,τ) es T_0, $M_\tau=\{x\in X\mid\{x\}=adh_\tau\{x\}\}$ es precisamente el conjunto de puntos los cerrados.

Por otra parte, sabemos que para el espacio topológico (X,τ) se tiene que $F(X,\tau) = (X/\sim, \tau/\sim)$ es un espacio T_0, para el cual $\alpha(\tau/\sim)$ es una relación de orden sobre $X/\sim$ y donde el conjunto de minimales $M_{\tau/\sim}$ coincide con el conjunto de puntos cerrados de $(X/\sim, \tau/\sim)$. Se tiene:

$$x \in M_\tau \Longleftrightarrow [x] \in M_{\tau/\sim}$$
$$x \in L_\tau \Longleftrightarrow [x] \in L_{\tau/\sim}.$$

Cuando (X,τ) no es compacto $F(X,\tau) = (X/\sim, \tau/\sim)$ tampoco lo es, y puesto que es un espacio T_0 podemos hacer una compactación OLA de $(X/\sim, \tau/\sim)$. Para ello, fijamos un subconjunto finito B de $M_{\tau/\sim}$ y construímos la compactación OLA de $(X/\sim, \tau/\sim)$ asociada a B, es decir, llamamos $A = L_{\tau/\sim} \cup \left(M_{\tau/\sim} \setminus B\right)$ y definimos

$$(\tau/\sim)^* = \tau/\sim \cup \{G \cup \{\upsilon\} \mid G \in \tau/\sim \wedge A \subseteq G\},$$

donde $\upsilon \notin X/\sim$.

La compactación resultante, $(X/\sim \cup \{\upsilon\}, (\tau/\sim)^*)$, es claramente T_0 y de clase A. Entonces $r(X/\sim \cup \{\upsilon\}, (\tau/\sim)^*) = (X^*, \tau^*)$ es una compactación de clase A de (X,τ) por un punto, donde:

- $X^* = X \cup \{\omega\}$, con $\omega \notin X$.
- $\tau^* = \tau \cup \{H \cup \{\omega\} \mid H \in \tau \wedge W \subseteq H\}$, donde $W = \theta_X^{-1}(A)$.
- $W = L_\tau \cup (M_\tau \setminus K)$ donde K es un subconjunto de M_τ para el cual existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow_{\alpha(\tau)} x_i$.

A esta compactación (X^*, τ^*) de (X,τ) la llamaremos **compactación OLA** y es precisamente la generalización de la compactación OLA para espacios no compactos y T_0 a espacios topológicos no compactos arbitrarios.

Bibliografía

[1] Acosta, L. y Lozano, E., Una caracterización de las topologías compactas

[2] T_0, Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, Vol. VI, No 2, (1999), 77-84.

[3] Blankespoor, J. and Krueger, J., Compactifications of topological spaces, Electronic Journal of Undergraduate Mathematics, Furman University, Vol. 2, (1996), 1-5.

[4] Bourbaki, N., Elements of Mathematics, General Topology, Addison-Wesley, France, 1968.

[5] Bourbaki, N., Elements of Mathematics, Theory of sets, Addison-Wesley, France, 1968.

[6] Lozano, E., Sobre algunas topologías concordantes, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, 2000.

[7] Magill, K. D. Jr., N-point compactifications, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1075-1081.

[8] Margalef, J. et al., Topología, Vol. 3, Alhambra, Madrid, 1980.

[9] Munkres, J. R., Topology a First Course, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[10] Murdeshwar, M., General Topology, John Wiley Sons, New York, 1983.

[11] Nakassis, T. and Papastavridis, S., On compactifying a topological space by adding a finite number of points, Bull. Soc. Math., Grece, 17 (1976), 59-65.

[12] Rubio, I., Extensiones topológicas y compactaciones por finitos puntos, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[13] Ruíz, C. y Blanco, L., Acerca del compactificado de Alexandroff, Bol. Mat. (3), 20 (1986), 163-171.

[14] Willard, S., General Topology, Addison-Wesley, Publishing Company, 1970.