

GEOMETRÍA Y ARTE CON GEOMETER'S SKETCHPAD

Cristi Darley Guevara

Universidad de Arizona.

cristig@email.arizona.edu

Manuel Antonio Montero

Inst. Técnico Central

Universidad Loren Konrad.

mmontero61@hotmail.com

El aprendizaje de las matemáticas y la geometría ofrece al estudiante la oportunidad de aproximarse conceptos y desarrollar procesos de pensamiento lógico. Es importante reconocer que existen innumerables herramientas que ayudan a los estudiantes a aproximarse de una manera “más fácil” a estos procedimientos; muchas de estas herramientas son tecnológicas, las cuales si son manejadas adecuadamente permiten encontrar la solución de un problema de diferentes maneras, generar los estudiantes interés por el conocimiento, al mismo tiempo ellos crean conjeturas y desarrollan habilidades para determinar la verdad o falsedad de las mismas. Una de estas herramientas es el software Geometer's Sketchpad el cual fue diseñado para desarrollar Geometría Euclidiana, Analítica y hacer algunas aproximaciones al Cálculo Diferencial de manera elemental sin perder su rigurosidad.

El software Geometer's Sketchpad es el resultado de Visual Geometry Project y es comercializado por *Key Curriculum Press*.¹ Este es básicamente un programa que le permite al estudiante visualizar y analizar problemas geométricos motivándolo a conjeturar y por ende facilita la construcción de pruebas. Además su fácil manejo permite a los estudiantes concentrarse en las actividades mas que en el paquete. Geometer's Sketchpad 3.05 está diseñado para trabajar en plataforma Windows 95, Linux (en PC con procesador 486 o superior) o Mac (OS 8.6 o superior), y requiere un mínimo de 8 MB de RAM. Este programa trabaja con ventanas como la ilustrada en la figura 1 y para desarrollar y solucionar problemas básicamente se reduce a manipular la barra de herramientas (toolbox), el panel de dibujo (worksheet) y de los menús expandibles.

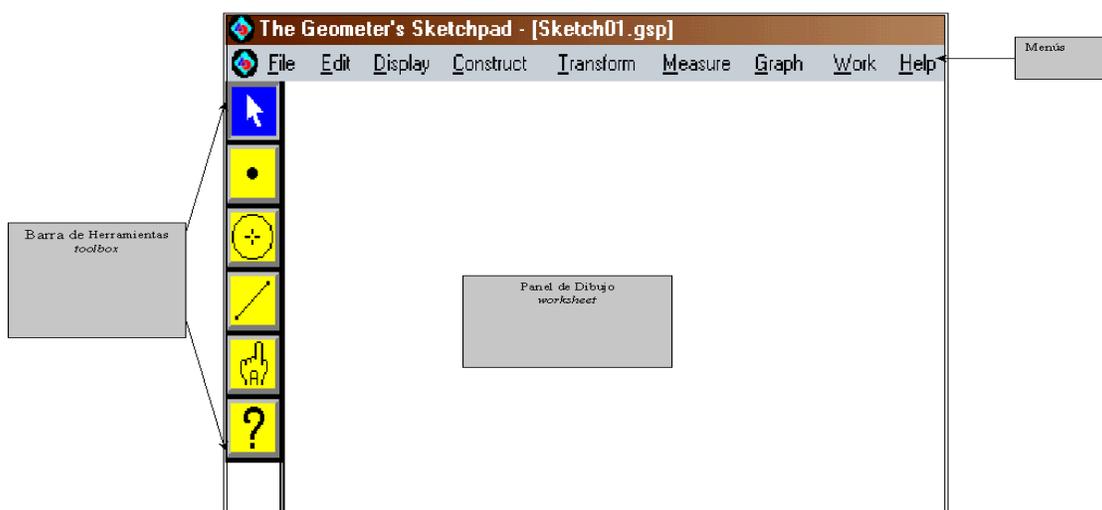
- a. Panel de Dibujo (worksheet): esta es la hoja de trabajo (espacio en blanco)

¹<http://www.keypress.com> Innovators in Mathematics Education.

- b. Barra de herramientas (toolbox): localizado al lado izquierdo del panel de dibujo, compuesto por un conjunto de herramientas las cuales se utilizan para construir figuras geométricas.



Flecha de selección: esta herramienta permite seleccionar figuras, generar rotaciones, dilataciones y translaciones.



<http://www.keypress.com>

Fig.1



Herramienta de construcción de puntos.



Herramienta de círculos y circunferencia.



Herramienta de construcción rectas, rayos y segmentos.



Herramienta de texto. Permite la creación subtítulos o puntos de la etiqueta y líneas.



Información. Muestra la información correspondiente a cada uno de los elementos construidos en el panel de dibujo.

- c. **Menús.** Geometer's Sketchpad tiene nueve menús principales expandible localizados en la parte superior del panel de dibujo y un menú de acceso rápido.
- *Menú de archivo (file menu).* Este menú contiene comandos para abrir, guardar, crear y usar sketch y script archivos. Muchos de estos comandos son comunes a aquellos programas que manejan ventanas.
 - *Menú de edición (edit menu).* Este menú contiene comandos para rehacer o deshacer las actividades hechas en Sketchpad, también permite usar el clipboard, generar conexiones entre diferentes archivos y ventanas de Sketchpad y botones de navegación.
 - *Menú de apariencia (display menu).* Este menú permite cambiar el formato en las construcciones.
 - *Menú de construcción (construct menu).* Permite hacer construcciones.
 - *Menú de transformaciones (transform menu).* Permite hacer transformaciones en el plano de figuras geométricas.
 - *Menú de medidas (measure menu).* Permite hacer mediciones de objetos geométricos.
 - *Menú de gráficos (Graph menu).* Permite generar sistemas de coordenadas.
 - *Menú de trabajo (work menu).* Este menu permite generar animaciones (scripts)
 - *Menú de ayuda (help menu).*
 - *Menú de acceso rápido.* Este menú permite acceder a algunos de los comandos de los diferentes con un clic en el botón izquierdo del mouse.

A continuación encontrara una serie de actividades que le ayudaran a familiarizarse y generar algunas ideas para el trabajo con el Geometer's Sketchpad.

Actividad 1.

Seleccione la herramienta del círculo. Mueva a un espacio vacío en su panel de dibujo, y pulse el botón y arrastre los exteriores para crear un círculo.

1 Deshaciendo y rehaciendo ordenes.

1. Vaya a la opción *edit* del menú de la parte superior de la pantalla. Vea que su primera opción es Undo Draw Circle(deshacer dibujar el círculo), o la última orden que usted completó. De clic o Enter a esta opción, vaya de nuevo a *edit*, y de clic o Enter en Redo Draw Circle. ¿qué resultados obtuvo?_____
-

De esta manera usted ha visto como se pueden deshacer o rehacer gráficos u ordenes que haya realizado.

Usando el menú de construcción.

El menú de construcción proporciona diferentes formas crear objetos con las propiedades geométricas relacionadas a aquellos de objetos que usted ya ha dibujado. Usando el menú de construcción y la caja de herramientas, dibuje otro círculo siguiendo el procedimiento descrito a continuación.

1. Usando la herramienta del punto, cree un punto en alguna parte en un espacio blanco en su panel de dibujo. Este determinara el centro de su círculo.
2. Usando la herramienta de la línea, dibuje un segmento de línea. Esto definirá el radio de su círculo.
3. Active la flecha de la selección. Seleccione su segmento de línea y oprima simultáneamente pulsando la tecla de mayúsculas [shift], El punto y el segmento parecerán negras, indicando que ellos han sido seleccionados.
4. Vaya al menú de construcción. Note que algunos de los comandos en este menú aparecen en negrilla, lo cual indica que ellos están disponibles, mientras otros aparecen grises, indicando que ellos no pueden usarse. ¿Qué comandos encuentra disponibles? _____

Los comandos disponibles dependen de que puntos y líneas se han seleccionado.

5. Del menú de construcción, seleccione Circle By Center And Radius (construir un círculo). Un círculo aparecerá en su panel de dibujo. ¿Cómo se relaciona el círculo con el punto y la línea que creo antes?
-

2 Borrando los puntos y segmentos de línea.

Para Borrar una parte de su dibujo, simplemente selecciónelo y oprima la tecla [delete]

1. Seleccione el círculo que usted creó en el primer ejercicio, haciendo clic con el mouse en la circunferencia, luego oprima [delete]. ¿Qué pasa al centro del círculo? _____
 2. Deshaga su última orden. ¿Seleccione el centro del primer círculo, y oprima [delete]. ¿Qué pasó ahora?, ¿Qué le dice esto sobre los trabajos de Sketchpad? _____
 3. Seleccione el segmento de la línea (el radio) construido en el último ejercicio. Oprima [delete] . ¿Qué pasa? ¿Qué dice sobre cómo el menú de construcción y sus opciones de trabajo? _____
-

Actividad 2.

En el próximo ejercicio usted necesitará crear primero un triángulo inscrito. Esto significa que los tres vértices del triángulo estarán sobre la circunferencia del círculo. *The Status Box* (caja de posición) lo ayudará a estar seguro en que posición puede ubicar sus puntos.

1. Cree un círculo con los métodos descrito anteriormente.
2. Observe el la caja de posición, ubicada en esquina inferior izquierda del panel de dibujo. Esto proporciona la información sobre la función que usted está realizando o donde su cursor se localiza.

3. Seleccione la herramienta de la línea, y ubique cursor en alguna lugar sobre la circunferencia (Usted sabrá que el cursor esta ubicado en la circunferencia porque en la caja de posición aparece un letrero que dice “desde un punto de la circunferencia” (*from point on circle*)).
4. Pulse el botón del mouse y arrástrelo hasta otro punto en la circunferencia, esto le permitirá crea un primer segmento en el círculo.
5. Ubique el cursor en el punto final del primer segmento (*endpoint*) desde este punto cree un segmento a cualquier punto (diferente del inicial) de la circunferencia. Así usted obtendrá el segundo segmento.
6. Cree un tercer segmento, desde el punto final del segundo segmento al punto inicial del primer segmento. Ahora usted ha completado su triángulo inscrito.
7. Redimensione el círculo. Que le pasa al triangulo inscrito? _____

8. Pulse el botón del mouse sobre un vértice del triángulo y arrástrelo. ¿Qué sucede? _____

9. Pulse el botón del mouse seleccionando uno de los segmentos de los lados del triángulo y arrástrelo. ¿Qué ocurre?

Actividad 3.

Utilizando las herramientas que brinda el GSP trate de resolver la siguiente situación.

Tres ciudades desean construir un hospital de tal manera que esta quede equidistante a cada una de ellas. ¿Donde se debe construir el hospital?

1. En un nuevo panel de dibujo (New Sketch). Represente cada una de las ciudades por puntos, use la herramienta de texto para nombrar estas ciudades (A , B , C)

2. Estime donde puede estar ubicado el hospital, utilizando la herramienta de punto. Marque esta con la letra D .
3. Ahora verifique su estimación siguiendo el siguiente procedimiento. Seleccione los puntos A y D . Vaya al menú de medida (*measure menu*) y seleccione distance, este determinara la distancia entre los puntos A y D . Repita el procedimiento para los puntos B y D y los puntos C y D . ¿Qué tan buena fue su estimación?... ahora mueva sobre su panel de dibujo el punto D hasta encontrar el puntos mas adecuado como solución de este problema.
4. Ahora suponga que hay tres “carreteras” conectando estas ciudades, use la herramienta de segmento para conectar las ciudades. ¿Por cada tres distintas ciudades, dónde debe estar ubicado el hospital, esto es, ésta estará en el interior del terreno limitado por las carreteras o en el exterior del terreno? _____

Explore otra forma de determinar donde debe estar ubicado el hospital:

5. Construya un segmento perpendicular bisector (*mediatriz*) a cada una de las carreteras, así por ejemplo el segmento perpendicular bisector a la carretera desde la ciudad A hasta la ciudad B es un segmento perpendicular a AB y que pasa por su punto medio. El procedimiento en GSP es: seleccione el segmento AB , vaya al menú de construcción seleccione Perpendicular Line (construir una línea perpendicular). Repita el procedimiento para los segmentos AC y BC . Ahora encuentre el punto de intercepción de las líneas anteriormente construidas, nombre este punto H .
6. Encuentre la distancia de entre los puntos AH , BH y CH siguiendo el procedimiento en 3, ¿cómo son estas distancias?, ¿ que le sugiere este resultado? _____

Ahora reubique cada una de las ciudades, ¿qué sucede con las distancias? _____

Ahora explore el ejercicio 4 y determine cuando la hospital esta dentro del terreno limitado por las carreteras y cuando esta afuera.

Analice y responda:

7. ¿Por qué la intercepción de los segmentos bisectores perpendiculares de las carreteras determina el punto donde la hospital debe estar ubicada?
-
8. El procedimiento seguido anteriormente lo ha guiado en la construcción del *circuncentro* del $\triangle ABC$. Ahora construya un círculo con centro en el hospital. Para esto seleccione el punto H y A , luego vaya al menú de construcción y luego seleccione *Circle by Center and Point*. ¿Qué pasó?, ahora cambie de posición cualquiera de las ciudades.. ¿qué sucede? ¿por qué el círculo con centro en H circunscribe al $\triangle ABC$?
-
9. Ahora dibuje un triángulo $\triangle ABC$ y construya la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$. Describa el procedimiento.
 10. Ahora dibuje un $\triangle DEF$ y posteriormente construya el círculo inscrito al triángulo $\triangle DEF$.

Actividad 4. (Explorando circunferencias y triángulos.)

En esta actividad se pretende generar scripts (pequeñas animaciones de procedimientos elaborados en GSP).

1. Generando un script tal que dados tres puntos no colineales construya un triángulo y la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son los puntos dados.
 - a. Ubique 3 puntos no colineales en su panel de dibujo.
 - b. Vaya al menú de archivo (file) y seleccione new script, esto le genera una pequeña ventana que tiene algunos botones como los de una grabadora.
 - c. Oprima el botón REC esto indica que cada acción realizada en el panel de dibujo desde ese momento le será grabada.
 - d. Vaya al panel de dibujo y realice el procedimiento para construir el triángulo y la circunferencia circunscrita (parte 9 actividad 3)

- e. Cuando finalice su construcción vaya a la ventana de script y seleccione el botón stop.
 - f. Guarde este script como script1.
2. Ahora abra un nuevo sketch, y un nuevo script para esto seleccione el menu de archivo (file) y seleccione new sketch y new script.
- a. Con la herramienta de punto dibuje 3 puntos en el panel de dibujo.
 - b. Seleccione los puntos
 - c. Vaya al script2 y active el botón REC
 - d. Vaya al script1 y de clic en PLAY. ¿qué sucede?
 - e. Cuando se finalice la auto construcción elaborada por el script1, seleccione la circunferencia y vaya al menú de apariencia (Display) y seleccione Hide, este esconderá la circunferencia.
 - f. Ahora seleccione cada una de las líneas perpendiculares (si las hay) y escóndalas, usando el procedimiento e.
 - g. Vaya a script2, de clic en STOP.
 - h. Ahora seleccione los puntos medios del triangulo resultante y vaya a script2 y presione el botón play. ¿Qué sucede?
 - i. Del procedimiento h usted ha obtenido un nuevo triangulo, seleccione sus puntos medios, vaya a script2 y seleccione FAST. ¿Qué sucede?

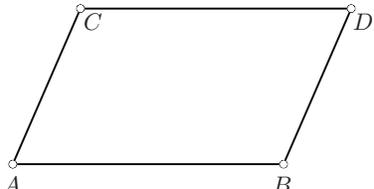
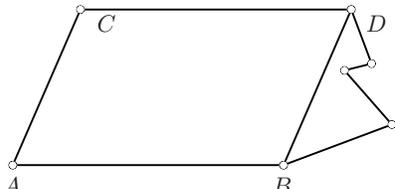
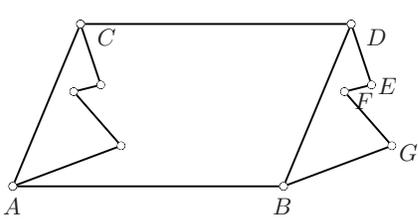
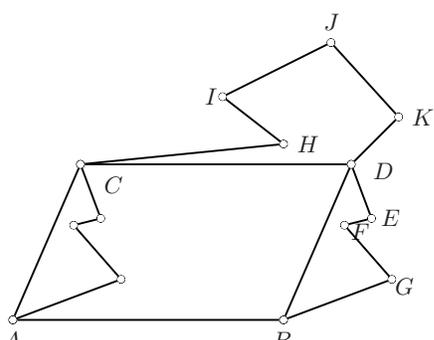
Ahora trate de crear un script que le genere el triangulo de Sierpinski o el árbol pitagórico.

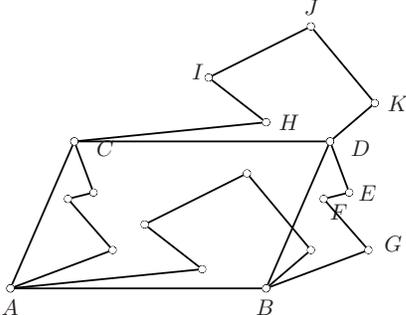
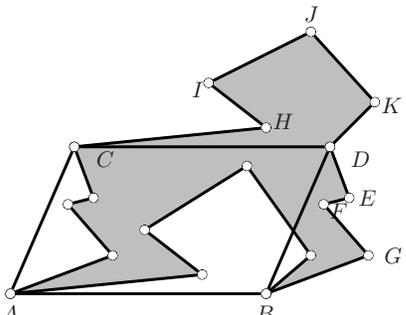
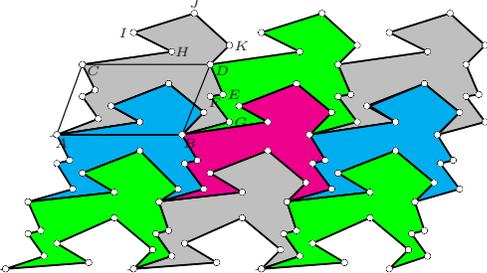
Actividad 5. (Teselaciones)

Para la presente actividad tendremos en cuenta el axioma libre de movilidad enunciado a continuación:

“Admitiremos que las figuras geométricas se pueden desplazar libremente, a la manera de los cuerpos rígidos, sin que durante el movimiento se alteren las relaciones que ligan a sus elementos, es decir sin deformarse”.²

²Este axioma ha sido utilizado por todos los géometras desde la Escuela de Alejandría (siglo III A. J.C:) pero sin enunciarlo explícitamente .

<p>1. Construya un paralelogramo utilizando el menú de construcción y seleccionando Parallel Line (línea paralela)</p>	
<p>2. Construya una figura al azar en el lado derecho del paralelogramo, usted puede construirla ya sea utilizando la herramienta de puntos o segmentos</p>	
<p>2. Seleccione D y luego C, vaya Al menú de transformación (Transform) y seleccione Mark Vector "$D \rightarrow C$", luego seleccione la figura que construyo en el paso anterior y vaya nuevamente al menú de transformación y seleccione <i>Translate</i> (trasladar) esta siguiendo el vector marcado.</p>	
<p>4. Construya una segunda figura en la parte superior del paralelogramo.</p>	

<p>5. Ahora marque C y A como vector y traslade esta segunda figura.</p>	
<p>6. Seleccione los vértices de su polígono en orden consecutivo y construya el polígono interior (use el menú de construcción y seleccione Construct Polygon Interior)</p>	
<p>Traslade todo el polígono (vértices, lados, e interior) en la dirección del vector CD y luego en la dirección del vector CA para crear una teselación. Use diferentes colores para polígonos adyacentes. Usted puede mover cualquiera de los puntos iniciales con el fin de modificar su teselación.</p>	

Las actividades presentadas en este documento son apenas una muestra de algunos ejemplos que se pueden desarrollar con el *GSP* y su eficacia en el aula de clase depende de el manejo, instrucción y cuestionamiento que el docente genere con sus estudiantes. Algunas referencias de sitios en el Internet donde pueden encontrarse algunos planes de clase con la implementación del *GSP* son:

<http://home6.inet.tele.dk/bergmann/>

<http://math2.math.nthu.edu.tw/jcchuan/java-sketchpad/jsp.html>

<http://www.edc.org/MLT/DG/>

<http://www15.addr.com/dscher/>

<http://sundial.ed.asu.edu/teams/alfinio/index.html>

Además podrá encontrar una gran cantidad de links en la pagina web

<http://www.keypress.com/sketchpad/sketchlinks.html>, los cuales han sido aprobados y evaluados por Keypress (creadores del GSP).