DINÁMICA SIMBÓLICA, CÓDIGOS Y GRAFOS

Joaquín Luna Torres
Universidad Sergio Arboleda.

Yolima Álvarez Polo
Universidad Distrital.

Resumen.

En éste escrito se relaciona una parte de los sistemas dinámicos, particularmente la dinamica simbólica con la teoria de códigos y se hace una representación mediante grafos dirigidos. Mediante algunos ejemplos se muestra tales relaciones.

1 Espacios completos de desplazamiento.

Para nuestros propósitos, un **alfabeto** es un conjunto finito de símbolos $\mathcal{A}$. Con este alfabeto se forman sucesiones bi-infinitas de símbolos,

$$x = \ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots , \quad x_i \in \mathcal{A}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

que se suelen escribir como $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, el índice i indica la i-ésima coordenada de x. Para algunos casos se específica cual es la coordenada 0, poniendo un punto decimal, que sirve para expresar el tiempo 0, por ejemplo.
A la colección de todas las sucesiones bi-infinitas de símbolos sobre $\mathcal{A}$ se le conoce como espacio completo de desplazamientos, que se define como sigue

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid x_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Cada sucesión es un punto para el espacio completo de desplazamientos.
Para indicar que $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, \ldots , r - 1\}$, se escribe espacio completo de r-desplazamientos.

1.1 Bloques.

Un *bloque* (o palabra) sobre $\mathcal{A}$ es una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{A}$. Se admite un bloque vacío (o palabra vacía) que se denota por e.

Se define la *longitud de un bloque* u como el número de símbolos que hay en u y se escribe $\mid u \mid$.
Así, $\mid e \mid = 0$.
Para indicar que $\mid u \mid = k$, cuando $u \neq e$, se suele decir que u es un k-bolque.
Un *subbloque* (o subplabra) de un k-bloque $u = a_1 a_2 \dots a_k$ es un boque de la forma
$a_i a_{i+1} \dots a_{j-1} a_j$ donde $1 \leq i \leq j \leq k$.
Note que e es subbloque de todo bloque.
Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \ \ i \leq j$, el bloque cerrado de coordenadas en x desde la posición i a la posición j se escribe $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j$

Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y w es un bloque de elementos de $\mathcal{A}$, se dice que w ocurre en x si existen i, j tales que $w = x_{[i,j]}$. Así, el bloque vacío ocurre en todo x, pues $e = x_{[1,0]}$.
Si $i > j$, se define $x_{[i,j]} = e$, bloque vacío.

El bloque semiabierto, $x_{[i,j)} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1}$

$x_{[i,\infty)} = x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots$ denota la sucesión infinita a la derecha.

$x_{(-\infty,i]} = \dots x_{i-2} x_{i-1} x_i$ denota la sucesión infinita a la izquierda.
$x_{[-k,k]} = x_{-k} x_{-k+1} \dots x_k$ se denomina el *bloque central de* x de longitud $2k + 1$.
En ocasiones, es necesario condicionar los bloques que no pueden aparecer y se considera un conjunto $\mathcal{F}$ de bloques no permitidos, conocido como *Bloques Olvidados*.
Dados dos bloques u y v, *la concatenación* uv es un nuevo bloque construido escribiendo u y a continuación v.
Así,

$$|uv| = |u| + |v|$$

Es claro que la concatenación de bloques no es una operación conmutativa y que e es el elemento neutro para esta operación.
Cuando se opera u consigo mismo n veces, el bloque que se obtiene se denota por u^n. Cuando $n = 0, \ \ u^0 := e$.
Para $m, n \leq 0$ se cumple la ley de los exponentes:

$$u^m u^n = u^{m+n}$$

La expresión u^∞ representa a $\ldots uuu.uuu\ldots$.

2 La función desplazamiento.

Una manera de relacionar los espacios de desplazamientos es mediante una función lineal, conocida como función desplazamiento,

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto \sigma(x) = y \end{aligned} \tag{1}$$

donde la i-ésima coordenada de y corresponde a la $(i+1)$-ésima coordenada de x, es decir,
Si

$$x = \ldots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\ldots$$

entonces

$$\sigma(x) = \ldots x_{-2}x_{-1}x_0.x_1x_2\ldots$$

Esta función es biyectiva y cada vez que se aplica desplaza el punto decimal un lugar a la derecha, lo que se puede interpretar como el transcurrir del tiempo en una unidad. Su inversa indica el fenómeno opuesto.
Un subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que se conserva invariante bajo σ se llama un *desplazamiento invariante*.

La expresión σ^n representa la composición de σ consigo misma n veces.

Un punto x es *periódico para* σ si $\sigma^n(x) = x$, para algún $n \geq 1$. Cuando $n = 1$ se dice que x es un *punto fijo*.
Note que un punto de período n tiene la forma u^∞ para algún bloque u y un punto fijo es de la forma a^∞ para algún símbolo a.

3 Espacios de desplazamiento.

Sea $\mathcal{F}$ la colección de *bloques olvidados* sobre $\mathcal{A}$, esta colección puede ser finita o infinita.
Para algún $\mathcal{F}$, se define $\mathbb{X} = X_{\mathcal{F}}$ como el subconjunto de sucesiones en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que no contienen un bloque en $\mathcal{F}$ que se denomina *espacio de desplazamiento*.

Note que X representa la operación de formar el espacio de desplazamiento y $\mathbb{X}$ denota el espacio resultante.

Ejemplo 3.1. *Desplazamiento en proporción áurea.*
Considere $\mathcal{A} = \{0,1\}$, $\mathcal{F} = \{11\}$ *y* $\mathbb{X} = X_{\mathcal{F}}$ *corresponde a sucesiones binarias donde no pueden haber dos unos consecutivos.*

Es claro que si se cambia la colección $\mathcal{F}$, el espacio de desplazamiento es distinto.
En algunos casos, es preciso describir un espacio de desplazamiento por los bloques permitidos más que por los bloques olvidados.

Ejemplo 3.2. *Desplazamiento par*
Considere $\mathcal{A} = \{0,1\}$, $\mathcal{F} = \{10^{2n+1}1\} \mid n \geq 0$ *y* $\mathbb{X} = X_{\mathcal{F}}$ *corresponde a sucesiones binarias donde no puede haber un número impar de ceros entre dos unos.*

4 Lenguajes.

Sea $\mathbb{X} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un espacio de desplazamiento y $B_n(\mathbb{X})$ el conjunto de todos los n-bloques que ocurren en puntos de $\mathbb{X}$. El *lenguaje* de $\mathbb{X}$ es la colección de bloques permitidos en $\mathbb{X}$, esto es,

$$\mathcal{L} = B(\mathbb{X}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(\mathbb{X})$$

que cumple:
Si $w \in \mathcal{L}$ entonces

1. Todo subbloque de w está también en $\mathcal{L}$
2. Existen bloques no vacíos u y v tales que $uwv \in \mathcal{L}$

Para el desplazamiento en proporción áurea,
$B(\mathbb{X}) = \{e, 0, 1, 00, 01, 10, 000, 001, 010, 100 \ldots\}$

Un espacio de desplazamiento $\mathbb{X}$ se dice *irreducible* si para todo par de bloques $u, v \in B(\mathbb{X})$ existe $w \in B(\mathbb{X})$ tal que $uwv \in B(\mathbb{X})$.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de desplazamiento sobre $\mathcal{A}$ y $B_N(\mathbb{X}) = \mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[N]}$ la colección de todos los
N-bloques en $\mathbb{X}$.
Si se considera $\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[N]}$ como un nuevo alfabeto se forma el espacio completo $(\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ de *bloques superiores.*

5 Códigos.

Los códigos aparecen de manera natural a través de una función particular. El N-*Código de bloques superiores* está definido por la imagen de la función

$$\begin{aligned} \beta_N : \mathbb{X} &\longrightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[N]})^{\mathbb{Z}} \\ x_{[i]} &\mapsto x_{[i,i+N-1]} \end{aligned}$$

La función β_N reemplaza la i-ésima coordenada de x por el bloque de coordenadas de x, de longitud N, que empieza en la posición i.

Ejemplo 5.1. *Si $N = 4$, la imagen de $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ bajo β_4 tiene la forma*

$$\beta_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \dots$$

y es un elemento de $(\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[4]})^{\mathbb{Z}}$.

Note que hay traslapamiento de bloques.
Si $\mathbb{X}$ es el desplazamiento en proporción áurea entonces

$$\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[2]} = \{00, 01, 10\} = \{a, b, c\}.$$

$\mathbb{X}^{[2]}$ se describe mediante la restricción
$\mathcal{F} = \{ac, ba, bb, cc\}$.

El N-*Código potencia superior* está definido por la imagen de la función

$$\begin{aligned} \gamma_N : \mathbb{X} &\longrightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[N]})^{\mathbb{Z}} \\ x_{[i]} &\mapsto x_{[iN, iN+N-1]} \end{aligned}$$

Obsérvese que γ_N corta la sucesión x formando N-bloques consecutivos.

Ejemplo 5.2. *Si* $N = 4$ *y* $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$,

$$\gamma_4(x) = \ldots \begin{bmatrix} x_{-5} \\ x_{-6} \\ x_{-7} \\ x_{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \\ x_{-4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{3} \\ x_{2} \\ x_{1} \\ x_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{7} \\ x_{6} \\ x_{5} \\ x_{4} \end{bmatrix} \ldots$$

y está en $(\mathcal{A}_{\mathbb{X}}^{[4]})^{\mathbb{Z}}$.

Fíjese que aquí no hay traslapamiento de bloques.
Para nuestro ejemplo, el espacio de segundas potencias superiores $\mathbb{X}^2$ queda desrito por
$\mathcal{F} = \{bc\}$, donde las palabras que contienen
$bc = 0110$ son las únicas que se olvidan, siguiendo la restricción 11 del espacio de desplazamientos original.

Ahora, se consideran dos alfabetos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{U}$.
Sean
$x = \ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots \quad \in \mathbb{X}$ sobre $\mathcal{A}$ y
$y = \ldots y_{-1}y_0y_1 \ldots \quad \in \mathbb{X}$ sobre $\mathcal{U}$
m y $n \in \ \mathbb{Z}$ tales que $-m \leq n$

Se define

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathcal{U}^{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto y = \phi(x) \end{aligned}$$

donde la i-ésima coordenada de y queda determinada por la *función de bloque fijo* también llamada *función de* $(m+n+1)$*-bloques*, que transforma $m+n+1$-bloques permitidos en X en símbolos de $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \Phi : B_{m+n+1}(\mathbb{X}) &\longrightarrow \mathcal{U} \\ x_{[i-m, i+n]} &\mapsto \Phi(x_{[i-m, i+n]}) = y_i \end{aligned}$$

Note que ϕ se define a partir de Φ y por tanto, $\phi := \Phi_{\infty}^{[-m,n]}$

A la imagen bajo ϕ se le conoce como *Código de bloques deslizantes* con *memoria m* y *anticipación n*

Si $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ y $\phi(\mathbb{X}) \subseteq Y$, el código de bloques deslizantes se describe por $\phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$

Ejemplo 5.3. $\mathcal{A} = \mathcal{U} = \{0, 1\}$, $\mathbb{X}$ *el espacio de desplazamientos en proporción áurea y* $\mathbb{Y}$ *el espacio de desplazamientos par. Sea* Φ *la función de* 2*-bloques definida por*

$$\Phi(00) = 1, \quad \Phi(01) = 0, \quad \Phi(10) = 0$$

Sean $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ espacios de desplazamientos.
Si $\phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es un código de bloques deslizantes, $\sigma_{\mathbb{X}}$ y $\sigma_{\mathbb{Y}}$ son las funciones desplazamiento, respectivas, entonces

$$\phi \circ \sigma_{\mathbb{X}} = \sigma_{\mathbb{Y}} \circ \phi$$

Obsérvese que ϕ conmuta con σ.

6 Espacios de desplazamientos de tipo finito.

Cuando $\mathcal{F}$ es un conjunto finito, $\mathbb{X} = X_{\mathcal{F}}$ se denomina un *espacio de desplazamientos de tipo finito (DTF).*

Observe que el espacio de desplazamientos en proporción áurea es de tipo finito, ya que $\mathcal{F} = \{11\}$, mientras que el espacio de desplazamientos pares no lo es.

La *memoria m* de un espacio DTF se indica por una colección de bloques olvidados de longitud $m + 1$.

7 Espacios conjugados.

Ahora queremos relacionar espacios de desplazamiento mediante códigos especiales, que nos permitan detectar invariantes en las estructuras que estamos trabajando. Para tal fin consideramos, un código de bloques deslizantes $\phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ que es una *conjugación de* $\mathbb{X}$ *en* $\mathbb{Y}$ *si es uno a uno y sobre.*
Si $\mathbb{X}$ *y* $\mathbb{Y}$ *son conjugados, se escribe* $\mathbb{X} \backsimeq \mathbb{Y}$

El número de puntos periódicos es un invariante por conjugación.
Si un espacio de desplazamientos D es conjugado con un espacio de desplazamiento de tipo finito entonces D es un espacio de desplazamiento de tipo finito, por ejemplo.

8 Grafos Dirigidos.

Un *grafo* G está formado por
un conjunto $V = V(G)$ de *vértices* $V = V(G)$ y un conjunto $A = A(G)$ de aristas orientadas.
Cada arista a tiene un vértice inicial $i(a)$ y un vértice terminal $t(a)$.
Cuando $i(a) = t(a)$ se dice que a es un *lazo.*
Aqui, se trabaja con V un conjunto finito, esto es, $V = V(G) = \{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$

Para algún vértice I, $A_I = A_I(G)$ denota el conjunto de aristas que salen de I y
$A^I = A^I(G)$ denota el conjunto de aristas que entran a I.

El cardinal de A_I se llama *grado de salida de* I y el de A^I *grado de entrada de* I.
Sean G y H grafos. Buscamos maneras de relacionar los grafos, aqui mediante un *homomorfismo de grafos* que consiste en un par de funciones

$$(\varphi, \psi) : G \longrightarrow H$$

de manera que
$\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ y $\psi : A(G) \longrightarrow A(H)$.
Decimos que dos grafos son isomorfos si φ y ψ son biyectivas, esto es, si

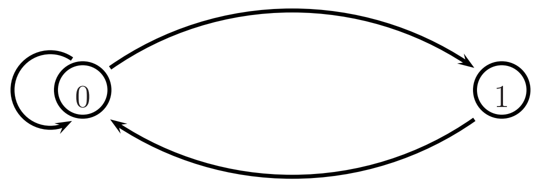

Figura 1

uno se puede obtener del otro por renombramiento (cambio de nombre) de vértices y aristas.

La *Matriz de adyacencia de un grafo G* es una matriz cuadrada $\mathfrak{A}$ que tiene tantas filas y columnas como vértices tiene el grafo. El elemento a_{ij} indica el número de aristas que unen el vértice I_i con el vértice I_j, asi, los elementos de la diagonal indican los lazos que aparecen en el grafo. Las potencias de $\mathfrak{A}$ denotan los caminos posibles sobre el grafo en cuestion.

Ejemplo 8.1. $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *es la matriz de adyacencia del grafo de la figura 1.*

Si el alfabeto A es el conjunto de aristas de un grafo dirigido, se define el *espacio de desplazamientos sobre aristas* como

$$\mathbb{G} = \{z = (z_i)i \in \mathbb{Z} \in A^{\mathbb{Z}} \mid t(z_i) = i(z_{i+1}), \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

y se tiene un resultado muy importante
Si $\mathbb{X}$ es un espacio de desplazamiento de tipo finito de memoria m entonces existe un grafo G tal que $\mathbb{X}^{[m+1]} = \mathbb{G}$.

Es claro que el espacio de desplazamientos en proporción áurea no es un espacio de desplazamiento sobre aristas. Sin embargo, es un espacio de memoria 1. Por tanto, para el espacio de desplazamientos en proporción áurea, $\mathbb{X}^{[2]} = \mathbb{G}$, como se muestra en la figura 2.

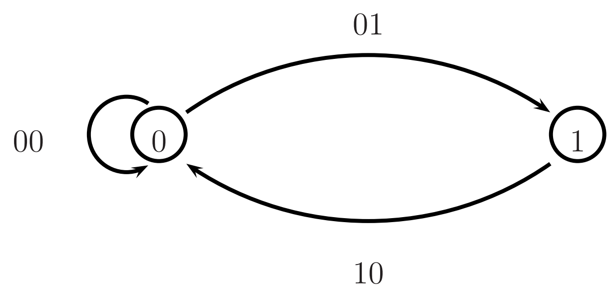

Figura 2

Aqui se muestra la importancia de la reperesentación de espacios de desplazamientos de tipo finito mediante grafos, los cuales permiten ver e interpretar la información implícita en los espacios en cuestión.

Referencias Bibliográficas.

[1] GROSS, Jonathan L. and TUCKER Thomas *Topological Graph Theory*, Wiley-Interscience.

[2] ITCHENS, B.P. *Symbolic Dynamics*, Springer-Verlag, 1998.

[3] IND, Douglas and MARCUS, Brian *An introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.