INFERENCIA VISUAL PARA LA LÓGICA DE LA VAGUEDAD LBPcoC[1]

Manuel Sierra A.
Universidad EAFIT[2]
msierra@sigma.eafit.edu.co

1 Introducción.

El operador "negación clásica", simbolizado "$\sim$", esta caracterizado desde el punto de vista semántico por la siguiente equivalencia:

$$A \text{ es aceptado } \Leftrightarrow \sim A \text{ no es aceptado}$$

Esta equivalencia dice que un enunciado es aceptado si y solamente si su negación no es aceptada. En ella pueden leerse 4 enunciados condicionales:

$$\begin{aligned} A \text{ es aceptado} &\Rightarrow \sim A \text{ no es aceptado} \\ \sim A \text{ es aceptado} &\Rightarrow A \text{ no es aceptado} \\ A \text{ no es aceptado} &\Rightarrow \sim A \text{ es aceptado} \\ \sim A \text{ no es aceptado} &\Rightarrow A \text{ es aceptado} \end{aligned}$$

Los dos primeros enunciados son equivalentes y prohíben: que un enunciado y su negación sean ambos aceptados, es decir, se prohíbe que un enunciado sea compatible con su negación; los dos últimos son equivalentes y prohíben que un enunciado y su negación sean ambos no aceptados, es decir, se prohíbe las indeterminaciones respecto a la negación. La negación clásica prohíbe la compatibilidad de un enunciado con su negación y las indeterminaciones respecto a la negación. El sistema presentado en este trabajo es una generalización de la lógica clásica. En él se tiene un operador llamado "negación

[1]Este trabajo forma parte de los resultados del proyecto de investigación Py0137,*Inferencia visual para sistemas deductivos con operador negación*, el cual es financiado por la Universidad EAFIT en 2001 y 2002.

[2]Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad EAFIT, Medellín.

débil", el cual tiene la característica de no prohibir la compatibilidad de un enunciado con su negación ni la indeterminaciones respecto a la negación.

2 Árboles de forzamiento semántico clásico.[3]

2.1 Construcción de enunciados.

Enunciados atómicos: $A, B, C, \ldots$
Enunciados compuestos: generados a partir de los atómicos utilizando los conectivos binarios $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y el conectivo unario $\sim$.

2.2 Árboles de construcción de enunciados.

El árbol de construcción del enunciado α lo representamos α^* y lo construimos utilizando las siguientes reglas (A enunciado atómico, α y β enunciados arbitrarios):

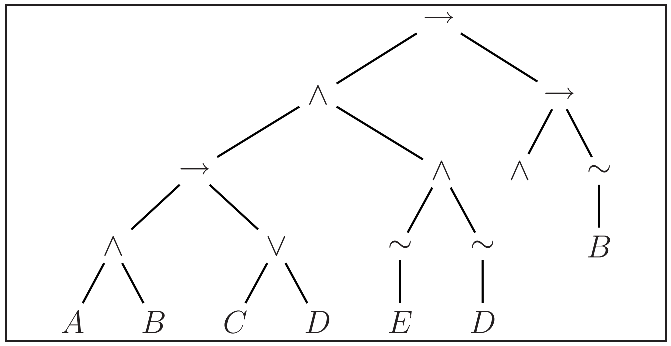
$$\boxed{A^* = A}$$

$$\boxed{(\sim \alpha)^* = \begin{array}{c} \sim \\ | \\ \alpha^* \end{array}} \quad \boxed{(\alpha \vee \beta)^* = \begin{array}{ccc} & \vee & \\ / & & \backslash \\ \alpha^* & & \beta^* \end{array}} \quad \boxed{(\alpha \wedge \beta)^* = \begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ \alpha^* & & \beta^* \end{array}}$$

$$\boxed{(\alpha \rightarrow \beta)^* = \begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ / & & \backslash \\ \alpha^* & & \beta^* \end{array}} \quad \boxed{(\alpha \leftrightarrow \beta)^* = \begin{array}{ccc} & \leftrightarrow & \\ / & & \backslash \\ \alpha^* & & \beta^* \end{array}}$$

Definimos el árbol de construcción de un argumento $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ como:$((\alpha_1 \wedge \ldots \alpha_n) \rightarrow \beta)^*$, el árbol del condicional asociado al argumento. El nodo superior de un árbol lo llamamos la raíz del árbol y corresponde al conectivo principal del enunciado, los nodos inferiores, es decir aquellos de los cuales no salen ramas, los llamamos *hojas* y corresponden a los enunciados atómicos. Para el argumento:$(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D), \sim E \wedge \sim D \vdash A \rightarrow \sim B$, el condicional asociado es:$([(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [\sim E \wedge \sim D]) \rightarrow [A \rightarrow \sim B]$ y su árbol es:

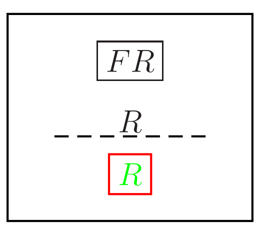
[3]Los Árboles de Forzamiento Semántico Clásico fueron presentados por primera vez en 1999, en el VII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, en la Universidad de Antioquia, Medellín. Presentado también en [Sierra01a].



2.3 Árboles de forzamiento clásico.

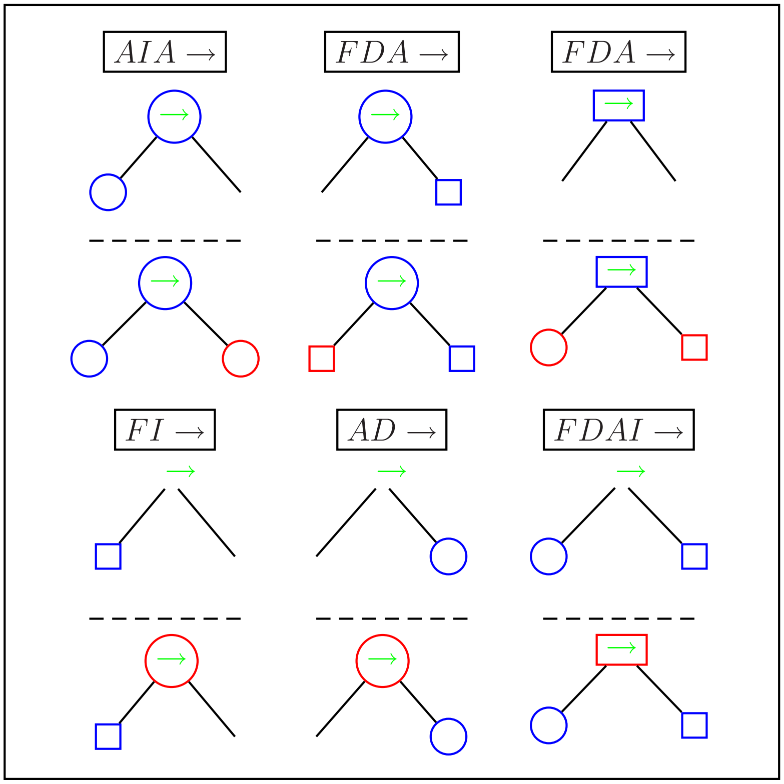
Los árboles de forzamiento semántico se construyen a partir de los árboles de construcción de enunciados utilizando las siguientes *reglas de inferencia para el forzamiento semántico*. Intuitivamente un nodo marcado con un círculo acepta el enunciado asociado al nodo, un nodo marcado con un cuadro rechaza el enunciado asociado al nodo.

2.3.1 Regla básica.



FR **(Falsedad de la Raíz)**: El nodo raíz siempre está marcado con cuadro. Con esta regla se esta suponiendo que el enunciado (o argumento) asociado al árbol no es válido.

2.3.2 Reglas para el condicional $\rightarrow$



$AIA \rightarrow$ **(Afirmación a la Izquierda, Afirmación del Condicional)**: Cuando se tiene un condicional aceptado y el antecedente es aceptado, se infiere que el consecuente es aceptado.

$FDA \rightarrow$ **(Falsedad a la Derecha, Afirmación de Condicional)**: Cuando se tiene un condicional aceptado y el consecuente es rechazado, se infiere que el antecedente es rechazado.

$F \rightarrow$ **(Falsedad del Condicional)**: De un condicional rechazado, se infiere que el antecedente es aceptado y el consecuente rechazado.

$FI \rightarrow$ **(Falsedad a la Izquierda en un Condicional)**: Un condicional es aceptado cuando su antecedente es rechazado.

$AD \rightarrow$ **(Afirmación a la Derecha en un Condicional)**: Un condicional es aceptado cuando su consecuente es aceptado.

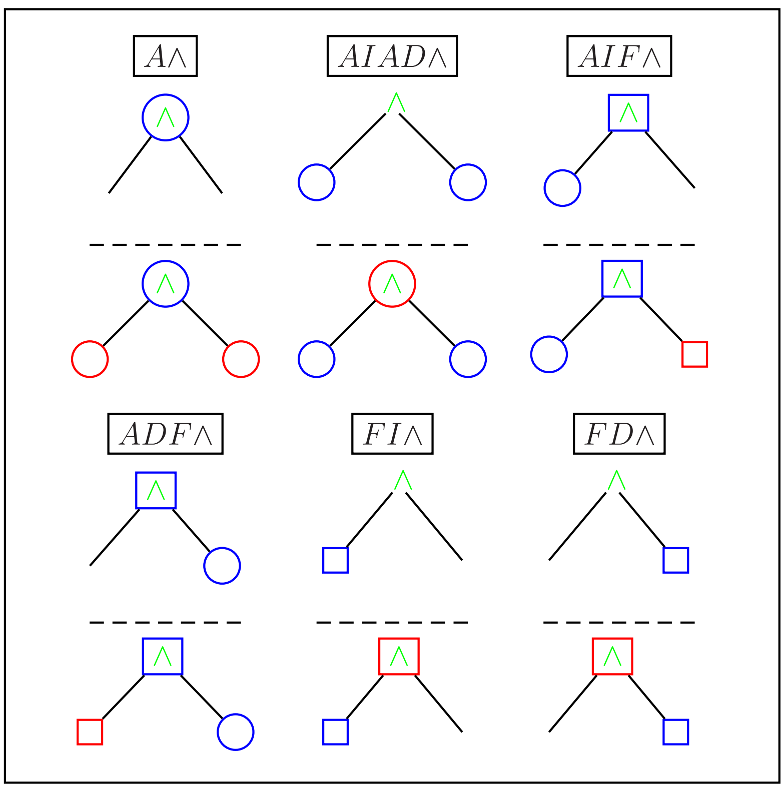
$FDAI \rightarrow$ **(Falsedad a la Derecha, Afirmación a la Izquierda en un Condicional)**: Un condicional es rechazado cuando el antecedente es aceptado y el consecuente es rechazado. Basta tomar como primitivas las reglas $FI \rightarrow$, $AD \rightarrow$ y $FDAI \rightarrow$, ya que las otras 3 reglas son derivadas de estas.

2.3.3 Reglas para la conjunción $\wedge$.

$A\wedge$ **(Afirmación de la Conjunción)**: Ambos componentes de una conjunción son acepta-dos cuando la conjunción lo es.

$AIAD\wedge$ **(Afirmación a la Izquierda, Afirmación a la Derecha en la Conjunción)**: Si ambos componentes de una conjunción son aceptados, se infiere que la conjunción es aceptada.

$AIF\wedge$ **(Afirmación Izquierda, Falsedad de la Conjunción)**: De una conjunción rechazada con uno de sus componentes aceptado, se infiere que el otro componente es rechazado.



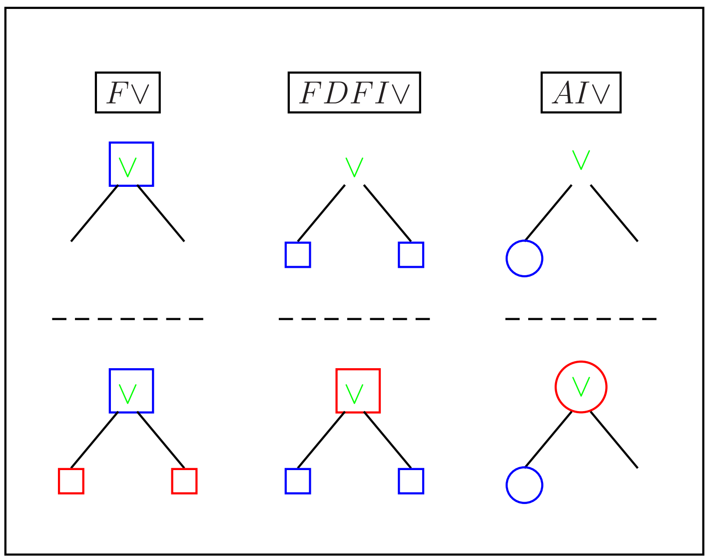
$ADF\wedge$ **(Afirmación Derecha, Falsedad de la Conjunción)**: De una conjunción rechazada con uno de sus componentes aceptado, se infiere que el otro componente es rechazado.

$FI\wedge$ **(Falsedad a la Izquierda en la Conjunción)**: Una conjunción es rechazada cuando uno de sus componentes lo es.

$FD\wedge$ **(Falsedad a la Derecha en la Conjunción)**: Una conjunción es rechazada cuando uno de sus componentes lo es.

Basta tomar como primitivas las reglas $A\wedge$ y $AIAD\wedge$, ya que las otras 4 reglas son derivadas de estas.

2.3.4 Reglas para la disyunción $\vee$.



$F\vee$ **(Falsedad de la Disyunción)**: Se infiere que ambos componentes de una disyunción son rechazados cuando la disyunción es rechazada.

$FDFI\vee$ **(Falsedad a la Derecha, Falsedad a la Izquierda de una Disyunción)**: Una disyunción es rechazada cuando sus componentes son rechazados.

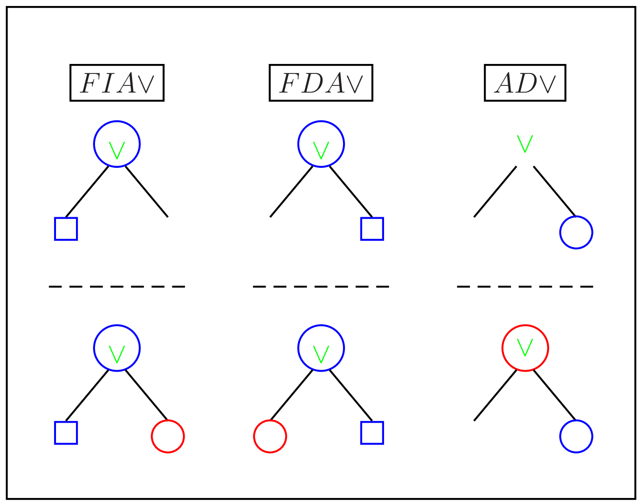
$AD\vee$ **(Afirmación a la Derecha de una Disyunción)**: Una disyunción es aceptada cuando uno de sus componentes lo es.

$AI\vee$ **(Afirmación a la Izquierda de una Disyunción)**: Una disyunción es aceptada cuando uno de sus componentes lo es.

$FIA\vee$ **(Falsedad a la izquierda, Afirmación de la Disyunción)**: Cuando una disyunción es aceptada y uno de sus componentes es rechazado, se infiere que el otro componente es aceptado.

$FDA\vee$ **(Falsedad a la Derecha, Afirmación de la Disyunción)**: Cuando una disyunción es aceptada y uno de sus componentes es rechazado, se infiere que el otro componente es aceptado.

Basta tomar como primitivas las reglas $F\vee$ y $FDFI\vee$, ya que las otras 4 reglas son derivadas de estas.



2.3.5 Reglas para la negación clásica $\sim$.

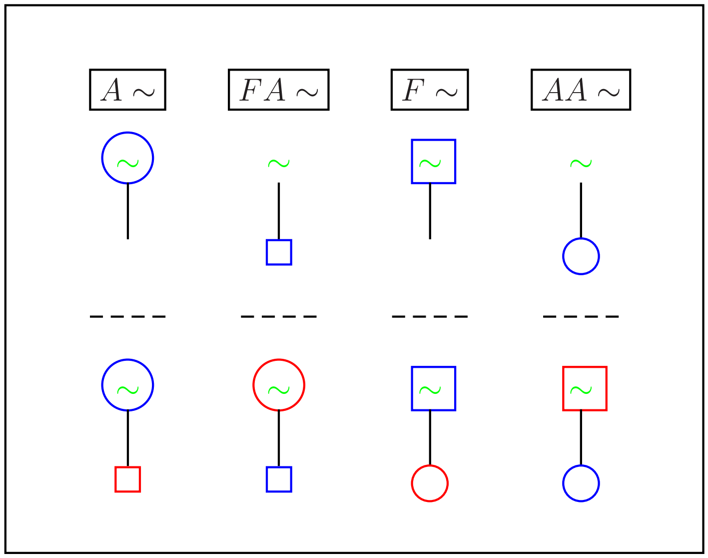
$A\sim$ **(Afirmación de la Negación)**: El alcance de una negación es rechazado cuando la negación es aceptada.

$FA\vee$ **(Falsedad del Alcance de la Negación)**: Una negación es aceptada cuando su alcance es rechazado.

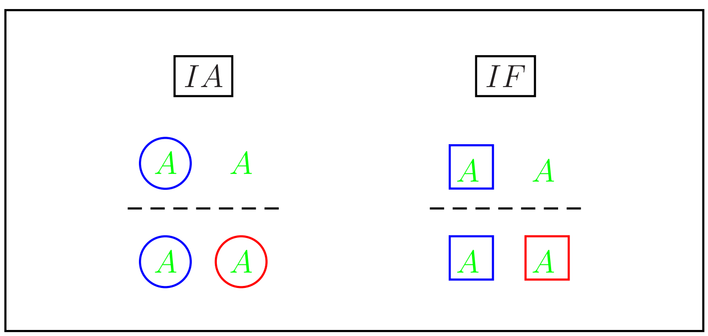
$F\vee$ **(Falsedad de la Negación)**: El alcance de una negación es aceptado cuando la negación es rechazada.

$AA\vee$ **(Afirmación del Alcance de la Negación)**: Una negación es rechazada cuando su alcance es aceptado.

Basta tomar como primitivas las reglas $A\vee$ y $FA\vee$, ya que las otras 2 reglas son derivadas de estas.



2.3.6 Reglas para la iteración de marcas.

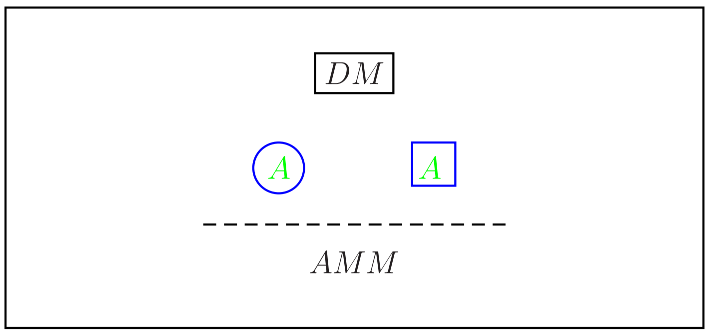


IA **(Iteración de la Afirmación)**: Cuando un enunciado es aceptado, lo seguirá siendo siempre.
IF **(Iteración de la Falsedad)**: Cuando un enunciado es rechazado, lo seguirá siendo siempre.

2.4 Tipos de árboles.

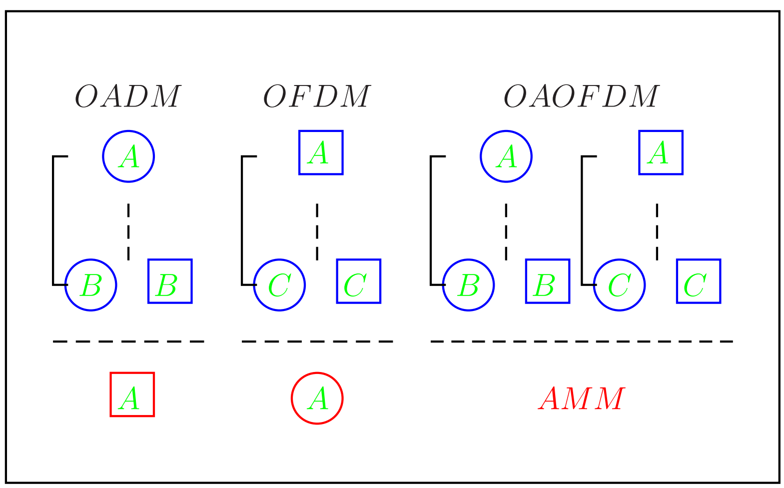
Un árbol de forzamiento semántico está **bien marcado** (**ABM**) si todos sus nodos están marcados y no existe doble marca (no existen nodos asociados a un mismo enunciado y con distinta marca). Un árbol de forzamiento semántico está **mal marcado** (**AMM**) si no está bien marcado, es decir, si existe un nodo con doble marca (existen nodos asociados a un mismo enunciado y con distinta marca).

Doble marca



DM **(Doble Marca)**: Si dos nodos asociados a un mismo enunciado tienen marcas distintas entonces el árbol está mal marcado.

2.5 Opciones en el forzamiento.



Sea A un hoja sin marcar:

2.5.1 $OADM$(Opción Afirmativa con Doble Marca)

Si sesupone que un enunciado es aceptado y se obtiene una contradicción entonces dicho enunciado es rechazado.

2.5.2 $OFDM$ (Opción Falsa con Doble Marca)

Si se supone que un enunciado es rechazado y se obtiene una contradicción entonces dicho enunciado es aceptado.

2.5.3 $OAOFDM$ (Opción Afirmativa y Opción Falsa con Doble Marca)

Si suponemos que un enunciado es rechazado y se obtiene una contradicción, y además, si se supone que el enunciado es aceptado y se obtiene una contradicción entonces la contradicción no depende de dicho enunciado.

Este teorema nos permite tomar opciones cuando es imposible aplicar las reglas de inferencia para el forzamiento semántico y el árbol está incompleto (opción 1: A marcado con círculo, opción 2: A marcado con cuadro). Este procedimiento se generaliza de manera natural si es necesario tomar opciones sobre hojas asociadas a enunciados diferentes.

2.6 Validez y completitud.

Si interpretamos un enunciado marcado con círculo como verdadero y un enunciado marcado con cuadro como falso, podemos verificar que las reglas de forzamiento solo generan enunciados que se siguen lógicamente de las premisas, también podemos verificar que dado un sistema deductivo para la lógica clásica, los árboles de forzamiento de todos sus axiomas están mal marcados, podemos así concluir que: Un enunciado (o argumento) es válido (no existe una asignación de valores de verdad que lo refute) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado (o al argumento) está mal marcado, es decir, un enunciado (o argumento) es inválido (existe una asignación de valores de verdad que lo refuta) si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado (o al argumento) está bien marcado.

Si un árbol de forzamiento semántico asociado a un enunciado (o argumento) está bien marcado, la interpretación de las marcas de sus hojas nos proporciona una asignación de valores de verdad que refuta el enunciado (o argumento).

Podemos concluir que los árboles de forzamiento semántico nos proporcionan un método de decisión para el cálculo proposicional clásico.

2.7 Algunos teoremas importantes.

Las preguntas naturales en este punto están relacionadas con la validez de los siguientes principios: Principio de no contradicción $\sim (A \wedge \sim A)$, principio del tercero excluido $A \vee \sim A$, principio de trivialización $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$, principio de reducción al absurdo débil $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim B) \sim A]$, principio de reducción al absurdo fuerte $(\sim A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow A]$ negación de la conjunción $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$, negación de la disyunción $\sim (A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$, negación del condicional $\sim (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \sim B)$, negación del bicondicional $\sim (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$, negación de la negación $\sim\sim A \leftrightarrow A$, contra reciproca $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$, implicación material $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$, silogismo disyuntivo $((A \vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$ y modus tollens $((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$.

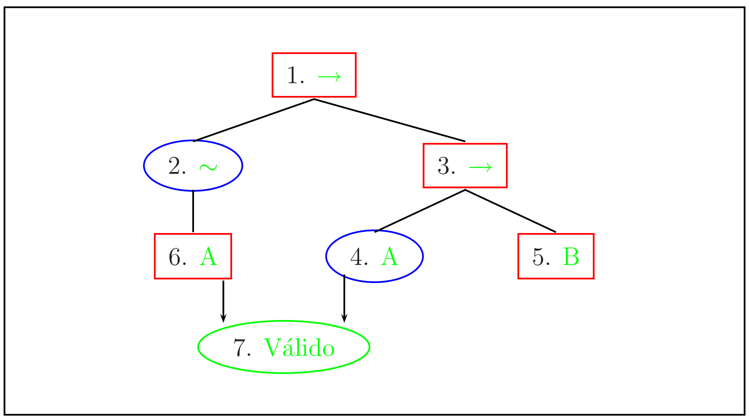


Figura 1: Principio de Trivialización: $\models \sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Justificaciones de la figura 1

1. FR. 2, 3. $F \rightarrow$ en 1. 4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6.$A \sim$ en 2. 7. DM en 6 y 4.

El anterior resultado indica que la lógica clásica no soporta contradicciones, es decir: de un enunciado y su negación se puede deducir cualquier otro enunciado (el sistema se trivializa)[4] , por lo que la lógica clásica no sirve de base

[4]Una teoría es inconsistente con respecto a un operador negación * con una lógica de base L sii existe un enunciado A tal que la teoría tiene como consecuencia con la lógica L tanto A como *A. Una teoría es trivial con una lógica de base L sii la teoría tiene como consecuencia con la lógica L todas las fórmulas.

para teorías inconsistentes, puesto que las hace triviales, es decir, las teorías serían completamente inútiles. Para fundamentar teorías inconsistentes pero no triviales, debe tenerse una lógica de base en la cual el principio de trivialización no sea válido, es decir, una lógica que soporte las inconsistencias, tales lógicas son llamadas Lógicas Paraconsistentes. Mas adelante se presenta el operador negación débil, el cual no trivializa las teorías inconsistentes.

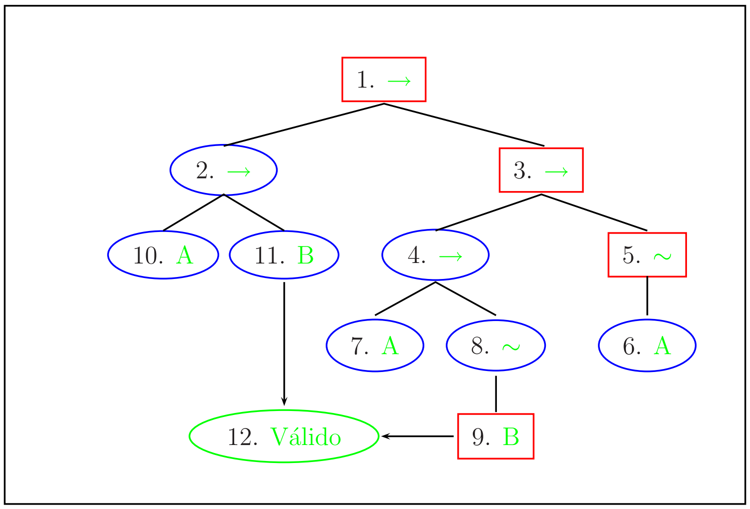


Figura 2: Reducción al Absurdo Débil:$\models (A \to B) \to \{(A \to \sim B) \to \sim A\}$

Justificaciones de la figura 2

1. FR.	2, 3. $F \to$ en 1.	4, 5. $F \to$ en 3.
6. $F \sim$ en 5.	7. IA en 6.	8. $AIA \to$ en 7 y 4.
9. $A \sim$ en 8.	10. IA en 6.	11. $AIA \to$ en 10 y 2.
12. DM en 11 y 9.		

Del anterior resultado se concluye que cuando se quiere probar que un enunciado es rechazado, basta suponer que es aceptado y obtener a partir de este supuesto otro enunciado y la negación de este, es decir una contradicción.

Justificaciones de la figura 3

1. FR.	2. $F \sim$ en 1.	3, 4. $A\wedge$ en 2.
5. $A \sim$ en 4.	6. DM en 3 y 5.	

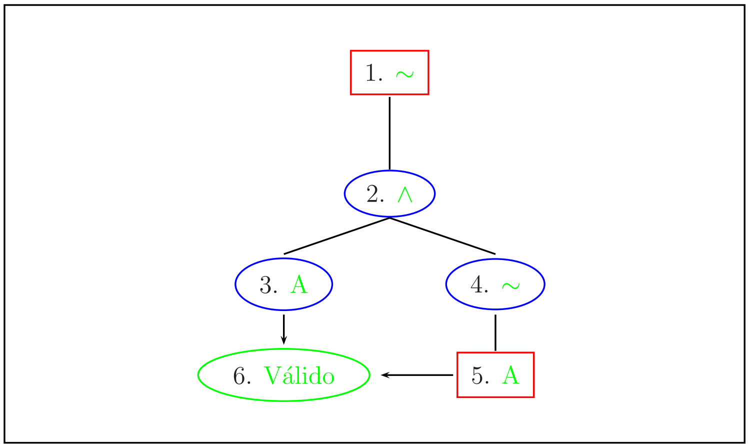


Figura 3: Principio de No Contradicción:$\models \sim (A \wedge \sim A)$

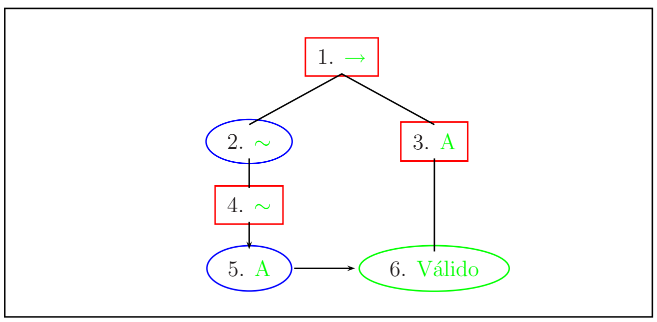


Figura 4: Eliminación de la Doble Negación:$\models \sim\sim A \rightarrow A$

Este resultado puede leerse: un enunciado no puede ser a la vez aceptado y rechazado.

Justificaciones de 4

1. FR. 2, 3. $F \rightarrow$ en 1. 4. $A \sim$ en 2.
5. $F \sim$ en 4. 6. DM en 5 y 3.

Este resultado puede leerse: si es rechazada el rechazo de un enunciado entonces este enunciado es aceptado.

Justificaciones de la figura 5

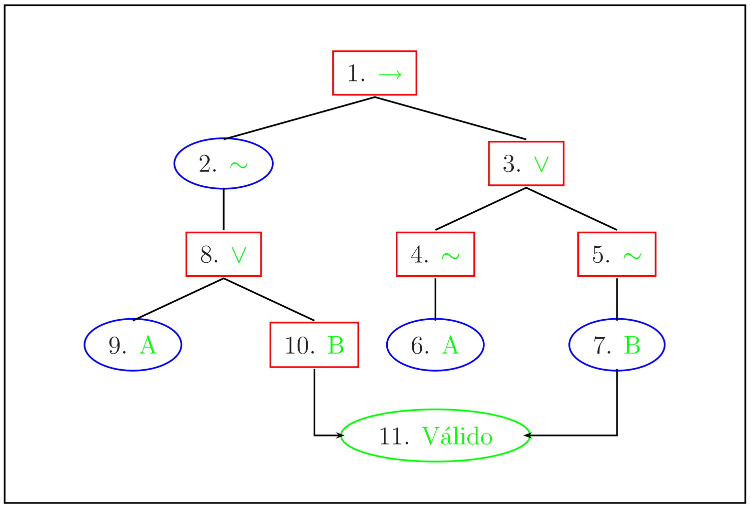


Figura 5: Negación de la Conjugación:$\models \sim (A \wedge B) \to \sim A \vee \sim B$

1. FR.	2, 3. $F \to$ en 1.	4, 5. $F\vee$ en 3.
6. $F \sim$ en 4.	7. $F \sim$ en 5.	8. $A \sim$ en 8.
9. IA en 6.	10.$AIF\wedge$ en 9 y 8.	11. DM en 10 y 7.

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Si es rechazado que ambos son aceptados entonces uno de los dos es rechazado.

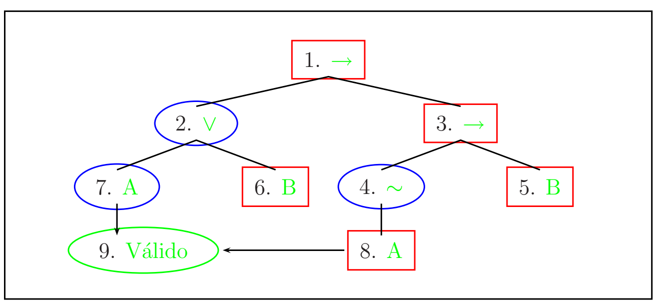


Figura 6: Negación de la Disyunción:$\models \sim (A \vee B) \to \sim A \vee \sim B$

Justificaciones de la figura 6

1. FR.	2, 3. $F \to$ en 1.	4. $A \sim$ en 2.
5, 6. $F\vee$ en 4.	7. IF en5.	8. $FA \sim$ en 7.
9. $AIF\wedge$ en 8 y 3.	10. $F \sim$ en 9.	11. DM en 6 y 10.

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Si es rechazado que uno de los dos sea aceptado entonces ambos son rechazados.

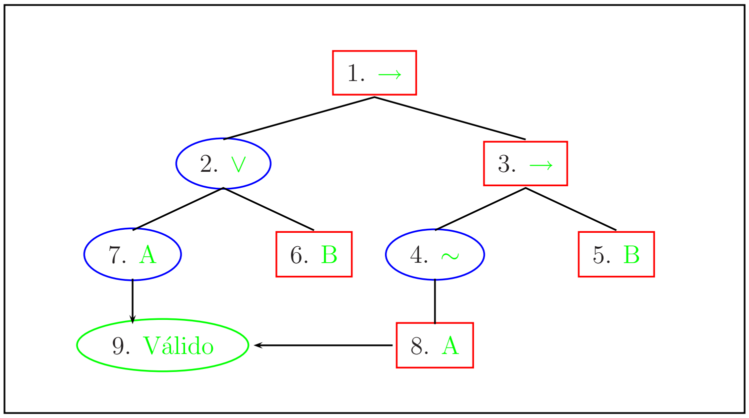


Figura 7: Silogismo Disyuntivo:$\models A \vee B \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$

Justificaciones de la figura 7

1. FR.	2, 3. $F \rightarrow$ en 1.	4, 5.$F \rightarrow$ en 3.
6. IF en 5.	7. $FDA\wedge$ en 6 y 2.	8. $A \sim$ en 4.
9. DM en 7 y 8.		

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Si al menos uno de dos enunciados es aceptado y uno de ellos es rechazado entonces el otro es aceptado.

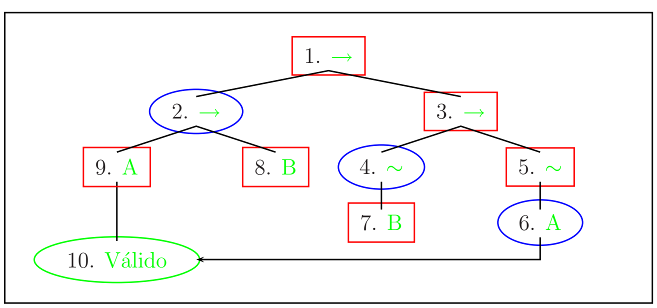


Figura 8: Contra Reciproca Débil:$\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

Justificaciones de la figura 8

1. FR.	2, 3. $F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6. $F \sim$ en 5.	7. $A \sim$ en 4.	8. IF en 7.
9. $FDA \rightarrow$ en 8 y 2.	10. DM en 9 y 6.	

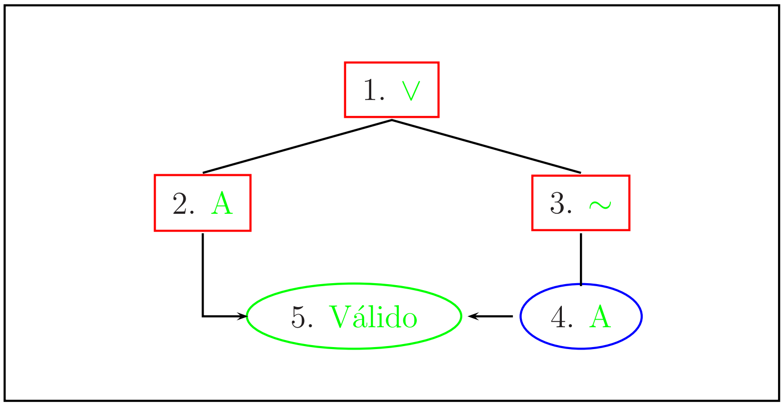


Figura 9: Tercero Excluido:$\models A \vee \sim A$

Justificaciones de la figura 9

1. FR.	2, 3. $F\vee$ en 1.	4. $F \sim$ en 3.
5. DM en 2 y 4.		

El anterior resultado puede leerse de la siguiente forma: Un enunciado es aceptado o es rechazado. Este resultado junto con el principio de no contradicción dicen que un enunciado es aceptado o rechazado pero no ambos.

3 Árboles de Forzamiento Semántico para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica.[5] - LBPcoC

Los árboles de forzamiento semántico para el sistema de Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica LBPcoC, se obtienen a

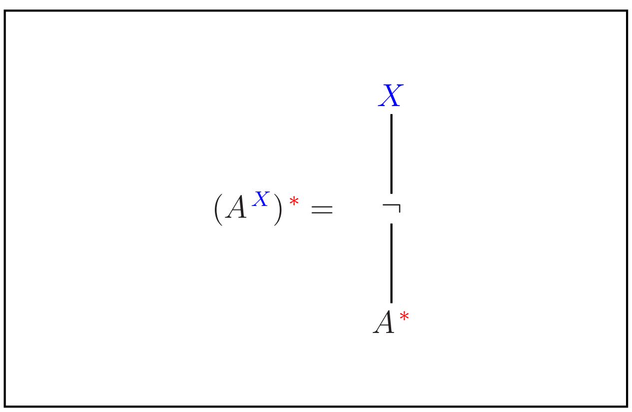
[5]El fragmento correspondiente a la Lógica básica paraconsistente fue presentado por primera vez en el VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas celebrado en la ciudad de Pasto en septiembre de 2001. Presentado en [Sierra01b].

partir de los árboles de forzamiento semántico clásicos, agregando otro operador de negación llamado *Negación Débil* ($\neg$) junto con reglas de inferencia similares a las del operador *Negación Clásica* ($\sim$) pero debilitadas.

Para obtener el sistema LBPcoC, no se toman las reglas Afirmación de la Negación Débil ($A\neg$) y Afirmación del Alcance de la Negación Débil ($AA\neg$), estas reglas solo podrán ser aplicadas a una fórmula cuando dicha fórmula sea incompatible con su negación, es decir cuando A^Isea aceptada (la fórmula A^I se lee: A es incompatible con su negación). Tampoco se toman las reglas Falsedad de la Negación Débil ($F\neg$) y Falsedad del Alcance de la Negación Débil ($FA\neg$), estas reglas solo podrán ser aplicadas a una fórmula cuando dicha fórmula sea completa respecto a la negación, es decir cuando A^C sea aceptada (La fórmula A^C se lee: A es completa).

Con este debilitamiento puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con círculo (sean ambas aceptadas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula y su negación son compatibles. También puede ocurrir que una fórmula y su negación débil estén marcadas con cuadro (sean ambas rechazadas) y no se genere doble marca, es decir, la fórmula es incompleta respecto a la negación.

Los árboles de una incompatibilidad y una completez tienen la siguiente forma (A^* = el árbol de A y X es I o C):

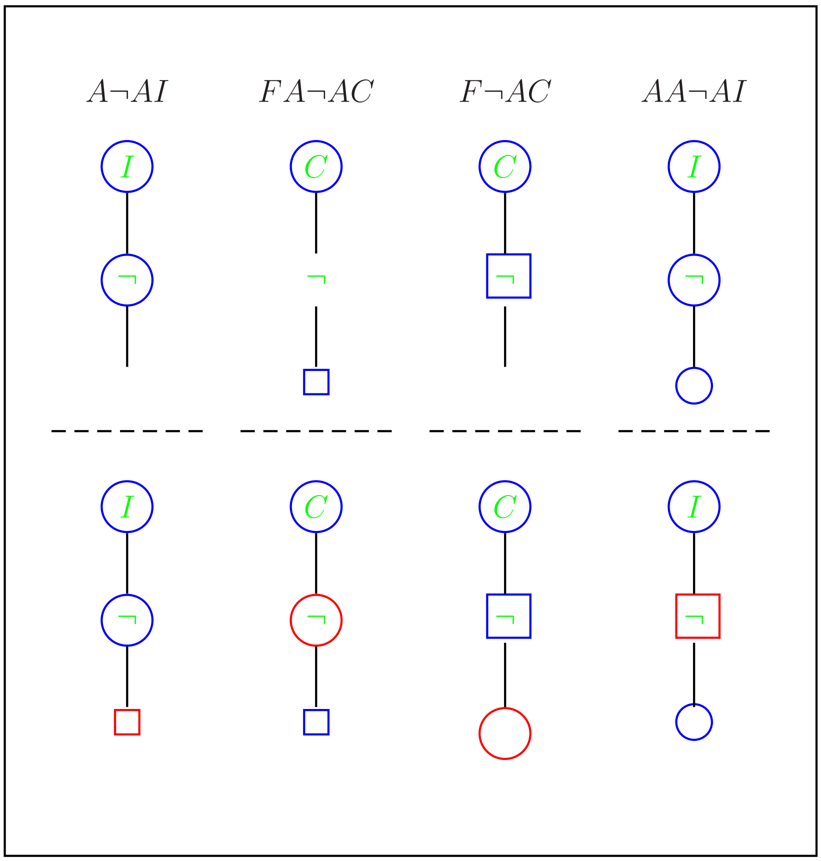


3.8 Reglas de inferencia para la Negación Débil

$A\neg AI$ **(Afirmación de la Negación y Afirmación de la Incompatibilidad)**: El alcance de una negación es rechazado cuando la negación es aceptada y es incompatible con su alcance.

$FA\neg AC$ **(Falsedad del Alcance de la Negación y Afirmación de la Completez)**: Una negación es aceptada cuando su alcance es rechazado y completo.

$F\neg AC$ **(Falsedad de la Negación y Afirmación de la Completez)**: El alcance de una negación es aceptado cuando la negación es rechazada y el alcance completo.



$AA\neg AI$ **(Afirmación del Alcance de la Negación y Afirmación de la Incompatibilidad)**: Una negación es rechazada cuando su alcance es aceptado y es incompatible con su negación.

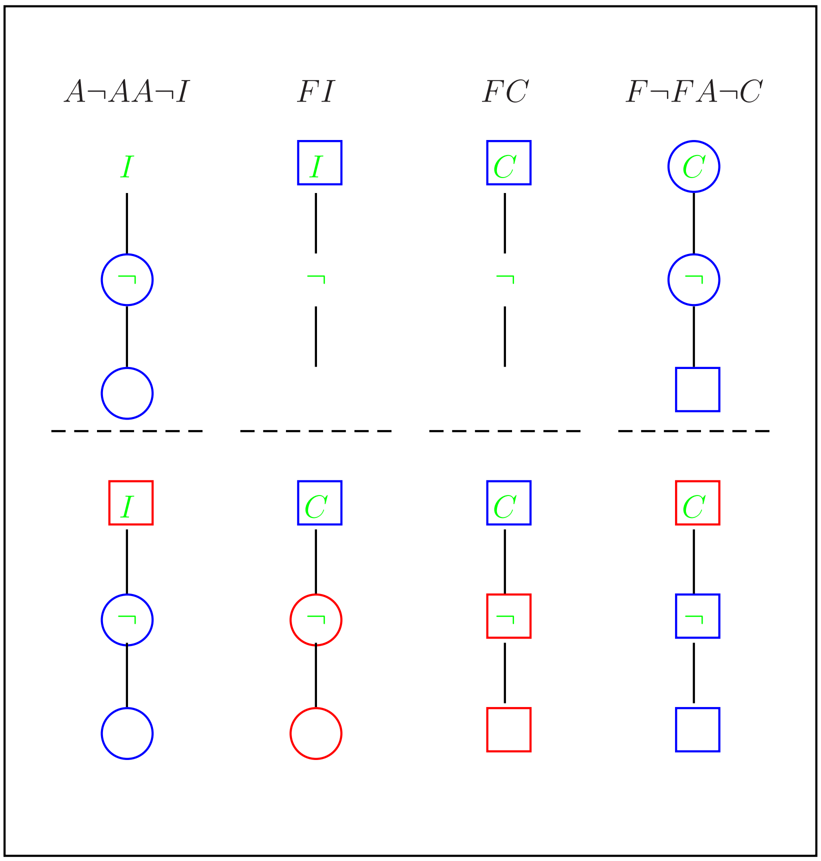
$A\neg AA\neg I$ **(Afirmación de la Negación y Afirmación del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad)**: La incompatibilidad de un enunciado y su negación es rechazada cuando el enunciado y su negación son aceptados.

FI **(Falsedad de la Incompatibilidad)**: Un enunciado y su negación son aceptados cuando la incompatibilidad es rechazada.

$F\neg I$ **(Falsedad de la Negación en la Incompatibilidad)**: Una incompatibilidad es aceptada cuando es rechazada la negación en su alcance.

$FA\neg I$ **(Falsedad del Alcance de la Negación en la Incompatibilidad)**: Una incompatibilidad es aceptada cuando es rechazado el alcance de la negación en su alcance.

$A\neg C$ **(Afirmación de la Negación en la Completez)**: Una completez es aceptada cuando es aceptada la negación en su alcance.



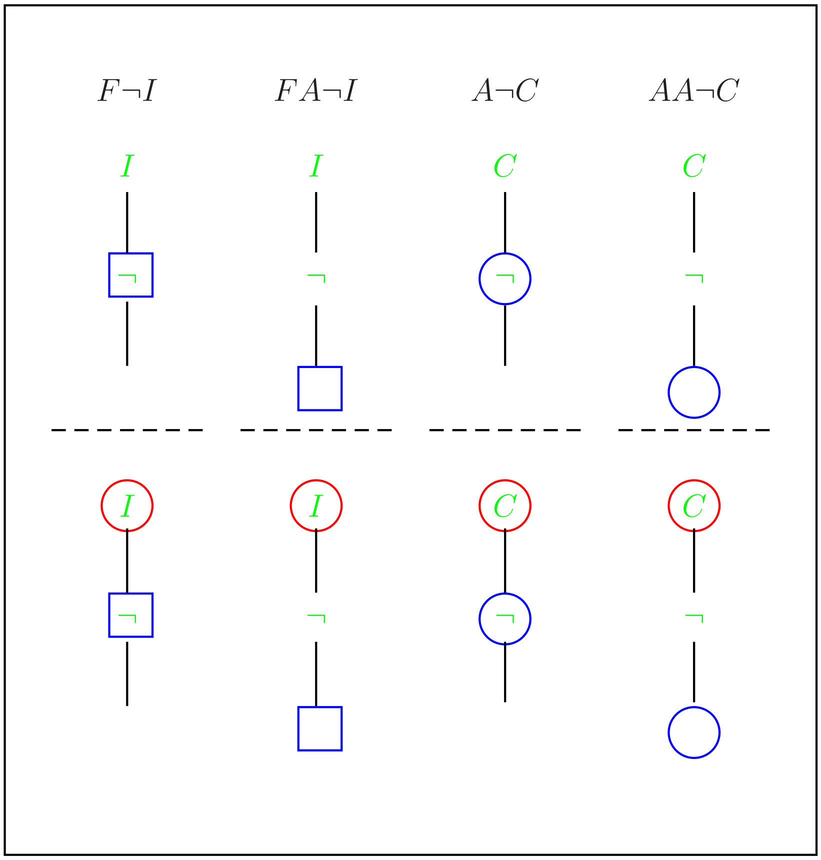
$AA\neg C$ **(Afirmación del Alcance de la Negación en la Completez)**: Una completez es aceptada cuando es aceptado el alcance de la negación en su alcance.

FC **(Falsedad de la Completez)**: Un enunciado y su negación son rechazados cuando la completez es rechazada.

$F\neg FA\neg C$ **(Falsedad de la Negación Falsedad del Alcance de la Ne-**

gación en la Completez): Cuando un enunciado y su negación son rechazados, la completez es rechazada.

Observar que basta tomar como primitivas las reglas $A\neg AI$, FI, $FA\neg AC$ y FC ya que las otras reglas son derivadas de estas.



3.9 Algunas consecuencias

Las preguntas naturales en este punto están relacionadas con la validez de los siguientes principios, los cuales son válidos cuando la negación es clásica: Principio de no contradicción $\neg(A \wedge \neg A)$, principio del tercero excluido $A \vee \neg A$, Principio de trivialización $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, principio de reducción al absurdo $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$, negación de la conjunción $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$, negación de la diyunción $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, negación del condicional $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$, negación del bicondicional

$\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)]$, negación de la negación $\neg\neg A \leftrightarrow A$, contrarreciproca $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, etc.

Justificaciones de la figura 10

1. FR.	2, 3. $F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6, 7. $F \rightarrow$ en 5.	8. IA en 6.	9. IA en 4.
10. $A\neg AI$ en 2 y 9	11. DM en 8 y 10.	

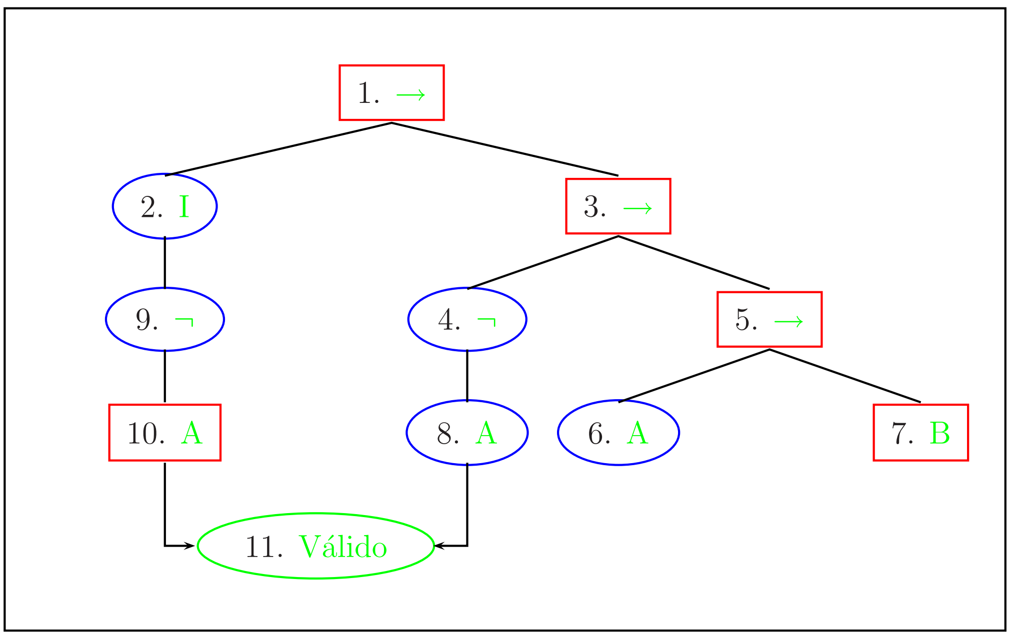


Figura 10: Principio de Trivialización:$\models A' \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$

Los pasos $1, \ldots, 11$ indican que es válido el enunciado $A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$. Los pasos $3, \ldots, 8$ indican que el enunciado $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $\neg A = 1$ y $B = 0$, los modelos en los cuales ocurre que un enunciado y su negación son aceptados se llaman Modelos Inconsistentes[6].

[6]Los *modelos consistentes respecto al operador negación* $\sim$ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos, los cuales satisfacen la siguiente definición (para M un modelo, A y B fórmulas, p fórmula atómica): M satisface p sii

La no validez del enunciado $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (principio de trivialización) indica que el sistema LBPcoC soporta las contradicciones, es decir, pueden tenerse como teoremas los enunciados A y $\neg A$ y a pesar de ello el sistema no se trivializa (demuestra todas las fórmulas).

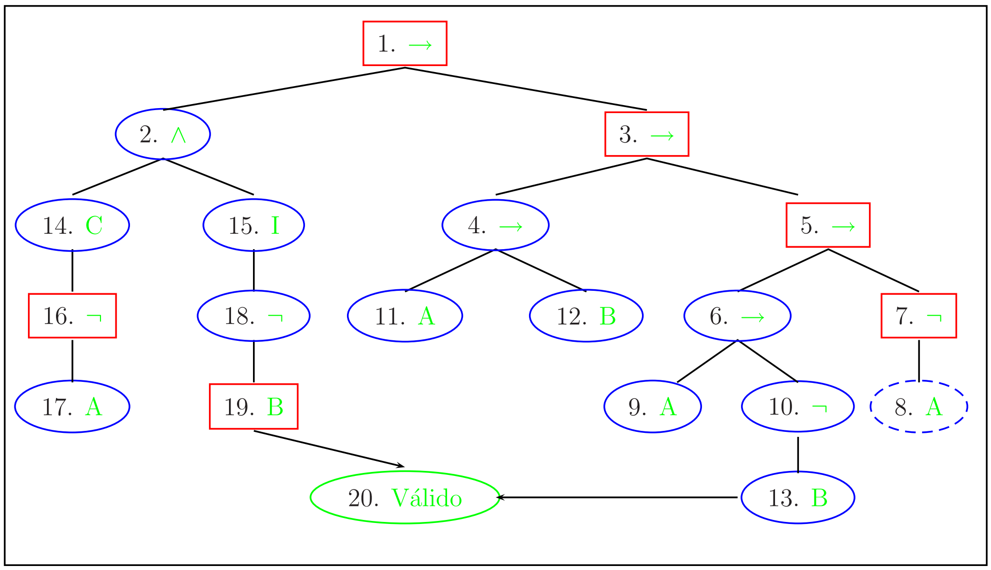


Figura 11: Reducción al Absurdo Débil:$\models A^C \wedge B' \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\}]$

$p \in M$. M satisface $\sim A$ sii M no satisface A. M satisface $A \wedge B$ sii M satisface A y M satisface B. M satisface $A \vee B$ sii M satisface A o M satisface B. M satisface $A \rightarrow B$ sii M no satisface A o M satisface B. Los *modelos inconsistentes (y completos) respecto al operador negación débil* $\neg$ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios, los cuales satisfacen la siguiente definición: M satisface $\neg A$ sii M no satisface A o $\neg A \in M$. Los *modelos incompletos (y consistentes) respecto al operador negación débi* $\neg$ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbi-trarios, los cuales satisfacen la siguiente definición: M satisface $\neg A$ sii M no satisface A y $\neg A \in M$. Los *modelos incompletos e inconsistentes respecto al operador negación débi* $\neg$ (para el caso de la lógica proposicional), son conjuntos de enunciados atómicos junto con la negación débil de enunciados arbitrarios.

Justificaciones de la figura 11

1. FR.	2, 3. $F\to$ en 1.	4, 5. $F\to$ en 3.
6, 7. $F\to$ en 5.	8. Opción.	9. IA en 8.
10. $AIA\to$ en 9 y 6.	11. IA en 8.	12. $AIA\to$ en 11 y 4.
13. IA en 12.	14, 15. $A\wedge$ en 2.	16. IF en 7.
17. $F\neg AC$ en 16 y 14.	18. IA en 10.	19. $A\neg AI$ en 18 y 15.
20. DM en 13 y 19.		

Los pasos $1,\ldots,20$ indican que es válido el enunciado $A^C \wedge B^I \to [(A \to B) \to \{(A \to \neg B) \to \neg A\}]$. Los pasos $3,\ldots,13$ indican que el enunciado $(A \to B) \to \{(A \to \neg B) \to \neg A\}$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $\neg A = 0$, $B = 1$ y $\neg B = 1$. Observar que en análisis final el paso 8 no es una opción ya que se infiere en el paso 17.

Justificaciones de la figura 12

1. FR.	2, 3. $F\to$ en 1.	4. Opción.
5, 6. $A\wedge$ en 4.	7. IA en 5.	8, 9. $A\wedge$ en 2.
10. IF en 3.	11. $F\neg AC$ en 10 y 8.	12, 13. $A\wedge$ en 11.
14. IA en 12.	15. IA en 13.	9. $A\neg AI$ en 15 y 9.
17. DM en 16 y 7.		

Los pasos $1,\ldots,17$ indican que es válido el enunciado $(A \wedge \wedge A)^C \wedge A^I \to \neg(A \wedge \neg A)$. Los pasos $3,\ldots,7$ indican que el enunciado $\neg(A \wedge \neg A)$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $\neg A = 1$ y $\neg(A \wedge \neg A) = 0$. Observar que en análisis final el paso 4 no es una opción ya que se infiere en el paso 11. El anterior resultado indica que no es válido el principio de no contradicción para la negación débil, el cual es uno de los teoremas fundamentales de la lógica clásica.

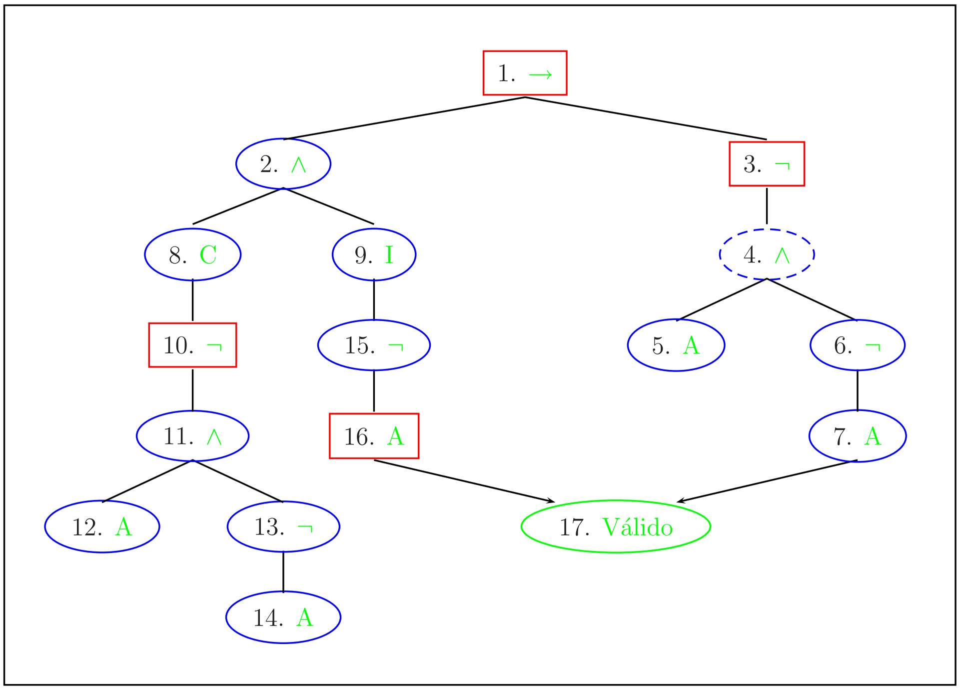


Figura 12: Principio de No Contradicción:$\models (A \wedge \neg A)^C \wedge A' \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$

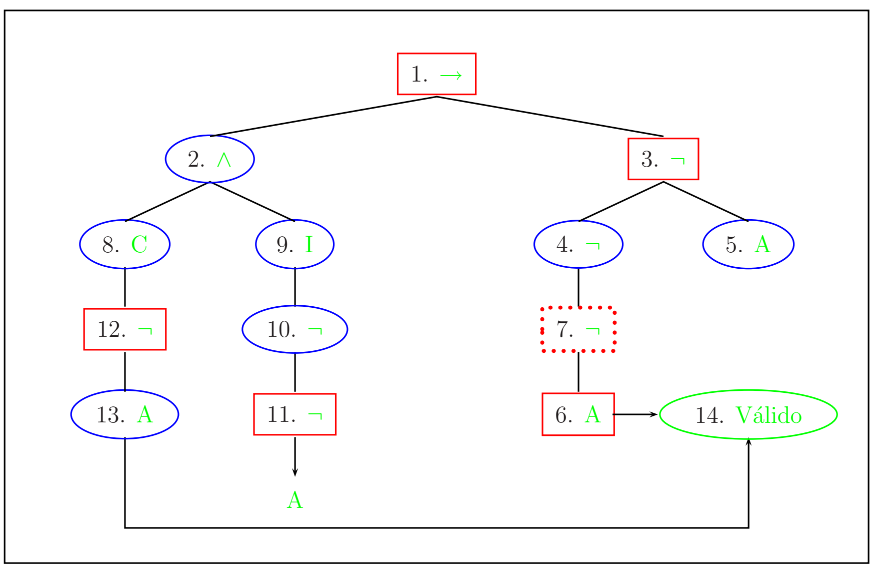


Figura 13: Eliminación de la Doble Negación:$\models (A^C \wedge (\neg A)') \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$

Justificaciones de la figura 13

1. FR.	2, 3. $F \to$ en 1.	4, 5. $F \to$ en 3.
6. IF en 5.	7. Opción.	8, 9. $A\wedge$ en 2.
10. IA en 4.	11. $A\neg AI$ en 10 y 9.	12. IF en 11.
13. $F\neg AC$ en 12 y 8.	14. DM en 6 y 13.	

Los pasos $1, \ldots, 14$ indican que el enunciado $(A^C \wedge (\neg A)^I) \to (\neg\neg A \to A)$ es válido, los pasos $3, \ldots, 7$ indican que el enunciado $\neg\neg A \to A$ es inválido y que es refutado por un modelo en el que $A = 0$, $\neg A = 0$ y $\neg\neg A = 1$. Observar que en análisis final el paso 7 no es una opción ya que se infiere en el paso 12.

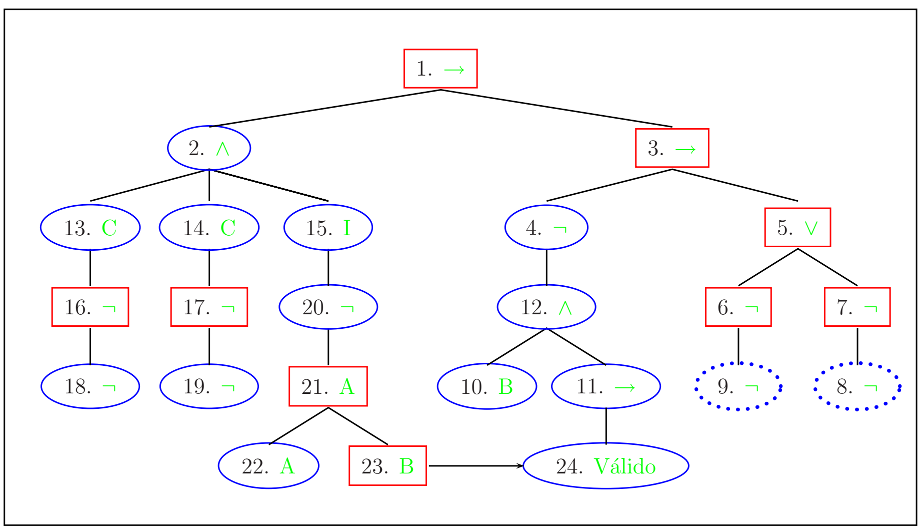


Figura 14: Negación de la Conjunción:$\models [A^C \wedge B^C \wedge (A \wedge B)'] \to [\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)]$

Justificaciones de la figura 14

1. FR.
2, 3. $F\rightarrow$ en 1.
4, 5. $F\rightarrow$ en 3.
6, 7. $F\vee$ en 5.
8. Opción.
9. Opción.
10. IA en 9.
11. IA en 8.
12. $AIAD\wedge$ en 10 y 11.
13, 14 y 15. $A\wedge$ en 2.
16. IF en 6.
17. IF en 7.
18. $F\neg AC$ en 16 y 13.
19. $F\neg AC$ en 17 y 14.
20. IA en 4.
21. $A\neg AI$ en 20 y 15.
22. IA en 18.
23. $AIF\neg$ en 22 y 21.
24. DM en 23 y 11.

De los pasos $1, \neg, 24$ se concluye que $[A^C \wedge B^C \wedge (A\wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A\wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$ es válida. De los pasos $3, \ldots, 12$ se concluye que $\neg(A\wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$ es inválida, y que es refutada por un modelo en el cual $A = 1$, $B = 1$, $\neg A = 0$, $\neg B = 0$ y $\neg(A \wedge B) = 1$. Observar que en análisis final los pasos 8 y 9 no no son opciones ya que se infieren en los pasos 18 y 19. Se observa de los pasos 6 y 7 que A y B son incompatibles con su negación, por lo que también es invalido $(A^I \wedge B^I) \rightarrow [\neg(A\wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$.

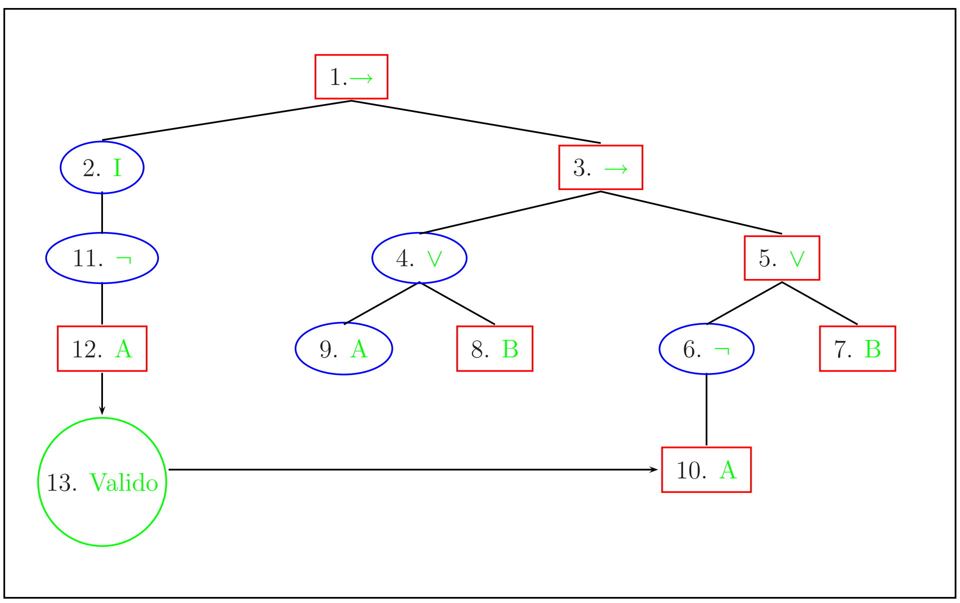


Figura 15: Silogismo Disyuntivo:$\models A' \rightarrow [(A\vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$

Justificaciones de la figura 15

1. FR.	2, 3.$F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6, 7. $F \rightarrow$ en 5.	8. IF en 7.	9. $FDA\vee$en 8 y 4.
10. IA en 9.	11. IA en 6.	12. $A\neg AI$ en 11 y 2.
13. DM en 12 y 10.		

Los pasos $1, \ldots, 13$ indican que es válido el enunciado $A^I \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$. Los pasos $3, \ldots, 10$ indican que el enunciado $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $B = 0$, $\neg A = 1$.

Observar que el anterior enunciado está representando el Silogismo Disyuntivo (de $A \vee B$ y $\neg A$ se sigue B), se tiene entonces que el Silogismo Disyuntivo es válido solo si el enunciado negado es incompatible con su negación.

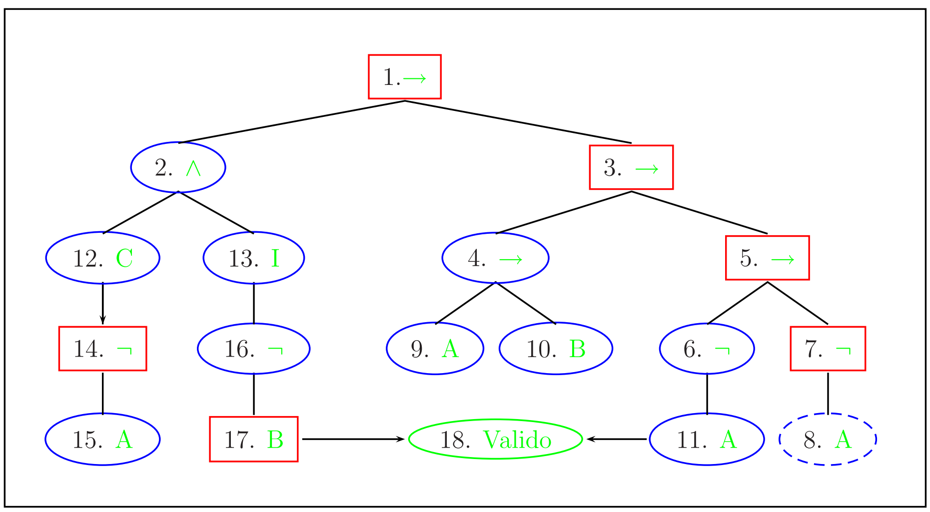


Figura 16: Contra reciproca Débil:$\models (A^C \wedge B') \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$

Justificaciones de la figura 16

1. FR.	2, 3.$F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6, 7. $F \rightarrow$ en 5.	8. Opción.	9. IA en 8.
10. $AIA \rightarrow$ en 9 y 4.	11. IA en 10.	12, 13.$A\wedge$ en 2.
14. IF en 7.	15. $F\neg AC$ en 14 y 12.	16. IA en 6.
17. $A\neg AI$ en 16 y 13.	18.DM en 17 y 11.	

Los pasos $1, \ldots, 18$ indican que es válido el enunciado $(A^C \wedge B^I) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)]$. Los pasos $3, \ldots, 11$ indican que el enunciado $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$, es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $B = 1$, $\neg B = 1$ y $\neg A = 0$. Observar que en análisis final el paso 8 no es una opción ya que se infiere en el paso 15.

Observar que el anterior enunciado está representando el Modus Tollens (de $A \rightarrow B$ y $\neg B$ se sigue $\neg A$), se tiene entonces que el Modus Tollens es válido solo si el antecedente es completo y el consecuente es incompatible con su negación.

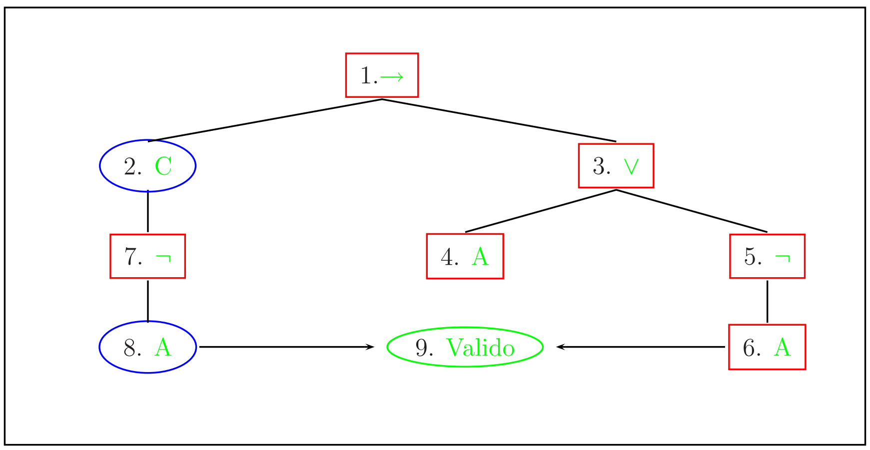


Figura 17: Tercero Excluido:$\models A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$

Justificaciones de la figura 17

1. FR.	2, 3. $F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F\vee$ en 3.
6. IF en 4.	7. IF en 5.	8. $F\neg AC$ en 7 y 2.
9. DM en 8 y 6.		

Los pasos $1, \ldots, 9$ indican que $A^C \rightarrow (A \vee \neg A)$ es válido. Los pasos $3, \ldots, 6$ indican que $A \vee \neg A$ es inválido y que es refutado por un modelo en el cual $A = 0$ y $\neg A = 0$. El principio del tercero excluido o principio de no indeterminación es válido solo cuando el enunciado es completo.

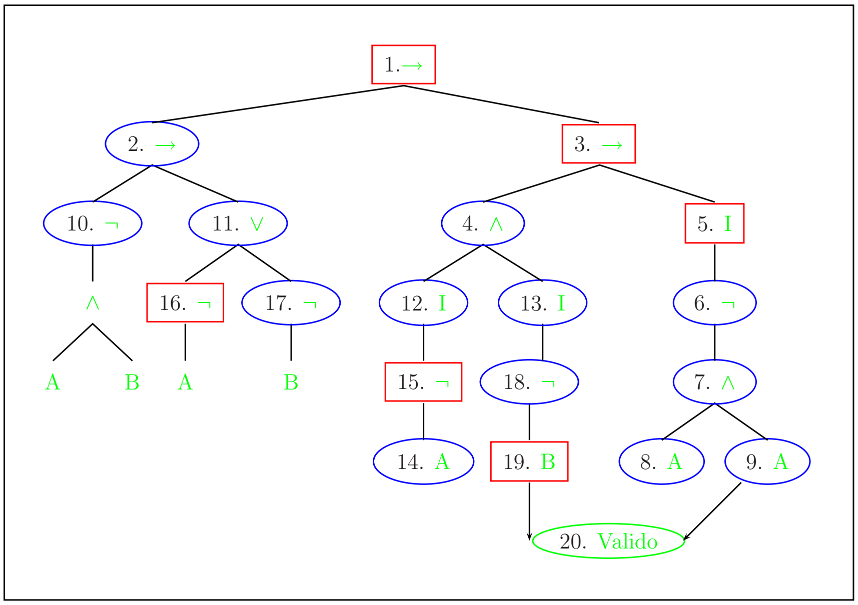


Figura 18: Preservación de la Incompatibilidad con la Conjunción:$\models [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)] \rightarrow [(B' \wedge A') \rightarrow (A \wedge B)']$

Justificaciones de la figura 18

1. FR.	2, 3. $F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6, 7. FI en 5.	8, 9. $A\wedge$ en 7.	10. IA en 6.
11. $AIA \rightarrow$ en 10 y 2.	12, 13. $A\wedge$ en 4.	14. IA en 8.
15. $AA\neg AI$ en 14 y 12.	16. IF en 15.	17. $FIA\vee$ en 16 y 11.
18. IA en 17.	19. $A\neg AI$ en 18 y 13.	20. DM en 19 y 9.

Los pasos $1, \ldots, 20$ indican que es válido el enunciado $[\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)] \rightarrow [(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I]$. El enunciado $(B^I \wedge A^I) \rightarrow (A \wedge B)^I$ es inválido y es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $\neg A = 0$, $B = 1$, $\neg B = 0$ y $\neg(A \wedge B) = 1$.

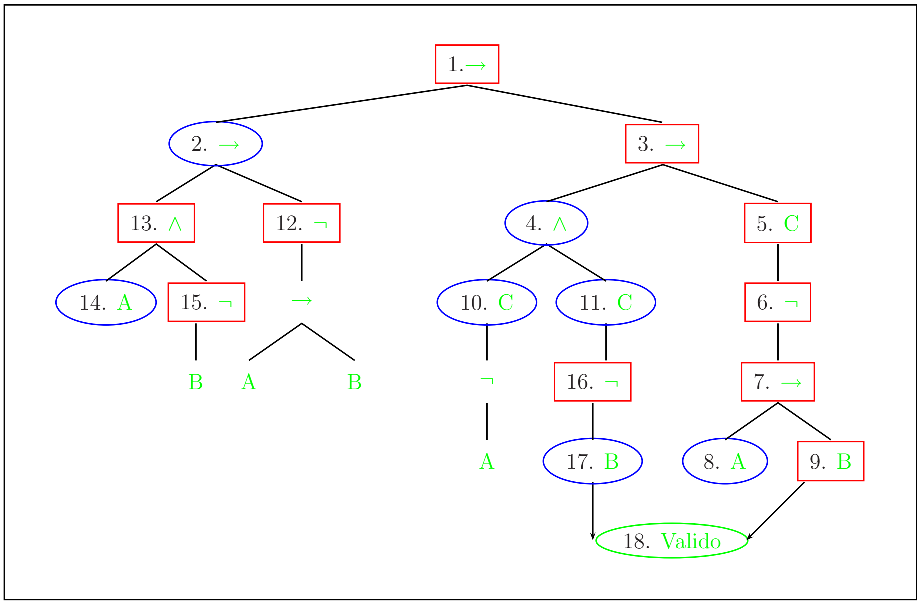


Figura 19: Preservación de la completez con el Condicional:$\models [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C]$

Justificaciones de la figura 19

1. FR.	2, 3. $F \rightarrow$ en 1.	4, 5. $F \rightarrow$ en 3.
6, 7. FC en 5.	8, 9. $F \rightarrow$en 7.	10, 11. $A\wedge$ en 4.
12. IF en 6.	13. $FDA \rightarrow$ en 12 y 2.	14. IA en 8.
15. $AIF\wedge$ en 14 y 13.	16. IF en 15.	17. $F\neg AC$ en 16 y 11.
18. DM en 17 y 9.		

Los pasos $1, \ldots, 18$ indican que es válido el enunciado $[(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C]$. El enunciado $(B^C \wedge A^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C$ es inválido y es refutado por un modelo en el cual $A = 1$, $B = 0$, $\neg B = 1$ y $\neg(A \rightarrow B) = 0$. También es válido $[(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [B^C \rightarrow (A \rightarrow B)^C]$.

4 Sistema deductivo para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta[7]

4.10 Axiomas para la lógica positiva clásica[8]

4.10.1 Axiomas para el condicional (→)

Axioma 1. Irrelevancia del antecedente: Si el consecuente de un condicional es aceptado entonces el condicional es aceptado.

$$A \to (B \to A)$$

Axioma 2. Distributividad de →: Si al aceptar dos enunciados se acepta un tercero y si del primero se sigue el segundo entonces al aceptar el primero se acepta el tercero.

$$[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$$

Axioma 3. Ley de Peirce: Si se acepta que de un condicional se siga su antecedente entonces se acepta el antecedente.

$$[(A \to B) \to A] \to A$$

3.1.2 Axiomas para la disyunción (∨)
Axioma 4. Introducción de la disyunción en el consecuente: Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de este con cualquier otro.

$$A \to (A \vee B)$$

Axioma 5. Introducción de la disyunción en el consecuente: Si un enunciado es aceptado entonces es aceptada la disyunción de cualquier otro con este.

$$A \to (B \vee A)$$

[7]Este sistema deductivo se presenta por primera vez en [Sierra02].

[8]El lenguaje consta de los conectivos binarios $\{\to, \vee, \wedge\}$; los conectivos unarios $\{\sim, \neg, I, C\}$; los símbolos de puntuación {), (}; el conjunto de Fórmulas (enunciados) es generado recursivamente con los conectivos a partir del conjunto de enunciados atómicos $\{p_1, p_2, \dots\}$. Se escribirá A^I en vez de $I(A)$, y A^C en vez de $C(A)$.

Axioma 6. Introducción de la disyunción en el antecedente: Un condicional con una disyunción de antecedente es aceptado cuando de cada uno de los disyuntos se sigue se sigue el consecuente.

$$(B \to A) \to [(C \to A) \to \{(B \vee C) \to A\}]$$

3.1.3 Axiomas para la conjunción ($\vee$)
Axioma 7. Eliminación de la conjunción: Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto izquierdo.

$$(A \wedge B) \to A$$

Axioma 8. Eliminación de la conjunción: Cuando se acepta una conjunción entonces también se acepta el coyunto derecho.

$$(A \wedge B) \to B$$

Axioma 9. Introducción de la conjunción en el consecuente: Se acepta que una conjunción se siga de un enunciado cuando de este se siguen cada uno de los coyuntos.

$$(A \to B) \to [(A \to C) \to \{A \to (B \vee C)\}]$$

3.2 Axiomas para la negación clásica ($\sim$):
Axioma 10. Principio de trivialización: Se acepta un enunciado arbitrario cuando algún enunciado rechazado es aceptado.

$$A \to (\sim A \to B)$$

Axioma 11. Principio de bivalencia: Un enunciado es aceptado o es rechazado[9].

$$A \vee \sim A$$

3.3 Axiomas para la negación básica paraconsistente y paracompleta (débil, $\neg$):

[9] Rechazar significa no aceptar.

Axioma 12. $AI\ A\neg$ (Afirmación de la Incompatibilidad Afirmación de la Negación): Si un enunciado es incompatible con su negación[10] y se cuestiona entonces el enunciado es rechazado.

$$A^I \rightarrow (\neg A \rightarrow \sim A)$$

Axioma 13. FI (Falsedad de la Incompatibilidad): Si un enunciado es compatible[11] con su negación entonces se acepta y se cuestiona.

$$\sim A^I \rightarrow (\neg A \wedge A)$$

Axioma 14. $ACFA\neg$ (Afirmación de la Completez[12] Falsedad del Alcance de la Negación): Si un enunciado es determinable y rechazado entonces es cuestionado.

$$A^C \rightarrow (\sim A \rightarrow \neg A)$$

Axioma 15. FC (Falsedad de la Completez): Si un enunciado es indeterminable[13] entonces ni él ni su negación son aceptados. AC (A A)

3.4 Regla de inferencia

Mp (Modus Ponens). Si un condicional y su antecedente son aceptados entonces es aceptado su consecuente:

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

3.5 Validez y Completitud

Un enunciado A (se define) es válido ($\models A$) si y solamente si no existe un árbol de forzamiento de A que este bien marcado.

Es inmediato verificar la validez de los axiomas del sistema deductivo presentado, además se tiene que la regla de inferencia preserva válidez, por lo que todos los teoremas[14] de la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta son válidos, se tiene así el teorema de validez.

[10]Exactamente sería: incompatible con su negación débil, pero se omite el débil ya que un enunciado siempre es incompatible con su negación fuerte. Intuitivamente un enunciado a es Incompatible con su negación si no ocurre que este sea aceptado y cuestionado.

[11]Compatible significa no incompatible.

[12]Intuitivamente un enunciado a es Completo o Determinable (respecto a la negación débil) si ocurre que este sea aceptado o cuestionado

[13]Indeterminable significa no completo, no determinable.

[14]Un enunciado es un teorema de un sistema deductivo dado si y solamente si puede obtenerse a partir de los axiomas del sistema utilizando las reglas de inferencia del sistema.

Traducuiendo "el enunciado A esta marcado con cuadro" como $\sim A$ y "el enunciado A esta marcado con círculo" como "A", se verifica que la traducción de las reglas de inferencia para el forzamiento semántico de marcas genera teoremas en la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica, y la regla falsedad de la raíz en combinación con la doble marca simplemente es el método de reducción al absurdo[15] , por lo que, también se tiene el reciproco del teorema de validez, es decir, el teorema de completitud: todo enunciado válido es teorema, por lo que, la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica esta caracterizada por los Arboles de forzamiento Semántico Paraconsistentes y Paracompletos:

$$\vdash A \Leftrightarrow \models A$$

Un enunciado es un teorema si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado está mal marcado, es decir, un enunciado no es un teorema si y solamente si el árbol de forzamiento semántico asociado al enunciado está bien marcado. Este resultado permite mostrar que la negación débil y la negación fuerte son diferentes, probando por ejemplo que no es un teorema $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, para lograrlo basta verificar que no es valido, lo cual se logra marcando A y $\neg A$ con círculo y B con cuadro.

3.6 Retículo de consecuencias para la Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta

En el diagrama 1 se resume, desde el punto de vista deductivo, la relación de implicación entre los operadores negación fuerte, negación débil, incompatibilidad y completez.

3.7.1 Principio de no contradicción: $\models \sim (A \wedge \sim A)$, no $\models \sim (A \wedge \neg A)$, no $\models \neg(A \wedge \neg A)$, $\models [(A \wedge \neg A)^C \wedge A^I] \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$, no $\models \neg(A \wedge \neg A) \rightarrow A\mathrm{I}$, no $\models A^I \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$, $\models A^I \leftrightarrow \sim (A \wedge \neg A)$.

3.7.2 Principio del tercero excluido: $\models A \vee \sim A$, no $\models A \vee \neg A$, $\models A^C \leftrightarrow (A \vee \neg A)$, no $\models A^I \rightarrow (A \vee \neg A)$, $\models \neg A^C \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim \neg A)$, no $\models (A \vee \neg A) \rightarrow A^I$, no $\models A^C \rightarrow A^I$, no $\models A^I \rightarrow A^C$, $\models A^I \vee A^C$.

3.7.3 Principio de trivialización: $\models A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$, no $\models A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, $\models A^I \rightarrow [A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$, no $\models A^C \rightarrow [A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$, $\models \sim A^C \rightarrow [A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$, $\models (\sim A^C \wedge \sim A^I) \rightarrow B$.

3.7.4 Principio de reducción al absurdo débil: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \sim$

[15]El método de reducción al absurdo dice: para probar que un enunciado es aceptado, se supone que es recha-zado y se busca una contradicción.

$B) \rightarrow\sim A]$, no $\models (A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$, $\models [A^C \wedge B^I] \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]\}$, $\models B^I \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]\}$.

3.7.5 Principio de reducción al absurdo fuerte: $\models (\sim A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim A \rightarrow\sim B) \rightarrow A]$, no $\models (\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]$, $\models [A^C \wedge BI] \rightarrow \{(\neg A \rightarrow B) \rightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$, $\models B^I \rightarrow \{(\sim A \rightarrow B) \rightarrow [(\sim A \rightarrow \neg B) \rightarrow A]\}$.

3.7.6 Negación de la conjunción: $\models \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A\vee \sim B)$, no $\models \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A\vee \sim B)$, $\models [A^C \wedge B^C \wedge (A \wedge B)^I] \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)]$, $\models (A \wedge B)^I \rightarrow [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A\vee \sim B)]$.

3.7.7 Disyunción de negaciones: $\models (\sim A\vee \sim B) \rightarrow\sim (A \wedge B)$, no $\models (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$, $\models [A^I \wedge B^I \wedge (A \wedge B)^C] \rightarrow [(\rightarrow A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)]$, $\models [A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow\sim (A \wedge B)]$.

3.7.8 Negación de la disyunción: $\models \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A\wedge \sim B)$, no $\models \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $\models [A^C \wedge B^C \wedge (A \vee B)^I] \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)]$, $\models (A \vee B)^I \rightarrow [\neg(A \vee B) \rightarrow (\sim A\wedge \sim B)]$.

3.7.9 Conjunción de negaciones: $\models (\sim A\wedge \sim B) \rightarrow\sim (A \vee B)$, no $\models (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$, $\models [A^I \wedge B^I \wedge (A \vee B)^C] \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$, $\models [A^I \wedge B^I] \rightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)]$.

3.7.10 Negación del condicional: $\models\sim (A \rightarrow B) \rightarrow (A\wedge \sim B)$, no $\models \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$, $\models [(A \rightarrow B)^I \wedge B^C] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)]$, $\models (A \rightarrow B)^I \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A\wedge \sim B)]$.

3.7.11 Afirmación del antecedente y negación del consecuente: $\models (A\wedge \sim B) \rightarrow\sim (A \rightarrow B)$, no $\models (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$, $\models [(A \rightarrow B)^C \wedge B^I] \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$, $\models B^I \rightarrow [(A \wedge \neg B) \rightarrow\sim (A \rightarrow B)]$.

3.7.12 Eliminación de la doble negación: $\models\sim\sim A \rightarrow A$, no $\models \neg\neg A \rightarrow A$, $\models [A^C \wedge (\neg A)^I] \rightarrow [\neg\neg A \rightarrow A]$, $\models A^C \rightarrow [\sim \neg A \rightarrow A]$.

3.7.13 Introducción de la doble negación: $\models A \rightarrow\sim\sim A$, no $\models A \rightarrow \neg\neg A$, $\models [A^I \wedge (\neg A)^C] \rightarrow [A \rightarrow \neg\neg A]$, $\models A^I \rightarrow [A \rightarrow\sim \neg A]$.

3.7.14 Contra reciproca débil: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow\sim A)$, no $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, $\models [A^C \wedge B^I] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$, $\models B^I \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$.

3.7.15 Contra reciproca fuerte: $\models (\sim B \rightarrow\sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)$, no $\models (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$, $\models [A^I \wedge B^C] \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$, $\models A^I \rightarrow [(\sim B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$, $\models B^C \rightarrow [(\neg B \rightarrow\sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)]$.

3.7.16 Implicación material: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \vee B)$, no $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$, $\models A^C \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)]$, no $\models AI \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)]$.

3.7.17 De disyunción a implicación: $\models (\sim A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$, no $\models (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$, $\models A^I \rightarrow [(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)]$, $\models A^I \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$, no $\models A^C \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)]$

3.7.18 Silogismo disyuntivo y Modus tollens: $\vdash (A \vee B)$ y $\vdash \sim A \Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A \vee B)$ y $\vdash \neg A$ no $\Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A \vee B)$ y $\vdash \neg A$ y $\vdash A^I \Rightarrow \vdash B$, $\vdash (A \rightarrow B)$ y $\vdash \sim B \Rightarrow \vdash \sim A$, $\vdash (A \rightarrow B)$ y $\vdash \neg B$ no $\Rightarrow \vdash \neg A$, $\vdash (A \rightarrow B)$ y $\vdash \neg B$ y $\vdash A^C$ y $\vdash B^I \Rightarrow \vdash \neg A$, $\vdash (A \rightarrow B)$ y $\vdash \neg B$ y $\vdash B^I \Rightarrow \vdash \sim A$.

3.7.19 Preservación de la incompatiblidad: no $\models (A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \wedge B)^I$, $\models [\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)] \rightarrow [(A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \wedge B)^I]$, no $\models (A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \vee B)^I$, $\models [\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)] \rightarrow [(A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \vee B)^I]$, no $\models (A^I \wedge B^I) \rightarrow (A \rightarrow B)^I$, $\models [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)] \rightarrow [B^I \rightarrow (A \rightarrow B)^I]$, no $\models A^I \rightarrow (\neg A)^I$, $\models (\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow [A^I \rightarrow (\neg A)^I]$, no $\models A^I \rightarrow (\sim A)^I$, $\models (\neg \sim A \rightarrow A) \rightarrow \{[A^I \rightarrow (\sim A)^I] \wedge (\sim A)^I\}$.

3.7.20 Preservación de la completez: no $\models (A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \wedge B)^C$, $\models [(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)] \rightarrow [(A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \wedge B)^C]$, no $\models (A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \vee B)^C$, $\models [(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)] \rightarrow [(A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \vee B)^C]$, no $\models (A^C \wedge B^C) \rightarrow (A \rightarrow B)^C$, $\models [(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [A^C \rightarrow (A \rightarrow B)^C]$, no $\models A^C \rightarrow (\neg A)^C$, $\models (A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow [A^C \rightarrow (\neg A)^C]$, no $\models A^C \rightarrow (\sim A)^C$, $\models (A \rightarrow \neg \sim A) \rightarrow \{[A^C \rightarrow (\sim A)^C] \wedge (\sim A)^C\}$.

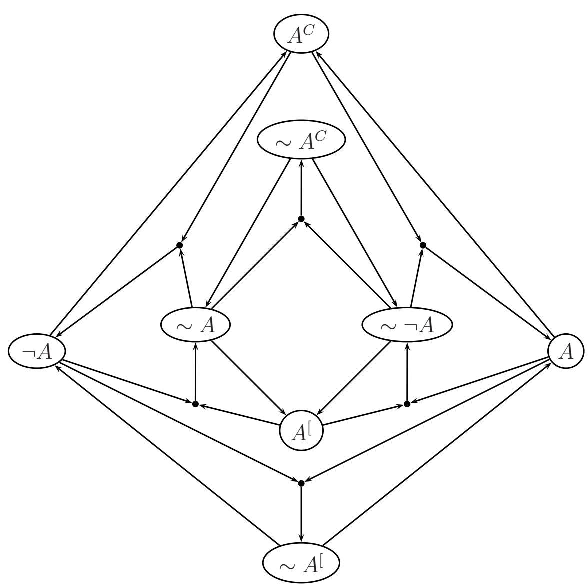


Diagrama 1.

Bibliogarafía

[Arruda 80] Arruda, Aida. A survey of paraconsistent logic. In: A. I. Arruda, R. Chuaqui, and N. C. A. da Costa, editors, *Mathematical Logic in Latin America:* Proce-edings of the IV Latin American Symposium on Mathematical Logic, Chile, 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980.

[Batens 00] Batens, Diderik. A survey of inconsistency-adaptive logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors, *Frontiers in Paraconsistent Logic:* Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[Bobenrieth 96] Bobenrieth Miserda. *Inconsistencias ¿Por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo, 1996.

[Bunder 84] Bunder, M. Some definitions of negation leading to paraconsistent logics. *Studia Logica*, 43(1/2), 1984.

[Carnielli 00] Carnielli, Walter. Possible-translations semantics for paraconsistent logics. In: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J.-P. van Bendegem, editors, *Frontiers in Paraconsistent Logic*: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[Carnielli Marcos Amo 00] Carnielli, W., Marcos, J. y de Amo, S. Formal inconsistency and evolutionary databases. To appear in : *Logic and Logical Philosophy*, (Proceedings of the Jaskowski's Memorial Symposium), 1999/2000.

[Da Costa 93] Da Costa, Newton. *Inconsistent Formal Systems*. Thesis, UFPR, Brazil, 1963. Curitiba: Editora UFPR, 1993.

[Priest 87] Priest, G. *In Contradiction. A Study of the Transconsistent.* Dordrecht : Nijhoff, 1987.

[Priest Routley 89] and J. Norman (editors). Priest, G. y Routley. *Paraconsistent Logic: essays on the inconsistent*. Munich: Philosophia Verlag, 1989.

[Sierra 01a] Sierra, Manuel. Árboles de Forzamiento Semántico. *Revista Universidad EA-FIT No 123*, Medellín, 2001.

[Sierra 01b] Sierra, Manuel. Lógica Básica Paraconsistente Clásica. *Memorias del VIII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas*, Pasto, 2001.

[Sierra 02] Sierra, Manuel. Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta con Negación Clásica. *Revista Universidad EAFIT No 126*. Medellín, 2002.