UN CRITERIO UNIVERSAL DE DIVISIBILIDAD

Fernando Ruíz Guzmán.
Profesor de Matemáticas
Universidad "Sergio Arboleda"

Juan Manuel Carvajal Calderón.
Profesor de Matemáticas
Universidad "Sergio Arboleda"

Aunque en la popular ARITMÉTICA, del profesor Aurelio BALDOR los criterios de divisibilidad son estudiados en el capítulo XVIII bajo el título "CARACTERES DE DIVISIBILIDAD", lo cierto es que éstos son muy poco conocidos y recordados. Los criterios de divisibilidad más utilizados por la necesidad y simplicidad práctica son los de 2, 3, 5, 10; un poco menos conocidos y más complejos son los de 4, 6, 8, 9, 11, 12 y muy difícilmente se comprenden y recuerdan los criterios de 7, 13, 17, 19, 23, etc.

A continuación se presenta un ***criterio de divisibilidad***, el cual permite resolver genéricamente la pregunta siguiente: ¿Cuándo b ($b \in \mathbb{Z}^*$) es un divisor de n ($n \in \mathbb{Z}$)? o ¿Cuándo n ($n \in \mathbb{Z}$) es divisible por b ($b \in \mathbb{Z}^*$)?, además, este criterio es de fácil evocación y de sencilla aplicación.

Teorema 1. *Si $c|ab$, y, c es primo relativo con b, entonces, $c|a$*

Teorema 2. *Si g es el máximo común divisor de a y b, entonces, existen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tales que $g = ax + by$*

Teorema 3. *Si la ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene solución y además $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es una solución particular de ella, entonces, la solución general de dicha ecuación está dada por:*

- $x = x_0 + (b/g)k$; *con* $k \in \mathbb{Z}$
- $y = y_0 + (a/g)k$; *con* $k \in \mathbb{Z}$

donde g es el máximo común divisor de a y b .

Criterio universal de divisibilidad, CUD.

Teorema 4. *Si b es un número entero no nulo y primo relativo con 10, entonces, existe a un número entero tal que para cualquier número natural n, donde $n = 10d + u$; $0 \leq u \leq 9$, se tiene que, $b|n \longleftrightarrow b|(d - au)$*

Demostración. Como b y 10 son primos relativos, entonces, el máximo común divisor de ellos es uno, es decir, $(b, 10) = 1$;
ahora por el teorema 2, existen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tales que $bx + 10y = 1$
si se hace $y = -a$, la ecuación anterior se transforma en $bx = 10a + 1$
pero como $n = 10d + u$
entonces $n = 10d - 10au + 10au + u$
o sea que $n = 10(d - au) + u(10a + 1)$
es decir $n = 10(d - au) + u(bx)$
o también $n = 10(d - au) + b(ux)$
por lo tanto $b|n$, si y solo si, $b|10(d - au)$
y por el teorema 1 se tiene que $b|n$, si y solo si, $b|(d - au)$ □

De otra parte, como existen infinitas parejas $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que satisfacen la ecuación $bx + 10y = 1$ y como además se ha supuesto que $y = -a$, entonces, tambien existen infinitas parejas $(x, -a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen la ecuación $bx - 10a = 1$. Por el teorema 3, podemos afirmar que la solución general de la ecuación diofántica anterior, para a, esta dada por la siguiente expresión $a = a_0 + bk$; donde $k \in \mathbb{Z}$ y a_0 es tal que $(x_0, a_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es una solución particular de la ecuación dada.
Ahora, la pregunta que interesa resolver es la siguiente: ¿Cómo se puede determinar un valor de a?. En la demostración del ***criterio universal de divisibilidad*** se obtuvo que $bx = 10a + 1$, es decir, que $(10a + 1)$ es un múltiplo de b que termina en 1. Por lo tanto, para establecer el valor de a, basta con determinar tal múltiplo de b, es decir, obtener el valor de x que satisface dicha igualdad y luego despejar a.

Proposición 1. *b es un número impar.*

Demostración. En efecto, como $bx = 10a+1$ lo es, entonces, b y x lo son. □

Por lo anteriormente dicho, como b es un número impar y primo relativo con 10, entonces, temina en una de las siguientes cifras 1, 3, 7, 9.

Ahora, "resolviendo" la ecuación diofántica $bx - 10a = 1$ o, lo que es lo mismo, $bx = 10a + 1$ se tiene que cada "forma numérica" de b implica una "forma numérica" de x. Es decir,

- si b termina en 1, entonces, x es de la forma $(10k + 1)$; con $k \in \mathbb{Z}$
- si b termina en 3, entonces, x es de la forma $(10k + 7)$; con $k \in \mathbb{Z}$
- si b termina en 7, entonces, x es de la forma $(10k + 3)$; con $k \in \mathbb{Z}$
- si b termina en 9, entonces, x es de la forma $(10k + 9)$; con $k \in \mathbb{Z}$

Con base en lo anterior, se obtiene el valor de a en la ecuación $bx - 1 = 10a$ y sus valores se presentan en la siguiente tabla:

b	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	$\cdots$
a	2	2	8	1	9	5	17	2	16	8	26	3	23	11	35	$\cdots$

Por el ***criterio universal de divisibilidad***, se puede afirmar, por ejemplo, que:

- $7|n$, si y solo si, $7|(d - 2u)$
- $13|n$, si y solo si, $13|(d - 9u)$
- $17|n$, si y solo si, $17|(d - 5u)$
- $19|n$, si y solo si, $19|(d - 17u)$
- $23|n$, si y solo si, $23|(d - 16u)$
- $\cdots\ \cdots\ \cdots$

Ejemplo 1. *¿ 335.257 es divisible por 13?*

Demostración. Según el ***criterio universal de divisibilidad*** (CUD) se tiene que:

$13|335.257 \leftrightarrow 13|(33.525 - (9)(7))$
$\leftrightarrow 13|(33.525 - 63)$
$\leftrightarrow 13|33.462 \leftrightarrow 13|(3.346 - (9)(2))$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow 13|(3.346-18)\\
&\leftrightarrow 13|3.328 \leftrightarrow 13|(332-(9)(8))\\
&\qquad\qquad\quad \leftrightarrow 13|(332-72)\\
&\qquad\qquad\quad \leftrightarrow 13|260 \leftrightarrow 13|(26-(9)(0))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leftrightarrow 13|(26-0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leftrightarrow 13|26 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Luego 335.257 SI es divisible por 13 □

Nota. El ***criterio universal de divisibilidad***, también se puede expresar haciendo uso de la relación de CONGRUENCIA. Esta forma permite abreviar los cálculos para determinar si un número b divide o no a un número n.

Criterio universal de divisibilidad.

Si $c \equiv a \pmod{b}$ y $n = 10d + u$; $0 \leq u \leq 9$, entonces, $b|n \leftrightarrow b|(d-u)$

Ejemplo 2. *¿335.257 es divisible por 13?*

Demostración. Si $c \equiv 9 \pmod{13}$ y como $335.257 = (10)(33.525) + 7$, entonces,

$$\begin{aligned}
13|335.257 &\leftrightarrow 13|(33.525-(4.780)(7))\\
&\leftrightarrow 13|(33.525-33.460)\\
&\leftrightarrow 13|65 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Luego 335.257 SI es divisible por 13 □

Bibliografía.

[1] APOSTOL, Tom M. (1.980) *Introducción a la teoría analítica de números.* Editorial Reverté, S.A.

[2] CILLERUELO, Javier. CÓRDOBA, Antonio (1.992) *La teoría de los números.* Editorial Mondadori España, S.A.

[3] KARATSUBA, A. (1.979) *Fundamentos de la teoría analítica de los números.* Editorial MIR.

[4] NIVEN, Ivan. ZUCKERMAN, Herbert (1.969) *Introducción a la teoría de los números*. Editorial Limusa.

[5] PETTOFREZZO, Anthony. BYRKIT, Donald (1.972) *Introducción a la teoría de los números*. Editorial Prentice/Hall Internacional.

[6] VINOGRADOV, Ivan (1.972) *Fundamentos de la teoría de los números.* Editorial MIR.