

UNA PARAMETRIZACIÓN UNIFICADA Y GEOMETRÍA DE LAS CURVAS POLIGONALES EN \mathbb{R}^{n*}

Luis Enrique Ruiz Hernández
Departamento de Matemática

*Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Duitama–Boyacá*

Resumen.

Se acuña el concepto de función polisegmento, una curva continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para la cual existe un intervalo acotado I tal que $f|I$ es una poligonal. Además de caracterizarla, se obtiene una parametrización unificada de f , y consecuentemente de las poligonales en \mathbb{R}^n , como del n -gono regular. También a partir de las partes lineales de f se halla una representación unificada de f . Dada una curva φ de clase C^1 se construyen explícitamente dos sucesiones de poligonales que convergen uniformemente a φ , una de esas sucesiones son poligonales no inscritas en φ cuya longitud converge a la de φ , además de otras propiedades.

Introducción.

Se introduce la noción de función polisegmento, un campo vectorial continuo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de características propias sorprendentes y de una gran potencialidad geométrica. Para f existe un intervalo $I = [a, b]$ acotado tal que, al ser tratada f como una curva (y por lo tanto $f(\mathbb{R})$ como su traza, [4] pp. 26–27), entonces la traza de la restricción $f|I$ es una curva poligonal, y las trazas de $f|(-\infty, a]$ y $f|[b, +\infty)$ semirectas, posiblemente degeneradas (Definición 1.1, observación 1.2).

Las perspectivas de f indujeron prioritariamente al autor a buscar una representación unificada de ella, y por lo tanto ligar entre sí cada una de sus partes lineales. Habiendo logrado este importante objetivo (Teorema 1.3 y Corolario 1.4), sus implicaciones en la Teoría de Curvas son desarrolladas a lo largo de la presente investigación.

* Investigación financiada por el Instituto de Investigación y Formación Avanzada (Proyecto 9009.016) de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.

Por ende, al lograr una representación unificada de las curvas poligonales en \mathbb{R}^m se obtiene lo propio para el n -gono regular (Corolarios 2.1 y 2.2).

Una curva rectificable está asociada a sus poligonales inscritas determinadas por cada partición del intervalo paramétrico ([1] pp. 175 – 176; [5] pp. 92 – 95; [4] pp. 29 – 30), siendo esta la clásica relación tratada en la geometría de curvas. Sin embargo aquí se experimenta la misma geometría pero en un sentido cualitativo, que entraña la convergencia uniforme.

En primera instancia, para un curva φ de clase C^1 se construye explícitamente una sucesión $\{\varphi_n\}$ de curvas poligonales inscritas en φ tales que φ_n está determinada por una partición de $n + 1$ puntos igualmente espaciados, y $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sobre el intervalo paramétrico (Corolario 3.1).

El segundo caso constituye un paradigma de convergencia uniforme a una curva de clase C^1 por poligonales no inscritas. En efecto, para φ se construye igualmente una sucesión $\{\Phi_n\}$ de curvas poligonales, no necesariamente inscritas en φ , tales que también Φ_n está determinada por una partición de $n + 1$ puntos igualmente espaciados y $\Phi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sobre el intervalo paramétrico. Además se da la propiedad adicional $l(\Phi_n) \rightarrow l(\varphi)$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $l(\Phi_n)$ y $l(\varphi)$ son las longitudes de Φ_n y φ , respectivamente (Corolario 4.1).

Adoptamos aquí la convención de que

$$\sum_{i=s}^t \binom{t}{i} = 0 \quad \text{si} \quad s > t$$

Además de la 1.1, el 1.3 y todos los cinco corolarios consignados en la presente investigación constituyen aportes originales, concebidos y demostrados por el autor.

1 Función polisegmento.

Definición 1.1. Una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, para la cual existen números reales $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ que definen una partición $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ del intervalo $[a_1, a_n]$, e intervalos cerrados

$$\begin{aligned} A_0 &= (-\infty, a_1], \\ A_k &= (a_k, a_{k+1}], \quad k = 1, \dots, n-1, \\ A_n &= [a_n, +\infty), \end{aligned}$$

tales que, si $\alpha_k = f|A_k$, entonces

$$\alpha_k(x) = x M_k + L_k, \quad x \in A_k, \quad (1.1.)$$

donde M_k y L_k son vectores constantes en \mathbb{R}^m , $k = 0, 1, \dots, n$, es llamada una función polisegmento respecto a la partición P .

Observación 1.2. Si $m = 1$ entonces f es la familiar función poligonal. A continuación, para $m \geq 2$, consideramos a f como una curva en \mathbb{R}^m para la cual $f(\mathbb{R})$ será entonces su traza ([4] pp. 26 - 27). Desde este punto de vista $f(\mathbb{R})$ es un lugar geométrico conformado por partes lineales. En efecto, puesto que

$$\alpha_k(t a_k + (1 - t)a_{k+1}) = t\alpha_k(a_k) + (1 - t)\alpha_k(a_{k+1}),$$

para todo $t \in [0, 1]$, entonces la curva descrita paramétricamente por α_k es un segmento cerrado de recta en \mathbb{R}^m (posiblemente degenerado) de extremos

$$\alpha_k(a_i), \quad i = k, k + 1,$$

para todo $k = 1, \dots, n - 1$.

Para $k = 0$ o $k = n$ la curva descrita por α_k es una semirecta o rayo (si $M_k \neq 0$) de punto inicial

$$\alpha_k(a_i), \quad i = 1, n,$$

respectivamente. De este modo, la restricción $f|[a_1, a_n]$ describe paramétricamente la curva poligonal en \mathbb{R}^m

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \overline{f(a_k)f(a_{k+1})}$$

([1], pp. 170, 181).

Las anteriores propiedades geométricas justifican así, para f , la expresión “función polisegmento”.

Además, si $f = (f_1, \dots, f_m)$ y $\alpha_{ki} = f_i|A_k$ entonces

$$\alpha_k = (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Razón por la cual, f es una función polisegmento respecto a la partición P si y solo si cada componente $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función poligonal respecto a P .

Teorema 1.3. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es polisegmento respecto a una partición $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ del intervalo $[a_1, a_n]$, si y solo si existen vectores C, D y B_1, \dots, B_n en \mathbb{R}^m , tales que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k| B_k + x C + D, \quad (1.2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea f descrita como en la definición 1.1. Entonces por la continuidad de f se obtiene de (1.1.)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a_k^-} f(x) &= \alpha_{k-1}(a_k) = a_k M_{k-1} + L_{k-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow a_k^+} f(x) = \alpha_k(a_k) = a_k M_k + L_k, \end{aligned}$$

de donde

$$a_k(M_{k-1} - M_k) = L_k - L_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Hagamos

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{2}(M_k - M_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n, \\ C &= \frac{1}{2}(M_0 + M_n) \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{2}(L_0 + L_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dado $x \in \mathbb{R} = \bigcup_{k=0}^n A_k$ existe p , $0 \leq p \leq n$, tal que $x \in A_p$. De manera que

tomando en cuenta (1.3.) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n |x - a_k| B_k + x C + D \\
 = & \sum_{k=1}^p |x - a_k| B_k + \sum_{k=p+1}^n |x - a_k| B_k + x C + D \\
 = & \sum_{k=1}^p (x - a_k) B_k + \sum_{k=p+1}^n (a_k - x) B_k + x C + D \\
 = & x \left(\sum_{k=1}^p B_k - \sum_{k=p+1}^n B_k + C \right) - \sum_{k=1}^p a_k B_k + \sum_{k=p+1}^n a_k B_k + D \quad (1.5.) \\
 = & x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (M_k - M_{k-1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^n (M_k - M_{k-1}) + \frac{1}{2} (M_0 + M_n) \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p a_k (M_k - M_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^n a_k (M_k - M_{k-1}) + \frac{1}{2} (L_0 + L_n) \\
 = & \frac{1}{2} \left\{ x \left[(M_p - M_0) - (M_n - M_p) + (M_0 - M_n) \right] + \sum_{k=1}^p (L_k - L_{k-1}) \right. \\
 & \left. - \sum_{k=p+1}^n (L_k - L_{k-1}) + L_0 + L_n \right\} \\
 = & \frac{1}{2} \left\{ 2x M_p + (L_p - L_0) - (L_n - L_p) + L_0 + L_n \right\} \\
 = & \frac{1}{2} (2x M_p + 2L_p) = x M_p + L_p = \alpha_p(x) = f(x)
 \end{aligned}$$

Recíprocamente, suponiendo la forma (1.2.) para $f(x)$ entonces f es continua en \mathbb{R} , y el mismo desarrollo en (1.5.) muestra que f satisface (1.1.) donde M_p es el coeficiente de x y L_p el término independiente en (1.5.). De acuerdo a la definición 1.1 concluimos que f es una función polisegmento respecto a la partición P . □

Usando explícitamente las partes lineales de f obtenemos, a la luz de (1.4.), el siguiente

Corolario 1.4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la función polisegmento respecto a la partición $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, descrita en la definición 1.1, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |x - a_k| (M_k - M_{k-1}) + \frac{x}{2} (M_0 + M_n) + \frac{1}{2} (L_0 + L_n), \quad (1.6.)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

2 Una representación unificada de las curvas poligonales en \mathbb{R}^m . El n -gono regular.

A continuación damos, por su importancia, una representación unificada de las curvas poligonales en \mathbb{R}^m .

Corolario 2.1. Toda curva poligonal $V_1 \cdots V_n$ dada en \mathbb{R}^m ($n \geq 2$, $m \geq 2$) está descrita paramétricamente por la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como

$$f(t) = \frac{n-1}{2} \left\{ t(V_2 - V_1) + (1-t)(V_{n-1} - V_n) + \sum_{k=1}^{n-2} \left| t - \frac{k}{n-1} \right| (V_{k+2} - 2V_{k+1} + V_k) \right\} + \frac{1}{2} (V_1 + V_n), \quad (2.7.)$$

para todo $t \in [0, 1]$, donde

$$f\left(\frac{k-1}{n-1}\right) = V_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.8.)$$

(ver figura 2.1.a)

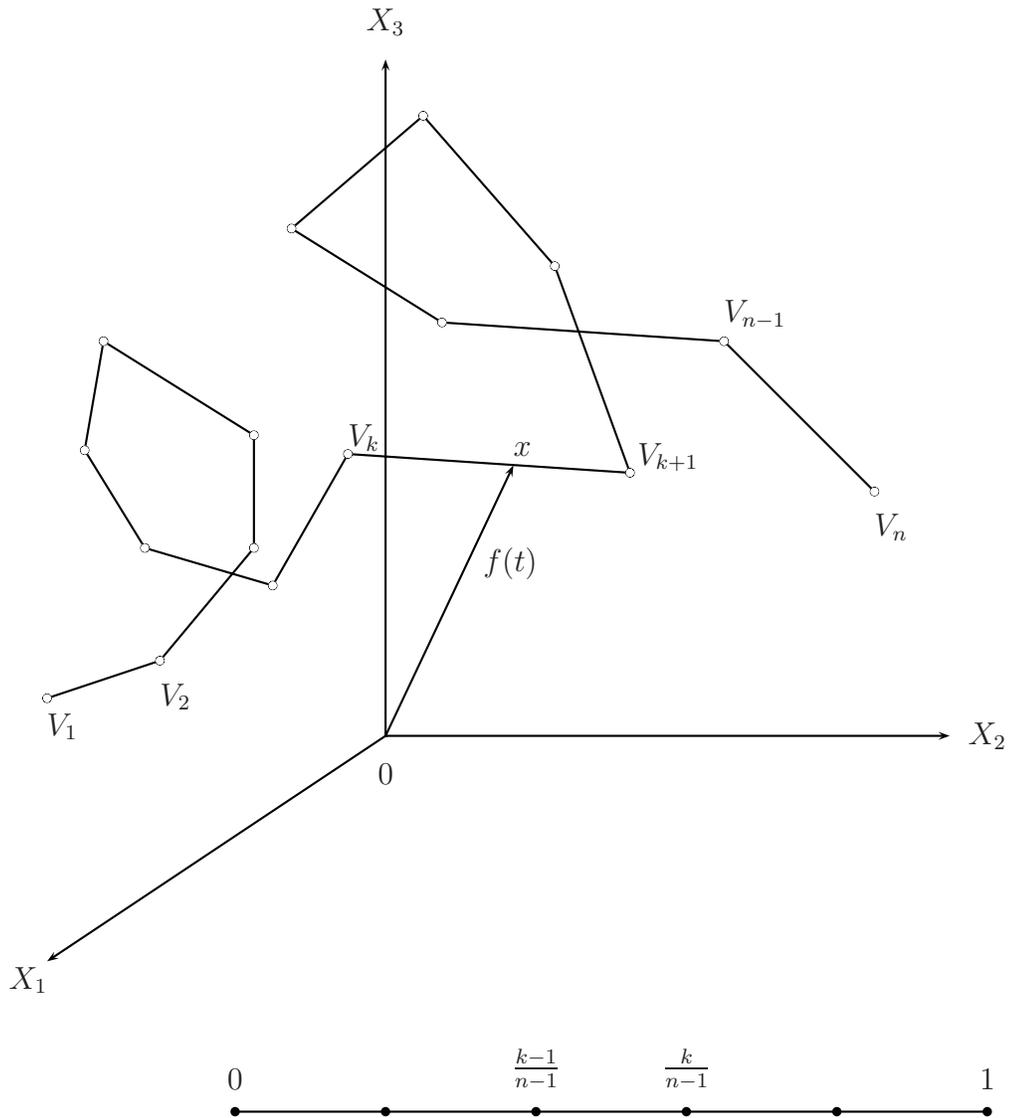


Figura 2.1.a. La Curva poligonal $V_1 \cdots V_n$ descrita paramétricamente por la función polisegmento f .

Demostración. Hagamos

$$\begin{aligned} M_0 = M_n = 0, \quad L_0 = V_1, \quad L_n = V_n, \\ M_k = (n-1)(V_{k+1} - V_k), \quad y \\ L_k = kV_k - (k-1)V_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.9.)$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la función representada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left| x - \frac{k-1}{n-1} \right| (M_k - M_{k+1}) + \frac{1}{2}(V_1 + V_n) \\ &= \frac{n-1}{2} \left\{ |x|(V_2 - V_1) + |1-x|(V_{n-1} - V_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-2} \left| x - \frac{k}{n-1} \right| (V_{k+2} - 2V_{k+1} + V_k) \right\} + \frac{1}{2}(V_1 + V_n), \end{aligned} \quad (2.10.)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, se infiere del Teorema 1.3 que f es una función polisegmento respecto a la partición $P = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ del intervalo unitario $[0, 1]$, donde

$$a_k = \frac{k-1}{n-1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Además, si consideramos para P los correspondientes intervalos A_0, A_1, \dots, A_n introducidos en la definición 1.1, entonces puede verificarse, en este caso, que las restricciones $\alpha_k = f|_{A_k}$ definidas en (1.1.) ocurren con M_k y L_k como en (2.9.), con la propiedad de que

$$\alpha_k = V_i, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad i = k, k+1, \quad (2.11.)$$

esto es, α_k describe el segmento cerrado de recta $V_k V_{k+1}$ de la curva poligonal $V_1 \cdots V_n$.

Concluimos de (2.10.) y (2.11.) que $f|_{[0, 1]}$ tiene la representación dada en (2.7.), la cual describe paramétricamente la curva poligonal $V_1 \cdots V_n$. \square

La teoría que hemos venido desarrollando nos ha ubicado a un paso de una representación paramétrica del n -gono regular, una bella y sorprendente expresión.

Corolario 2.2. *Todo polígono regular $V_1 \cdots V_n$ en \mathbb{R}^2 de centro G está descrito paramétricamente (como curva cerrada) por la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ representada por:*

$$f(t) = \frac{n}{2} \left\{ t(V_2 - V_1) + (1-t)(V_n - V_1) - 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \left| t - \frac{k}{n} \right| (V_{k+1} - G) \right\} + V_1, \quad (2.12.)$$

para todo $t \in [0, 1]$, donde

$$f(0) = f(1) = V_1 \quad y \quad f \left(\frac{k-1}{n} \right) = V_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.13.)$$

Demostración. Siendo de hecho el n -gono regular no degenerado, los vectores $V_k - G$ y $V_{k+1} - G$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^2 . Por tanto, existen escalares s y t tales que:

$$V_{k+2} - G = s(V_k - G) + t(V_{k+1} - G) \quad (2.14.)$$

Advirtiendo que

$$\angle V_i G V_j = \frac{2\pi}{n} |i - j|, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

multiplicando interiormente ambos miembros de (2.14.), sucesivamente por $V_k - G$ y $V_{k+1} - G$, obtenemos (después de reducir) el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} s + t \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \\ s \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + t &= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Resolviendo hallamos $s = -1$ y $t = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, reduciéndose (2.14.) a

$$V_{k+2} - G = -(V_k - G) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) (V_{k+1} - G),$$

expresión equivalente a

$$\begin{aligned} V_{k+2} - 2V_{k+1} + V_k &= -4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right) (V_{k+1} - G), \\ k &= 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{2.15.}$$

Ahora, siendo nuestro n -gono regular la curva poligonal cerrada $V_1 \cdots V_n V_1$, en tal caso, de acuerdo al corolario 2.1 (tomando $n+1$ en vez de n y $V_{n+1} = V_1$) y a la expresión (2.15.) (en general válida para tres vértices consecutivos), se recibe de (2.7.) y (2.8.) las expresiones en (2.12.) y (2.13.)

□

3 Convergencia uniforme a una curva en \mathbb{R}^m de clase C^1 por poligonales inscritas.

En el corolario 3.1, dada una curva φ de clase C^1 se **construye explícitamente** una sucesión $\{\varphi_n\}$ de curvas poligonales inscritas en φ con las siguientes dos propiedades

1. Cada φ_n está determinada por una partición de $n+1$ puntos igualmente espaciados.
2. $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sobre el intervalo paramétrico.

Corolario 3.1. *Sea $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva de clase C^1 dada. Para cada entero $n \geq 1$ consideremos la curva poligonal $V_1 \cdots V_{n+1}$ descrita paramétri-camente por la función $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, representada por*

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) = & \frac{n}{2} \left\{ t \left(\varphi \left(\frac{1}{n} \right) - \varphi(0) \right) + (1-t) \left(\varphi \left(\frac{n-1}{n} \right) - \varphi(1) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \left| t - \frac{k}{n} \right| \left(\varphi \left(\frac{k+1}{n} \right) - 2\varphi \left(\frac{k}{n} \right) + \varphi \left(\frac{k-1}{n} \right) \right) \right\} \\ & + \frac{1}{2} (\varphi(0) + \varphi(1)), \end{aligned} \quad (3.16.)$$

para todo $t \in [0, 1]$, y vértices

$$V_k = \varphi_n \left(\frac{k-1}{n} \right) = \varphi \left(\frac{k-1}{n} \right), \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (3.17.)$$

Entonces

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{uniformemente sobre } [0, 1]$$

(Ver figura 3.1.a).

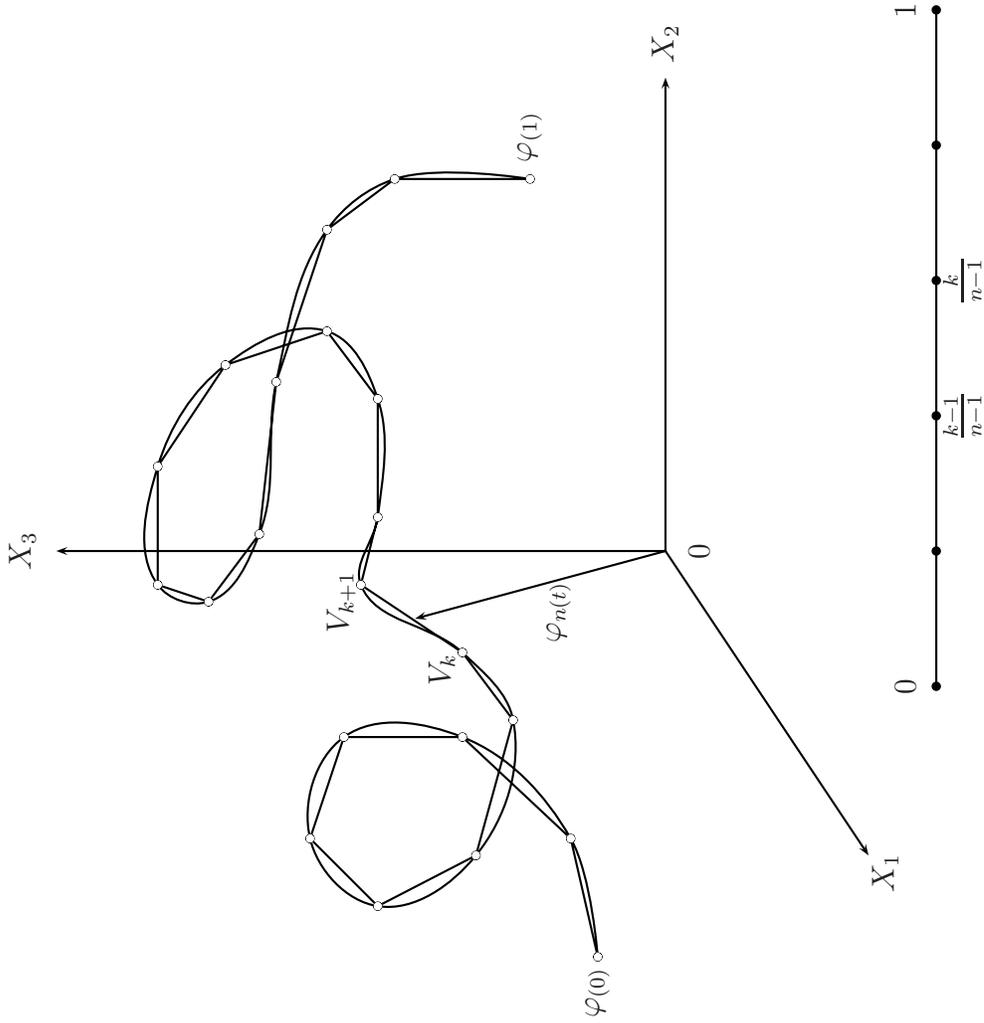


Figura 3.1.a. La Curva poligonal φ_n como una aproximación uniforme a la curva φ de clase C^1

Demostración. La representación de la curva poligonal φ_n en (3.16.) proviene directamente de (2.7.) tomando $n + 1$ en vez de n , y haciendo la sustitución en (3.17.) . Por lo cual, de acuerdo a (2.8.),

$$\varphi_n \left(\frac{k-1}{n} \right) = V_k, \quad k = 1, \dots, n+1$$

Dado que

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^n \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right],$$

si t_0 es un punto arbitrario pero fijo en $[0, 1]$, entonces existe k , $1 \leq k \leq n$, tal que

$$\frac{k-1}{n} \leq t_0 \leq \frac{k}{n} \tag{3.18.}$$

Ahora, de acuerdo a la demostración del corolario 2.1, φ_n se ha construido de manera tal que, respecto a la partición

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}, \dots, 1 \right\}, \tag{3.19.}$$

las restricciones $\varphi_n|_{A_i}$ definidas en (1.1.) ocurren con M_i y L_i como en (2.9.), donde

$$A_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto, en particular

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= (\varphi_n|_{A_k})(t) = nt \left\{ \varphi \left(\frac{k}{n} \right) - \varphi \left(\frac{k-1}{n} \right) \right\} \\ &\quad + k\varphi \left(\frac{k-1}{n} \right) - (k-1)\varphi \left(\frac{k}{n} \right), \end{aligned}$$

o bien

$$\varphi_n(t) = -(k-nt) \left\{ \varphi \left(\frac{k}{n} \right) - \varphi \left(\frac{k-1}{n} \right) \right\} + \varphi \left(\frac{k}{n} \right), \tag{3.20.}$$

para todo $t \in A_k$.

Si φ es constante el corolario es una trivialidad. Así asumiremos a continuación que φ no es constante.

Si $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$ entonces $\varphi' = (f'_1, \dots, f'_m)$ existe y es continua en $[0, 1]$ dado que φ es una curva de clase C^1 , por lo cual hacemos

$$\mu_i = \max_{0 \leq t \leq 1} |f'_i(t)|, \quad i = 1, \dots, m.$$

Entonces $\mu_j > 0$ para algún $j \in \{1, \dots, m\}$ por ser φ no constante, y consecuentemente

$$\mu_1 + \dots + \mu_m > 0$$

Teniendo en mente (3.20.) y el teorema del valor medio para derivadas, dado $\varepsilon > 0$ si

$$n > [2(\mu_1 + \dots + \mu_m)\varepsilon^{-1}] + 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} & \|\varphi_n(t_0) - \varphi(t_0)\| \\ &= \left\| -\frac{k - nt_0}{n} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}} + \frac{k - nt_0}{n} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi(t_0)}{\frac{k}{n} - t_0} \right\| \\ &= \left(\frac{k}{n} - t_0\right) \left\| -\frac{\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}} + \frac{\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi(t_0)}{\frac{k}{n} - t_0} \right\| \quad (\text{por (3.18.)}) \\ &= \left(\frac{k}{n} - t_0\right) \left\| -(f'_1(t_{*1}), \dots, f'_m(t_{*m})) + (f'_1(t_1^*), \dots, f'_m(t_m^*)) \right\| \\ &\leq \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \left\| -(f'_1(t_{*1}), \dots, f'_m(t_{*m})) + (f'_1(t_1^*), \dots, f'_m(t_m^*)) \right\| \\ & \hspace{15em} (\text{por (3.18.)}) \\ &\leq \frac{1}{n} \left\{ |f'_1(t_{*1})| + \dots + |f'_m(t_{*m})| + |f'_1(t_1^*)| + \dots + |f'_m(t_m^*)| \right\} \\ &\leq \frac{2}{n}(\mu_1 + \dots + \mu_m) < \frac{2(\mu_1 + \dots + \mu_m)}{[2(\mu_1 + \dots + \mu_m)\varepsilon^{-1}] + 1} < \frac{2(\mu_1 + \dots + \mu_m)}{2(\mu_1 + \dots + \mu_m)\varepsilon^{-1}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde $t_{*i} \in \text{int}(A_k)$ y $t_i^* \in (t_0, \frac{k}{n})$, $i = 1, \dots, m$, siempre que $t_0 < \frac{k}{n}$.

Si $t_0 = \frac{k}{n}$ entonces

$$\varphi_n(t_0) - \varphi(t_0) = V_{k+1} - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = 0,$$

según (3.17.), y la convergencia uniforme en dicho punto es obvia.

□

4 Un paradigma de convergencia uniforme a una curva en \mathbb{R}^m de clase C^1 por poligonales no inscritas.

La representación unificada de las curvas poligonales nos permite construir categóricamente, para una curva φ de clase C^1 , una sucesión $\{\Phi_n\}$ de curvas poligonales con las siguientes cuatro propiedades

1. Cada Φ_n está determinada por una partición de $n+1$ puntos igualmente espaciados.
2. Φ_n no necesariamente está inscrita en φ .
3. $\Phi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sobre el intervalo paramétrico.
4. $l(\Phi_n) \rightarrow l(\varphi)$ cuando $n \rightarrow \infty$

donde $l(\Phi_n)$ y $l(\varphi)$ son las longitudes de Φ_n y φ , respectivamente.

Corolario 4.1. *Sea $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva de clase C^1 dada. Para cada entero $n \geq 1$ consideremos la función $\Phi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, representada por:*

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) = & \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left| t - \frac{k}{n} \right| \left\{ \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2\varphi\left(\frac{k}{n}\right) + \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \\ & + (\varphi'(0^+) + \varphi'(1^-)) + \frac{1}{2}(\varphi(0) + \varphi(1) - \varphi'(1^-)), \end{aligned} \quad (4.21.)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Entonces

(i.) Respecto a la partición P_n definida en (3.19.),

$$\begin{aligned}
 (\Phi_n|A_k)(t) = & \frac{nt}{2} \left\{ 2\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - 2\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \right. \\
 & \left. + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) + \varphi(0) - \varphi(1) \right\} + \frac{t}{2} \left(\varphi'(0^+) + \varphi'(1^-) \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ 2k\varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2k\varphi\left(\frac{k}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - n\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) \right. \\
 & \left. + n\varphi(1) - \varphi'(1^-) \right\}, \tag{4.22.}
 \end{aligned}$$

para todo t en el intervalo cerrado.

$$A_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad k = 1, \dots, n.$$

(ii.) Φ_n describe paraméricamente la curva poligonal $V_1 \cdots V_{n+1}$ de vértices

$$\begin{aligned}
 V_k = \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) = & \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) + \frac{1}{2} \left\{ - (k-1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \right. \\
 & \left. (n-k+1)\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) + (k-1)\varphi(0) + (n-k+1)\varphi(1) - \varphi'(1^-) \right\} \\
 & + \frac{k-1}{2n} \left\{ \varphi'(0^+) + \varphi'(1^-) \right\}, \tag{4.23.}
 \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, n+1,$$

tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ V_k - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} = 0, \quad k = 1, \dots, n+1. \tag{4.24.}$$

En particular

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} V_1 = \varphi(0), \\
 \text{y} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n+1} = \varphi(1) \tag{4.25.}
 \end{aligned}$$

los puntos extremos de la curva φ .

(iii.) La curva poligonal $V_1 \cdots V_{n+1}$, descrita paramétricamente por Φ_n , no necesariamente está inscrita en la traza de φ , y son tales que

$$\Phi_n \rightarrow \varphi_n \quad \text{uniformemente sobre } [0, 1]$$

(iv.) $l(\Phi_n) \rightarrow l(\varphi)$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $l(\Phi_n)$ y $l(\varphi)$ son longitudes de Φ_n y φ , respectivamente.

(v.)

$$\int_0^1 |t-x|\varphi(x)dx = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left| t - \frac{k}{n} \right| \left\{ \varphi \left(\frac{k+1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{k-1}{n} \right) \right\}, \quad (4.26.)$$

uniformemente sobre $[0, 1]$, para todo $t \in [0, 1]$.

Demostración. Si $t \in A_k$ y $1 \leq k \leq n$, se sigue de (4.21.)

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \left| t - \frac{i}{n} \right| \left\{ \varphi \left(\frac{i+1}{n} \right) - 2\varphi \left(\frac{i}{n} \right) + \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{n}{2} \sum_{i=k}^{n-1} \left| t - \frac{i}{n} \right| \left\{ \varphi \left(\frac{i+1}{n} \right) - 2\varphi \left(\frac{i}{n} \right) + \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right\} + \\ &\quad \frac{t}{2} (\varphi'(0^+) + \varphi'(1^-)) + \frac{t}{2} (\varphi(0) + \varphi(1) - \varphi'(1^-)) \\ &= \frac{nt}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \left[\varphi \left(\frac{i+1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i}{n} \right) \right] - \left[\varphi \left(\frac{i}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right] \right\} - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} i \left\{ \left[\varphi \left(\frac{i+1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i}{n} \right) \right] - \left[\varphi \left(\frac{i}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right] \right\} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} i \left\{ \left[\varphi \left(\frac{i+1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i}{n} \right) \right] - \left[\varphi \left(\frac{i}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right] \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{nt}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \left[\varphi \left(\frac{i+1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i}{n} \right) \right] - \left[\varphi \left(\frac{i}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right] \right\} + \\ & \frac{t}{2} \left(\varphi'(0^+) + \varphi'(1^-) \right) + \frac{1}{2} \left(\varphi(0) + \varphi(1) - \varphi'(1^-) \right) \end{aligned} \quad (4.27.)$$

Haciendo

$$b_i = \varphi \left(\frac{i}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right),$$

si $h < l$ entonces por la propiedad telescópica de las sumatorias,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=h}^l (b_{i+1} - b_i) = b_{l+1} - b_h, \quad y \\ & \sum_{i=h}^l i(b_{i+1} - b_i) = \sum_{i=h}^l \left\{ (i+1)b_{i+1} - ib_i - b_{i+1} \right\} \\ & = \sum_{i=h}^l \left\{ (i+1)b_{i+1} - ib_i \right\} - \sum_{i=h}^l b_{i+1} \\ & = (l+1)b_{l+1} - hb_h - \sum_{i=h+1}^{l+1} \left\{ \varphi \left(\frac{i}{n} \right) - \varphi \left(\frac{i-1}{n} \right) \right\} \\ & = (l+1)b_{l+1} - hb_h - \left\{ \varphi \left(\frac{l+1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{h}{n} \right) \right\}, \end{aligned}$$

expresiones tales que aplicadas en cada caso en (4.27.) nos dan, después de reducir, la representación de $\Phi_n|A_k$ consignada en (4.22.).

Por lo tanto la traza de $\Phi_n|A_k$ es un segmento cerrado de recta en \mathbb{R}^m de extremos V_k, V_{k+1} dadas por (4.23.), $k = 1, \dots, n$. Se infiere de la continuidad de Φ_n que su traza es, efectivamente, la curva poligonal $V_1 \cdots V_{n+1}$.

De acuerdo a (4.23.) se advierte que, en general, V_k no está en la traza de la curva φ , por lo cual la curva poligonal $V_1 \cdots V_{n+1}$ no necesariamente está inscrita en la traza de φ .

De (4.23.) obtenemos las diferencias

$$\begin{aligned}
 V_k - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) &= \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) \\
 &= -\frac{k-1}{2n} \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)}{\frac{1}{n} - 0} + \frac{\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \varphi(1)}{\frac{n-1}{n} - 1} - \varphi'(0^+) - \varphi'(1^-) \right\} \\
 &= \frac{\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \varphi(1)}{\frac{n-1}{n} - 1} - \varphi'(1^-),
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \left\| V_k - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\| &= \left\| \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\| \\
 &\leq \frac{k-1}{2n} \left\| \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)}{\frac{1}{n} - 0} + \frac{\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \varphi(1)}{\frac{n-1}{n} - 1} - \varphi'(0^+) - \varphi'(1^-) \right\| \\
 &+ \left\| \frac{\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \varphi(1)}{\frac{n-1}{n} - 1} - \varphi'(1^-) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)}{\frac{1}{n} - 0} + \frac{\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \varphi(1)}{\frac{n-1}{n} - 1} - \varphi'(0^+) - \varphi'(1^-) \right\| \\
 &+ \left\| \frac{\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right) - \varphi(1)}{\frac{n-1}{n} - 1} - \varphi'(1^-) \right\| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, puesto que φ es diferenciable, con lo cual probamos los límites en (4.24.) y (4.25.).

Ahora procederemos a probar la convergencia uniforme en la parte **(iii)** del corolario 4.1. A tal efecto observamos las relaciones en (3.16.) y (4.21.) las cuales implican

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) = \varphi_n(t) + \frac{t}{2} & \left\{ \varphi'(0^+) + \varphi'(1^-) - \frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)}{\frac{1}{n} - 0} - \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \varphi'(1^-) \right\}, \end{aligned} \quad (4.28.)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Tomando límite en ambos miembros, cuando $n \rightarrow \infty$, teniendo en mente la última parte del corolario 3.1 y la diferenciabilidad de φ , tenemos la convergencia uniforme deseada.

Probaremos a continuación que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(\Phi_n) = l(\varphi)$$

De (4.28.) y (3.17.) se recibe

$$\begin{aligned} \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \Phi_n\left(\frac{k}{n}\right) = \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \\ \frac{1}{2n} \left\{ \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \varphi'(1^-) \right\}, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
 & \left\| \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\| - \frac{1}{2n} \left\| \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \varphi'(1^-) \right\| \\
 & \leq \left\| \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \Phi_n\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \leq \left\| \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \\
 & + \frac{1}{2n} \left\| \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \varphi'(1^-) \right\|, \\
 \\
 & \sum_{k=1}^n \left\| \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\| - \frac{1}{2} \left\| \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \varphi'(1^-) \right\| \\
 & \leq \sum_{k=1}^n \left\| \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \Phi_n\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \leq \sum_{k=1}^n \left\| \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \\
 & + \frac{1}{2} \left\| \frac{\varphi(1) - \varphi\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \varphi'(1^-) \right\|
 \end{aligned}$$

Tomando límite, cuando $n \rightarrow \infty$, en cada uno de los miembros de las desigualdades anteriores, hallamos

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} l(\Phi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\| \Phi_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \Phi_n\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\| \varphi\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} l(\varphi; P_n) = \lim_{|P_n| \rightarrow \infty} l(\varphi; P_n) = l(\varphi),
 \end{aligned}$$

donde P_n es la partición de $[0, 1]$ definida en (3.19.), $|P_n| = \frac{1}{n}$ la norma de P_n y $l(\varphi; P_n)$ la longitud de la poligonal inscrita en φ parametrizada en (3.16.)

y determinada por P_n ([5], pp. 84, 99 Teorema 5).

Finalmente, siendo la expresión que sigue equivalente a (4.21.) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left| t - \frac{k}{n} \right| \left\{ \varphi \left(\frac{k+1}{n} \right) + \varphi \left(\frac{k-1}{n} \right) \right\} \\ & \frac{1}{n^2} \Phi_n(t) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| t - \frac{k}{n} \right| \varphi \left(\frac{k}{n} \right) - \frac{1}{n} |t-1| \varphi(1) \\ & - \frac{t}{n^2} \left(\varphi'(0^+) + \varphi'(1^-) \right) - \frac{1}{2n^2} \left(\varphi(0) + \varphi(1) - \varphi'(1^-) \right) \\ & \longrightarrow \int_0^1 |t-x| \varphi(x) dx \quad \text{uniformemente sobre } [0, 1] \end{aligned}$$

([3] p. 296, Exercise 22.0).

□

Observación 4.2. Sea la función $h : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida por

$$h(t) = a + (b-a)t, \quad t \in [0, 1]$$

Así, para toda curva continua $\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, la función $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ representada por

$$\varphi(t) = (\Psi \circ h)(t) = \Psi(h(t)), \quad (4.29.)$$

para todo $t \in [0, 1]$, es tal que φ y Ψ resultan ser curvas equivalentes. Esto es, son representaciones paramétricas de una misma curva, la cual trazan en la **misma dirección**, puesto que h **preserva la orientación** ([2] p. 326).

De esta manera la transformación

$$u = a + (b-a)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

se recibe

$$\Psi(u) = \varphi \left(\frac{u-a}{b-a} \right), \quad a \leq u \leq b$$

Ahora consideremos una sucesión φ_n de curvas poligonales sobre $[0, 1]$ tales que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sobre $[0, 1]$. Si a su vez, $\{\Psi_n\}$ es una sucesión de curvas poligonales sobre $[a, b]$ representadas por

$$\Psi(u) = \varphi_n \left(\frac{u - a}{b - a} \right), \quad a \leq u \leq b$$

entonces φ_n y Ψ_n son equivalentes, trazando una curva común en la **misma dirección**. Además

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \left(\frac{u - a}{b - a} \right) = \varphi_n \left(\frac{u - a}{b - a} \right) \\ &= \Psi(u) \quad \text{uniformemente sobre } [a, b] \end{aligned}$$

Por lo tanto, las consideraciones anteriores nos permiten pasar, del intervalo paramétrico $[a, b]$ al caso unitario $[0, 1]$, tratado en los corolarios 2.1, 2.2, 3.1 y 4.1, haciendo los ajustes pertinentes.

5 Conclusiones.

1. La noción e función polisegmento $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y su representación unificada aportan un modelo matemático que describe la geometría de $f(\mathbb{R})$, la unión de una curva poligonal y dos rayos con puntos iniciales los extremos de la curva.
2. Es posible también a partir de los elementos lineales de f , obtener una representación unificadora para f , lo cual permite la descripción paramétrica reducida de trayectorias poligonales en cinemática.
3. Emerge así una representación unificada de las curvas poligonales en \mathbb{R}^m y en particular del polígono regular en \mathbb{R}^2 , en términos de sus vértices.
4. Es realizable la construcción explícita de una sucesión específica $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de curvas poligonales inscritas en una curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 , tales que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sobre $[0, 1]$.

5. Es posible además la construcción de una sucesión de curvas poligonales $\Phi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ no inscritas en una curva dada $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , tales que $\Phi_n \rightarrow \Phi$ uniformemente sobre $[0, 1]$ además de satisfacer otras propiedades geométricas relevantes.
6. La presente investigación constituye una metodología novedosa y un aporte al conocimiento de la Teoría de Curvas en el espacio n -dimensional euclídeo.

Bibliografía.

- [1] APOSTOL, Tom M., *Mathematical Analysis*, Addison–Wesley Publishing Company Inc., Second Printing, 1965.
- [2] ———., *Calculus*, Vol. II., Xerox College Publishing, second edition, 1969.
- [3] BARTLE, Robert G., *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1964.
- [4] CORDERO, Luis A.; FERNANDEZ, Marisa y GRAY, Alfred., *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Addison–Wesley Iberoamericana, S. A., edición única en español, 1995.
- [5] LIMA, Elong Lages., *Curso de Análise*, Vol. 2., Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Río de Janeiro, tercera edición, 1989.