OBTENCIÓN DE FACTORES DE LA FORMA $(x^m - b)$, DE UN POLINOMIO DE GRADO $n \geq m$

Ricardo Alberto Idárraga Idárraga.
Universidad de Caldas

TEOREMA
Método para hallar factores de la forma $(x^m - b)$, con $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \leq n$, y $b \in \mathbb{C}$, de un polinomio de grado n, con $n \in \mathbb{N}$ y coeficientes complejos

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, con $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ complejos, $a_0 \neq 0$, y, $a_n \neq 0$; si $(x^m - b)$ es un factor de $P(x)$, y si $n = km + i$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq i < m$, entonces b lo podemos hallar como un cero de cada uno de las siguientes ecuaciones polinómicas en b:

$$P(b) = \sum_{p=0}^{k} a_{pm+j}\, b^p = 0, \quad j = 0,\ 1, \cdots,\ i; \quad \text{y,}$$
$$P(b) = \sum_{p=0}^{k-1} a_{pm+j}\, b^p = 0, \quad j = i+1,\ i+2, \cdots,\ m-1$$

Prueba

El residuo de dividir $p(x)$ entre $(x^m - b)$ es:

$$R(x) = \sum_{j=0}^{i} \left[\left(\sum_{p=0}^{k} a_{pm+j} \cdot b^p \right) x^j \right] + \sum_{j=i+1}^{m-1} \left[\left(\sum_{p=0}^{k-1} a_{pm+j} \cdot b^p \right) x^j \right]$$

nótese que es de grado $m - 1$, y el cociente es:

$$C(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{mk+i-j}\, x^{(k-1)m+i-j} +$$
$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{(k-1)m+i-j} + a_{km+i-j}\, b \right) x^{(k-2)m+i-j} +$$
$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{(k-2)m+i-j} + a_{(k-1)m+i-j}\, b + a_{km+i-j}\, b^2 \right) \cdot x^{(k-3)m+i-j}$$
$$+ \cdots + \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{2m+i-j} + a_{3m+i-j}\, b + \cdots + a_{km+i-j}\, b^{k-2} \right) x^{m+i-j}$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{m.+i-j} + a_{2m.+i-j}\, b + \cdots + a_{km.+i-j}\, b^{k-1} \right) x^{i-j}$$

Cuando $(x^m - b)$ es factor de $P(x)$, entonces $R(x) = 0$, luego, cada uno de los polinomios en b (coeficientes de los x^j en $R(x)$) es cero, por lo tanto, si existe algún número racional b' que es cero de cada uno de los polinomios en b, dicho número es tal que $(x^m - b')$ es factor de $P(x)$.

Completa la demostración el hecho de que con las expresiones anteriores se tiene que:

$(x^m - b)\, C(x) + R(x) = P(x)$

Falta probar que efectivamente

$[C(x)]\, (x^m - b) \ + R(x) = P(x)$ o que

$$C(x)\, x^m - b \cdot C(x) + R(x) = P(x)$$

$$C(x)\,x^m = \sum_{j=0}^{m-1} a_{mk+i-j}\; x^{km+i-j} +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{(k-1)m+i-j} + a_{km+i-j}\, b \right) x^{(k-1)m+i-j} +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{(k-2)m+i-j} + a_{(k-1)m+i-j}\, b + a_{km+i-j}\, b^2 \right)\; x^{(k-2)m+i-j}$$

$$+ \cdots +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{2m+i-j} + a_{3m+i-j}\, b + \cdots + a_{km+i-j}\, b^{k-2} \right)\; x^{2m+i-j} +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{m+i-j} + a_{2m+i-j}\, b + \cdots + a_{km+i-j}\, b^{k-1} \right)\; x^{m+i-j}$$

$$-\;b\;C(x) = -\sum_{j=0}^{m-1} a_{mk+i-j}\, b\; x^{(k-1)m+i-j}$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{(k-1)m+i-j}\, b + a_{km+i-j}\, b^2 \right) x^{(k-2)m+i-j}$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{(k-2)m+i-j}\, b + a_{(k-1)m+i-j}\, b^2 + a_{km+i-j}\, b^3 \right) \cdot$$

$$\cdot\, x^{(k-3)m+i-j} - \cdots$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{2m+i-j}\, b + a_{3m+i-j}\, b^2 + \cdots + a_{km+i-j}\, b^{k-1} \right)\; x^{m+i-j}$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{m.+i-j}\, b + a_{2m.+i-j}\, b^2 + \cdots + a_{km.+i-j}\, b^{k} \right)\; x^{i-j}$$

$$C(x)\,x^{m} - b\,C(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{km+i-j}\,x^{km+i-j} +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{(k-1)m+i-j}x^{(k-1)m+i-j} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{(k-2)m+i-j}\,x^{(k-2)m+i-j}$$

$$+ \cdots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{2m+i-j}\,x^{2m+i-j} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m+i-j}\,x^{m+i-j}$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{2m+i-j}\,b + a_{3m+i-j}\,b^{2} + \cdots + a_{km+i-j}\,b^{k-1} \right) x^{m+i-j}$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{m+i-j}\,b + a_{2m+i-j}\,b^{2} + \cdots + a_{km+i-j}\,b^{k} \right) x^{i-j}$$

$$R(x) = \sum_{j=0}^{i} \left(a_{j} + a_{m+j}\,b + \cdots + a_{km+j}\,b^{k} \right) x^{j}$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{m-1} \left(a_{j} + a_{m+j}\,b + \cdots + a_{(k-1)m+j}\,b^{k-1} \right) x^{j}$$

$$\begin{aligned}
R(x) &= \left(a_{0} + a_{m}\,b + \cdots + a_{km}\,b^{k}\right) \\
&+ \left(a_{1} + a_{m+1}\,b + \cdots + a_{km+1}\,b^{k}\right) x + \cdots \\
&\cdots + \left(a_{i} + a_{m+i}\,b + \cdots + a_{km+i}\,b^{k}\right) x^{i} \\
&+ \left(a_{i+1} + a_{m+i+1}\,b + \cdots + a_{(k-1)m+i+1}\,b^{k-1}\right) x^{i+1} + \cdots \\
&\cdots + \left(a_{m-2} + a_{2m-2}\,b + \cdots + a_{km-2}\,b^{k-1}\right) x^{m-2} \\
&+ \left(a_{m-1} + a_{2m-1}\,b + \cdots + a_{km-1}\,b^{k-1}\right) x^{m-1}
\end{aligned}$$

De donde:

$$
\begin{aligned}
&[C(x)]\,(x^m - b) \;= \\
&\sum_{j=0}^{m-1}\Big(a_{km+i-j}\, x^{km+i-j} + a_{(k-1)m+i-j} x^{(k-1)m+i-j} + \cdots \\
&\qquad \cdots + a_{2m+i-j}\, x^{2m+i-j} \Big) + \sum_{j=0}^{i} a_{m+i-j}\, x^{m+i-j} \\
&-\big(a_{m+i}\, b + a_{2m+i}\, b^2 + \cdots + a_{km+i}\, b^{k-1}\big)\, x^i \\
&-\big(a_{m+i-1}\, b + a_{2m+i-1}\, b^2 + \cdots + a_{km+i-1}\, b^k\big)\, x^{i-1} - \cdots \\
&\qquad \cdots - \big(a_{m+1}\, b + a_{2m+1}\, b^2 + \cdots + a_{km+1}\, b^k\big)\, x \\
&-\big(a_m\, b + a_{2m}\, b^2 + \cdots + a_{km}\, b^k\big) \\
&\\
&-\big(a_{2m-1}\, b + a_{3m-1}\, b^2 + \cdots + a_{km-1}\, b^{k-1}\big)\, x^{m-1} \\
&-\big(a_{2m-2}\, b + a_{3m-2}\, b^2 + \cdots + a_{km-2}\, b^{k-1}\big)\, x^{m-2} - \cdots \\
&-\big(a_{m+i+2}\, b + a_{2m+i+2}\, b^2 + \cdots + a_{(k-1)m+i+2}\, b^{k-1}\big)\, x^{i+2} \\
&-\big(a_{m+i+1}\, b + a_{2m+i+1}\, b^2 + \cdots + a_{(k-1)m+i+1}\, b^{k-1}\big)\, x^{i+1}
\end{aligned}
$$

Haciendo :

$$
\begin{aligned}
&R(x) + [C(x)]\,(x^m - b) \;= \\
&\sum_{j=0}^{m-1}\Big(a_{km+i-j}\, x^{km+i-j} + a_{(k-1)m+i-j} x^{(k-1)m+i-j} + \\
&\qquad \cdots + a_{2m+i-j}\, x^{2m+i-j} \Big) + \sum_{j=0}^{i} a_{m+i-j}\, x^{m+i-j} + \\
&a_0 + a_1\, x + \cdots + a_i\, x^i + a_{i+1}\, x^{i+1} + a_{i+2}\, x^{i+2} \\
&+ \cdots + a_{m-2}\, x^{m-2} + a_{m-1}\, x^{m-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= a_{km+i}\, x^{km+i} + a_{km+i-1}\, x^{km+i-1} + \cdots \\
&\quad \cdots + a_{(k-1)m+i-1} x^{(k-1)m+i-1} + a_{(k-1)m+i}\, x^{(k-1)m+i} + \cdots \\
&\quad \cdots + a_{(k-2)m+i+1}\, x^{(k-2)m+i+1} + \cdots + a_{2m+i}\, x^{2m+i} \\
&\quad + a_{2m+i-1}\, x^{2m+i-1} + \cdots + a_{m+i+1}\, x^{m+i+1} + a_{m+i}\, x^{m+i} \\
&\quad + a_{2m+i-1}\, x^{2m+i-1} + \cdots + a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} \\
&\quad + a_{m-2}\, x^{m-2} + \cdots + a_1\, x + a_0
\end{aligned}$$

Como $km + i = n$:

$$R(x) + [C(x)]\,(x^m - b) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = P(x)$$

COROLARIO I

Un polinomio como el descrito en el enunciado del teorema, admite posibles factores de la forma $(x^{m+t} - b)$, con:

1. $2 \leq m \leq \frac{(n+1)}{2}$, y $t = 0$, si n es impar y el polinomio es completo.

2. $1 \leq m \leq \frac{(n+1)}{2}$, y, $1 \leq t \leq \frac{(n-1)}{2}$, si n es impar y el polinomio es incompleto pero su incompletez consiste en:

   $a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t} = 0 = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t+1} = \cdots = a_{\frac{(n+1)}{2}} = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+1} = \cdots = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t-1}$, y,

   Si algún $a_i = 0$, con $1 \leq i \leq \{\frac{(n+1)}{2}\} - t - 1$, entonces también $a_{i+\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} = 0$ y viceversa.

3. $2 \leq m \leq \frac{n}{2}$, y, $t = 0$, si n es par y el polinomio es completo.

4. $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$, y, $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$, si el polinomio es incompleto pero su incompletez consiste en $a_{\frac{n}{2}-t+1} = 0 = a_{\frac{n}{2}-t+2} = \cdots = a_{\frac{n}{2}-1} = a_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}+1} = \cdots = a_{\frac{n}{2}+t-1}$, y, si algún $a_i = 0$, con $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - t$, entonces también $a_{i+\frac{n}{2}+t} = 0$, y viceversa.

Prueba

Si n es impar, el polinomio tiene máximo $n+1$ términos, supongamos que $x^{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} - b$, con $1 \leq t \leq \frac{(n-1)}{2}$, $t \in \mathbb{Z}$, es un posible factor de $P(x)$, las $\left\{\frac{(n+1)}{2}\right\} + t$ ecuaciones polinómicas en b que resultan de aplicar el teorema son.

$$
\begin{aligned}
&P_1(b) = a_0 + a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} b = 0\\
&P_2(b) = a_1 + a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t+1} b = 0\\
&\vdots\\
&P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t}(b) = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t-1} + a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t-1+\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} b =\\
&\qquad\qquad = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t-1} + a_n b = 0\\
&P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t+1}(b) = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t} = 0\\
&\vdots\\
&P_{\frac{(n+1)}{2}}(b) = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-1} = 0\\
&P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+1}(b) = a_{\frac{(n+1)}{2}} = 0\\
&P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+2}(b) = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+1} = 0\\
&\vdots\\
&P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t}(b) = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t-1} = 0
\end{aligned}
$$

Para que el sistema de ecuaciones pueda tener una solución común b, es necesario que todos los coeficientes que constituyen las ecuaciones monómicas sean ceros y que si algún coeficiente de las ecuaciones binómicas es cero, entonces el otro coeficiente de la misma ecuación también es cero obteniéndose así identidades de la forma $0 = 0$ que admiten las soluciones de las demás ecuaciones, con esto quedan probados los numerales 1) y 2) del enunciado del corolario.
Si n es par, el polinomio tiene como máximo $n+1$ términos, supongamos que

$x^{\left(\frac{n}{2}\right)+t} - b$, con $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$, $\;t \in \mathbb{Z}$, es un posible factor de $P(x)$, las $\left(\frac{n}{2}\right) + t$ ecuaciones que resultan de aplicar el teorema son:

$$
\begin{aligned}
&P_1(b) = a_0 + a_{\left(\frac{n}{2}\right)+t}\; b = 0\\
&P_2(b) = a_1 + a_{\left(\frac{n}{2}\right)+t-1}\; b = 0\\
&\vdots\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)-t+1}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)-t} + a_{\left(\frac{n}{2}\right)-t+\left(\frac{n}{2}\right)+t} b \;= a_{\left(\frac{n}{2}\right)-t} + a_n\; b = 0\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)-t+2}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)-t+1} = 0\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)-t+3}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)-t+2} = 0\\
&\vdots\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)-1} = 0\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)+1}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)} = 0\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)+2}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)+1} = 0\\
&\vdots\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)+t-1}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)+t-2} = 0\\
&P_{\left(\frac{n}{2}\right)+t}(b) = a_{\left(\frac{n}{2}\right)+t-1} = 0
\end{aligned}
$$

Las mismas consideraciones que se hicieron anteriormente prueban lo enunciado en los numerales 3) y 4) del corolario.

NOTA

A partir del criterio de las derivadas del polinomio $P(x)$, a saber: si $P(c) = 0$, $P'(c) = 0, P''(c) = 0$, $\cdots$, $P^{(r-1)}(c) = 0$ y $P^{(r)}(c) \neq 0$, entonces $P(x)$ admite el factor $(x-c)^r$, al hallar un factor de la forma $(x^m - b)$, hemos hallado m factores lineales de la forma $x - b_i$, con $1 \leq i \leq m$, los cuales son las m raíces m–ésimas de b, por lo tanto acá es válido el mismo y se aplicaría como se aplica el teorema, es decir, se plantean las m ecuaciones polinómicas en b y se encuentra el número b que las satisfaga, luego se deriva $P(x)$ y se plantean las m ecuaciones polinómicas en b para probar que b es raíz de todas, y se continúa aplicando este procedimiento hasta probar que b satisface las m ecuaciones polinómicas planteadas a partir de $P^{(r-1)}(x)$, pero no a las de $P^{(r)}(x)$, este procedimiento se vuelve algo engorroso y se puede cambiar por probar que b satisface las derivadas hasta de orden $r-1$ y no satisface la de orden r de las m ecuaciones polinómicas en b planteadas a partir de $P(x)$ sin necesidad de estar derivando sucesivamente $P(x)$ y posteriormente planteando las m ecuaciones en b y evaluando, este procedimiento se valida a partir del siguiente corolario.

COROLARIO II

1. Si $$P(b) = \sum_{p=0}^{k} a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, i \tag{1}$$

   y $$P'(b) = \sum_{p=0}^{k} (pm+j) a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, \ i-1 \tag{2}$$

   entonces $$P(b') = \sum_{P=1}^{k} p a_{pm+j} b^{p-1} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, i \tag{3}$$

Prueba

Derivando (1) con respecto a b se obtiene

$$P(b') = \sum_{p=1}^{k} p a_{pm+j} b^{p-1} = \sum_{p=0}^{k} p a_{pm+j} b^{p-1} = \left(\frac{1}{b}\right) \sum_{p=0}^{k} p a_{pm+j} b^p \tag{4}$$

De (2) se tiene

$$P'(b) = m \sum_{p=0}^{k} p a_{pm+j} b^p + j \sum_{p=0}^{k} a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, i-1 \tag{5}$$

De (1)

$$j \sum_{p=0}^{k} a_{pm+j} b^p = 0 \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (5) resulta

$$\sum_{p=0}^{k} pa_{pm+j}b^{p} = 0, \tag{7}$$

y sustituyendo (7) en (4) resulta

$$\sum_{p=1}^{k} pa_{pm+j}b^{p-1} = 0$$

2. Si $\quad P(b) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} a_{pm+j}b^{p} = 0, \quad j = i+1,\ i+2, \cdots,\ m-1 \qquad (8)$

y $\quad P'(b) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k-1} (pm+j)a_{pm+j}b^{p} = 0, \quad j = i,\ i+1,\ \cdots,\ m-2, \qquad (9)$

entonces

$$P(b') = \sum_{p=1}^{k-1} pa_{pm+j}b^{p-1} = 0 \tag{10}$$

La prueba de (10) a partir de (8) y (9), se efectúa en forma análoga a como se hizo para (3)

OBSERVACIÓN

Otro método para hallar las ecuaciones polinómicas en b consiste en aplicar la división sintética con una constante b por determinar, ordenando los coeficientes de $P(x)$ en forma descendiente y tomando cada segundo coeficiente si $m = 2$, cada tercer coeficiente si $m = 3$, etc., las ecuaciones polinómicas buscadas serán los residuos o últimas expresiones igualadas a cero, como se muestra a continuación para la siguiente ecuación:
$P(x) = x^9 - x^8 + 2x^7 - 5x^6 - x^5 - 8x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 6x - 12 = 0$
Buscamos factores de la forma $(x^4 - b)$, aplicamos la división sintética cada cuarto coeficiente

1	-1	2	-5	-1	-8	4	-10	-6	-12	b
				b				b^2-b		
1				$b-1$				b^2-b-6		
					-b				$-b^2-8b$	
	-1				$-b-8$				$-b^2-8b-12$	
						2b				
		2				$2b+4$				
							-5b			
			-5				$-5b-10$			

Las ecuaciones polinómicas en b buscadas son respectivamente
$b^2 - b - 6 = 0$
$-b^2 - 8b - 12 = 0$
$2b + 4 = 0$
$-5b - 10 = 0$
Obsérvese que son las ecuaciones obtenidas al aplicar el teorema.

CONCLUSIONES

El grado de dificultad para hallar factores de la forma $(x^m - b)$ disminuye a medida que aumenta m puesto que las ecuaciones en b resultantes para resolver tienen cada vez menos términos.

El teorema se puede considerar como una extensión a grado m del ya existente que permite hallar los factores de la forma $(x - b)$ con b racional, además aplica éste en la solución de los polinomios en b.