GEOMETRIA DE LAS FORMAS CANONICAS DE JORDAN

Claudia Teresa Vega
Universidad Pedagógica Nacional.
Universidad Distrital.

Angela Lucía Garzón Rozo
Universidad Pedagógica Nacional.

En este artículo se muestra el significado geométrico de tres transformaciones definidas en L_2 que son: Las Homotecias, las rotaciones y los deslizamientos, con ayuda de la forma canónica de Jordan (como matriz asociada).

Conceptos básicos.

VECTOR: Concepto físico con Magnitud, Dirección y Sentido

ESPACIO VECTORIAL: Un cojunto no vacio V con dos operaciones, una interna con suma y la externa con multiplicación por escalar $\cdot$ (V,+) es un grupo abeliano y cumple (5) propiedades.

BASE: Es un subconjunto $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de elementos del espacio vectorial que es L.I, tal que cualquier vector se puede expresar como combinacion lineal, y genera el espacio.

DIMENSION: Esta determinada por el número de elementos de la base. Decimos dimV$= n$, en espacios vectoriales de dimensión finita.

PRODUCTO INTERNO: Sean X, Y y Z, elementos de un espacio vectorial V y α un escalar, entonces se define $X \cdot Y$

$$\text{como} \quad X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_j \qquad \text{que cumplen las siguientes propiedades}$$

a. $X \bullet Y \; = \; Y \bullet X$

b. $\alpha(X \bullet Y) \; = \; (\alpha X) \bullet Y$

c. $(X+Y)\bullet Z \; = \; XZ+YZ$

d. $X\bullet X \geq 0$

Transformación Lineal: Dados dos espacios vectoriales V y W una aplicación(función). $L : V \longrightarrow W$ es una T.L si:

$$L(U+V) = L(U)+L(V) \quad \forall\, U,\ V \in V$$
$$L(\alpha U) = \alpha L(U). \quad \forall \alpha \epsilon k \text{ (campo)}$$

Representación matricial de una transformación lineal.

Sea $T:\ V \longmapsto W$ una T.L con $dimV = n,\ \ dimW = m$ si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base de V y $\{w_1,\ldots,w_m\}$ es una base de W, cada elemento $t(e_k)$ puede expresarse con unicidad, como una combinación lineal de los elementos de la base es decir
$T(e_k) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_{ik}w_i$ donde $t_{ik},\ldots,t_{mk}$ son los componentes de $t(e_k)$ respecto a la base ordenada $\{w_1,\ldots,w_m\}$.

- Los t_{ik} forman un vector columna o matriz columna. Tenemos una columna para cada uno de los n–elementos $t(e_1),\ldots,t(e_{n)})$, formando asi una matriz de orden $m\times n$.
  Asi toda T.L de un espacio n–dimensional V, en un espacio m–dimensional W da origen a una matriz $m\times n \quad t(e_{ik})$, cuyas columnas son los componentes de $t(e_i),\ldots,t(e_n)$, relativos a la base $(w_1,\ldots,w_n)$, la llamamos representación matricial de T relativa a unas bases ordenadas $\{e_{1,},\ldots,e_n\}$, de V y $\{w_1,\ldots,w_m\}$, para w.

Teorema

Dada una transformacion lineal $T : V \to V$ donde $dimV = n$. Si T tiene una representación en matriz diagonal, existe entonces un conjunto de elementos independientes $u_1,\ldots,u_2$ en V y un conjunto correspondiente de escalares $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ que satisfacen: $T(u_K) = \lambda_k u_k$ para $k = 1,2,\ldots,n$. Reciprocamente, si existe un conjunto independiente $u_1,\ldots,u_n$ en V y un conjunto correspondiente de escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ que satisfacen (1), entonces la matriz $A = \text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ es una representación de T respecto a la base

$(u_1, \ldots, u_n)$.

Luego el problema de hallar una representación en matriz diagonal de una transformación lineal se reduce al de hallar el elemento sin dependientes $u_1, \ldots, u_n$ y los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que satisfacen $T(u_k) = \lambda_k u_k$. Para $k = 1, 2, \ldots, n$. Tales elementos $u_1, \ldots, u_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, se conocen como autovectores y autovalores respectivamente.

Teorema
Sea una matriz de $n \times n$ se dice que λ es un valor propio de A ssi $P(\lambda) = \det(A - \lambda i) = 0$
Esta es la ecuación caracteristica de A, $P(\lambda)$ se llama polinomio caracteristico de A.

Teorema
Sea A una matriz real o compleja de orden $n \times n$, entonces exite una matriz C compleja invertible de orden $n \times n$ talque

$$C^{-1}AC = J$$

Donde J es la matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A.
Más aun la matriz de Jordan es unica, excepto por el orden (dado por la base ordenada fija) en el que aparecen los bloques de Jordan.

Transformaciones geometricas lineales.

Dado el espacio vectorial L_2 de vectores geometricos del plano, se consideran tres tipos de T.L de L_2 en L_2 que llamaremos tranformaciones geometricas. Cada una tiene caracteristicas geometricas fundamentales relacionadas con el concepto de Homotecia (ampliación), rotación y deslizamiento (ampliación)

TRANSFORMACIONES HOMOTETICAS (o de ampliación multiple)

En L_2, una base $U = \{u_1, u\ _2\}$. Sean λ_1, λ_2 números reales si se dan dos Homotecias de razones λ_1, λ_2 respectivamente.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$ se tiene una homotecia de razon λ. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\left[H^{\lambda_1\lambda_2}\right]_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$H^{\lambda_1\lambda_2}(\overrightarrow{U}_1) = \lambda_1\overrightarrow{U_1}$
$H^{\lambda_1\lambda_2}(\overrightarrow{U}_2) = \lambda_2\overrightarrow{U_2}$

Rotación.

Sea $U = \{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}\}$ una base ortonormal de L_2. Dado un número real $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se define la transformación lineal R^θ por

$$R^\theta(\overrightarrow{u_1}) = \textit{rotación} \text{ de } \overrightarrow{u_1} \text{ un ángulo } \theta \text{ en el sentido positivo}$$
$$R^\theta(\overrightarrow{u_2}) = \textit{rotación} \text{ de } \overrightarrow{u_2} \text{ un ángulo } \theta \text{ en el sentido positivo}$$

Esta es

$$\left[\ R^\theta\right] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

R^θ es una rotación de ángulo θ en el sentido positivo.

Transformaciones complejas.

Una transformación compleja es la composición de una Homotécia y una rotación

$$C^{\lambda\theta} = H_u^\lambda R^\theta \text{ en una base } U = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\} \text{ Ortonormal de } L_2$$
$$\left[C^{\lambda\theta}\right]_u = \left[H^\lambda\right]_u \left[R^\theta\right]_u$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & -\lambda\operatorname{sen}\theta \\ \lambda\operatorname{sen}\theta & \lambda\cos\theta \end{pmatrix}$$

Cualquier transformación que pueda ser representada por una matriz

$$[C] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } \lambda = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \text{ y}$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \theta \in \mathbb{R}$$

Deslizamiento $(\lambda \neq 0)$

Sea $U = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\}$; una base de L_2 dado un número real λ, definimos la transformación $D^{1\lambda}$ por:

$$D^{\lambda}(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1}$$
$$D^{\lambda}(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_2} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{u_2}$$

Donde $\frac{1}{\lambda}$ es un multiplo escalar no nulo.
Observe que la transformación $D^{1\lambda}$ $\overrightarrow{u_1}$, deja fijo $\overrightarrow{u_2}$ y modifica por la adición de un múltiplo $\overrightarrow{u_1}$.
Claramente se tiene:

$$\left[D^{\lambda}\right]_u = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DESLIZAMIENTO HOMOTETICO

Un deslizamiento homotetico $E^{1\lambda}$ es la composicion de una homotecia de razón λ
con un deslizamiento de razon λ. $E^{1\lambda} = H^{\lambda}$ o $D^{1\lambda}$. Claramente se tiene que:

$$\left[E^{1\lambda}\right] = \begin{pmatrix} \lambda. & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda. & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

El teorema de Jordan sobre las formas canónicas de las transformaciones lineales dice que no hay más T.L si no las descritas, solo hay que buscar una base adecuada.

Valores y Vectores propios de las transformaciones goemetricas en L_2.

a) De las tansformaciones Homoteticas: Se deducen de los valores propios de $H^{\lambda_1\lambda_2}$ son λ_1 y λ_2 con vectores propios correspondientes $\overrightarrow{U_1}$ y $\overrightarrow{U_2}$ respectivamente

b) De las transformaciones complejas: Una transformacion compleja $C^{ab}(= C^{\lambda\theta})$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Por consiguiente su polinomio característico viene dado por $p(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2$. Cuyas raices son los números complejos

$$\lambda_1 = a + b_i$$
$$\lambda_2 = a - b_i$$

Al seguir con el proceso de diagonalizacion se tendrán los vectores propios a λ_1 y λ_2 son $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Asi la diagonolización de C^{ab} se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - b_i & 0 \\ 0 & a + b_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

c) De los deslizamientos Homoteticos: Un deslizamiento homotetico $E^{1\partial}$ tiene matriz $\begin{pmatrix} \partial & 1 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}$ por consiguiente su polinomio caracteristico esta dado por $p(\lambda) = (\partial - \lambda)^2$ cuyas raices son los números reales $\lambda_1 = \lambda_2 = \partial$. Con el proceso de diagonalización se tiene un vector propio correspondiente a ∂ que es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Siendo estos los coeficientes de los verctores propios en la base U. Asi, la diagonalización de $E^{1\partial}$ no se puede realizar. Se toma la forma canónica de Jordan de $E^{1\partial}$ a ella misma.

Bibliografía.

[1] APOSTOL, Tom. *Cálculo.* Volumen II

[2] GROSSMAN, Stanley. *Algebra Lineal.*