FUNCIONES CALCULABLES EN MAQUINAS DE POST Y MAQUINAS DE TURING

Iván Castro Chadid.
Profesor Titular
Pontificia Universidad Javeriana
ivan.castro@jol.net.co

ALAN TURING (1912-1954)

En 1936 Emil L. Post y Alan M. Turing publicaron, independientemente y por caminos distintos, sendos artículos en donde anticipándose a la aparición de las computadoras universales, presentaban en forma abstracta los rasgos fundamentales que rigen las máquinas que están en capacidad de calcular.

Una Función Calculable es aquella que viene dada por un algoritmo cualquiera, cuyo dominio de aplicabilidad es el dominio de la función y a cada elemento del dominio le hace corresponder el elemento resultante de la aplicación de este algoritmo a dicho elemento.
Es así como por ejemplo las funciones usuales de la aritmética como la suma, resta y multiplicación en los enteros son calculables mientras que la función:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si en el desarrollo decimal de } \pi \\ & \text{hay } n \text{ ceros consecutivos} \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

no lo es, ya que no es posible encontrar un algoritmo que permita determinar en forma precisa, cuál es el valor de $f(n)$ para cualquier n que tomemos.

EMIL L. POST(1897-1954)

Veamos a manera de ejemplo un procedimiento que nos muestra como modelar un problema específico, llevarlo a Máquinas de Post y de ahí a Máquinas de Turing.
Supongamos que un "cursor" C actúa sobre una cinta y esta en capacidad de realizar las siguientes operaciones:

1. Determinar si una celda esta llena o vacía.

2. Marcar una celda, (obviamente cuando este vacía).

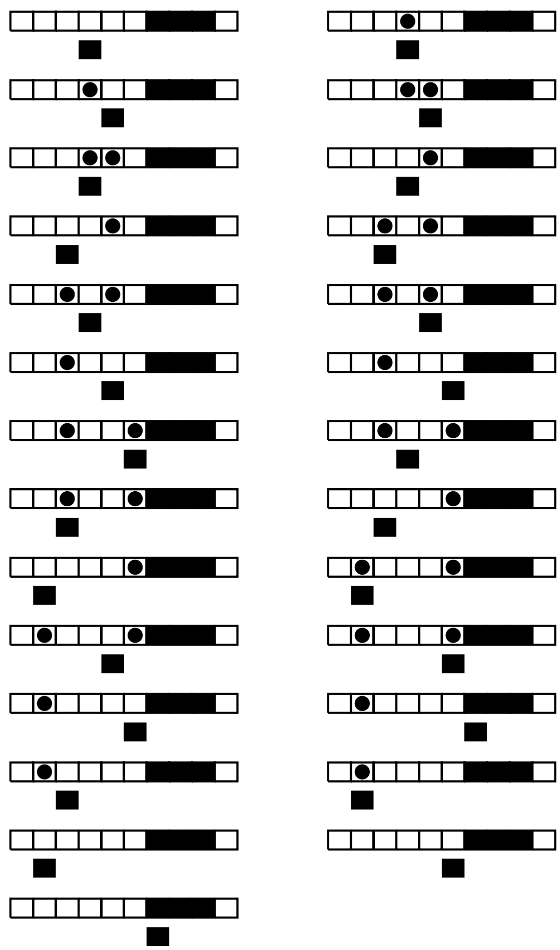
3. Suprimir la marca de una celda.

4. Moverse a la derecha.

5. Moverse a la izquierda.

El problema que vamos a resolver consiste en generar un proceso lógico (calculable) que permita determinar como debe actuar C para que pueda encontrar un número que se encuentra en una cinta ; esencialmente el problema es similar al siguiente:
Supongamos que un invidente es abandonado en un camino recto con dos estacas que pueden ser clavadas en el piso y se le advierte que caminando en una de las dos direcciones: norte (N) o sur (S), puede encontrar un sitio en donde protegerse, ¿cómo procedería para llegar a este lugar?.
Una forma de resolver el problema es la siguiente: Empieza comprobando con las manos si ya llegó; en caso de que la respuesta sea negativa clava una estaca en el piso y da un paso en la dirección N, nuevamente se hace la misma pregunta, si la respuesta es negativa, clava la segunda estaca gira 180° y camina en dirección S hasta encontrar la primera estaca; la recoge da un paso en dirección S, se hace la pregunta, si la respuesta es negativa clava la estaca gira 180° y se mueve en dirección N hasta encontrar la otra estaca; procediendo de esta forma un número finito de veces llega finalmente a encontrar el sitio que quería encontrar.

Similarmente el "cursor" C procedería como se indica en la siguiente secuencia gráfica:



Los correspondientes programas serían:

Programa en Máquinas de Post

$$1\left\langle\begin{array}{l}2\\ \\ 20\end{array}\right. \quad 2\vee 3 \quad 3\Rightarrow 4 \quad 4\left\langle\begin{array}{l}5\\ \\ 15\end{array}\right. \quad 5\vee 6 \quad 6\Leftarrow 7$$

$$7\left\langle\begin{array}{l}6\\ \\ 8\end{array}\right. \quad 8\xi 9 \quad 9\Leftarrow 10 \quad 10\left\langle\begin{array}{l}11\\ \\ 21\end{array}\right. \quad 11\vee 12 \quad 12\Rightarrow 13$$

$$13\left\langle\begin{array}{l}12\\ \\ 14\end{array}\right. \quad 14\xi 3 \quad 15\Leftarrow 16 \quad 16\left\langle\begin{array}{l}15\\ \\ 17\end{array}\right. \quad 17\xi 18 \quad 18\Rightarrow 19$$

$$19\left\langle\begin{array}{l}18\\ \\ 20\end{array}\right. \quad 20\ \boxed{\text{Stop}} \quad 21\Rightarrow 22 \quad 22\left\langle\begin{array}{l}21\\ \\ 23\end{array}\right. \quad 23\xi 24 \quad 24\Leftarrow 25 \quad 25\left\langle\begin{array}{l}24\\ \\ 20\end{array}\right.$$

Programa de paso

$$1\left\langle\begin{array}{l}(2\vee 3)\Rightarrow 4\\ \\ 20\ \boxed{\text{Stop}}\end{array}\right. \quad 4\left\langle\begin{array}{l}(5\vee 6)\Leftarrow 7\\ \\ 15\Leftarrow 16\end{array}\right. \quad 7\left\langle\begin{array}{l}6\Leftarrow 7\\ \\ (8\xi 9)\Leftarrow 10\end{array}\right. \quad 10\left\langle\begin{array}{l}(11\vee 12)\Rightarrow 13\\ \\ 21\Rightarrow 22\end{array}\right.$$

$$13\left\langle\begin{array}{l}2\Rightarrow 13\\ \\ (14\xi 3)\Rightarrow 4\end{array}\right. \quad 16\left\langle\begin{array}{l}15\Leftarrow 16\\ \\ (17\xi 18)\Rightarrow 19\end{array}\right. \quad 19\left\langle\begin{array}{l}18\Rightarrow 19\\ \\ 20\ \boxed{\text{Stop}}\end{array}\right.$$

$$22\left\langle\begin{array}{l}21\Rightarrow 22\\ \\ (23\xi 24)\Leftarrow 25\end{array}\right. \quad 25\left\langle\begin{array}{l}24\Leftarrow 4\\ \\ 20\ \boxed{\text{Stop}}\end{array}\right.$$

Programa en Máquinas de Turing

Nº instr.	Lea		Escr.	Mov.	Nº Sig.
1	0	:	1	L	2
1	1	:	1	H	1
2	0	:	1	R	3
2	1	:	1	R	6
3	0	:	0	R	3
3	1	:	0	R	4
4	0	:	1	L	5
4	1	:	1	L	8
5	0	:	0	L	5
5	1	:	0	L	2
6	0	:	0	R	6
6	1	:	0	L	7
7	0	:	0	L	7
7	1	:	1	H	7
8	0	:	0	L	8
8	1	:	0	R	9
9	0	:	0	R	9
9	1	:	1	H	9

R = "$\leftarrow$" , L = "$\rightarrow$ " , H = "Terminar".

Bibliogarafía

[1] 1.V.A.Uspenski. Máquinas de Post. Editorial Mir, Moscú. 1983.

[2] V.A.Uspenski. Lecons sur les Fonctions Calculables. HERMANN, Paris, 1966.