DEL CONCEPTO DE NÚMERO EN LA OBRA DE EUCLIDES

Carlos Orlando Ochoa Castillo
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- MEPS - VIALTOPO.

1 Euclides.

Al decir de los diversos autores consultados, son muy escasas las noticias que se tienen de la vida de Euclides, sin embargo, Francisco Vera en [5] cita a Proclo para afirmar que Euclides vivió bajo el reinado de Ptolomeo I y por consiguiente en el período que va de 360 a 285 antes de J. C. De todos modos, se cuenta que al preguntarle el fundador de la dinastía de las Lágidas si habría un camino más corto para aprender Geometría que el de los *Elementos*, Euclides le respondió: *En Geometría no hay ningún camino especial para los reyes*. Por otro lado, Tolomeo I fue uno de los generales de Alejandro Magno y fundó el Museo o templo de las Musas en la ciudad de Alejandría, que se constituyó de acuerdo con Carl Sagan en [7] en prácticamente en la primera Universidad. Uno de los primeros matemáticos en vincularse al museo de Alejandría fue Euclides, y como todos los demás científicos inmersos en esta aventura intelectual se propuso sistematizar con juicio en libros de texto la matemática elemental conocida en tiempos de Platón.

Van der Waerden citado por Campos en [1], dice: Euclides no es en manera alguna, un gran matemático... Las partes más importantes y más difíciles de los elementos han sido tomadas de otro autores, especialmente de Teeteto (X y XIII) y de Eudoxio (V y XII). Estas, como los libros aritméticos VII y IX, son de muy alto nivel matemático; mientras que otras, como el medianero de los libros aritméticos (VIII),..., están muy por debajo de este nivel. Contienen errores lógicos y hay formulaciones en ellos que son confusas. El nivel de Euclides es determinado por el del predecesor que sigue. Es justo enfatizar que a pesar del juicio emitido por Van der Waerden que Euclides es un gran geometra y un gran expositor, tal vez un educador matemático por excelencia.

Con respecto a la aritmética, los *Elementos* constan de trece libros de los cuales hay cuatro dedicados a ella; se exhibe en seguida una sinopsis de estos libros junto con el número de definiciones y teoremas.

Libro	Número de Definiciones	Número de Teoremas
VII	22	39
VIII		27
IX		36
X	4	47
	6	36
	6	30

En lo que sigue, se presentan algunas definiciones y teoremas relacionados con el concepto de número que aparecen en la obra.

2 Del Libro VII.

Esencialmente, este libro trata de el establecimiento de una teoría de la divisibilidad junto con el concepto de número racional. Se muestran ahora las definiciones junto con algunos comentarios.

Definición 2.1. *Una unidad es aquello por lo cual cada cosa que existe puede ser llamada una.*

Con la intención de explicar, Bourbaki citado por Campos en [2] afirma que Uno es la mónada y no un número propiamente hablando. Por otro lado, en [4] se asevera que Jamblico dice que la definición de Euclides de unidad o mónada fue dada por autores más recientes, y que le faltaron algunas palabras. De esta fuente se presentan otras definiciones:

- De acuerdo con algunos de los Pitagóricos, una unidad es el límite entre el número y las partes, porque de él, así como de una semilla y raíz eterna, las proporciones aumentan recíprocamente en cualquier dirección; esto es, por un lado se tienen las razones múltiples que aumentan continuamente y por el otro (si la unidad se subdivide) las razones de los submúltiplos con denominadores que aumentan continuamente.

- Una definición similar a la anterior, proviene de Thymaridas, un antiguo Pitagórico quién definió una mónada como el límite de la cantidad, es decir el principio y el final de una cosa que es igualmente un extremo. Theon de Smirna agrega que la mónada se tiene cuando la multitud se disminuye por vía de la substracción continuada, se priva de todo el número y toma una posición permanente y descansa. Si después de llegar a una unidad de esta manera, se procede a dividir la unidad o mónada en partes, de manera inmediata se tiene la multitud de nuevo.

- Algunos, según Jamblico la definieron como *la forma de formas* porque comprende todas las formas de número potencialmente. Es un número poligonal de cualquier número de lados mayor que tres, un número sólido en todas las formas y así sucesivamente. De nuevo una unidad, dice Jamblico, es lo primero, o más pequeño, en la categoría de cuántos, la parte común cuando se empieza a explorar cuántos. Aristóteles lo define como lo indivisible en (la categoría de) la cantidad; la unidad se distingue de un punto por el hecho de carecer de posición. De acuerdo con la última distinción, Aristóteles llama unidad a un punto sin la posición.

- Nicómaco también observa que cualquier número es la mitad de la suma o bien de los números del adyacentes en cada lado o de dos números equidistantes en cada lado. La unidad no presenta un número a cada lado, sólo existe un elemento en uno de sus lados, y es la mitad de este último es decir el 2.

Definición 2.2. *Número es una multitud de Unidades*

Nicómaco citado en [4] combina algunas difiniciones diciendo que número es una multitud definida, una colección de unidades, o un flujo de cantidad compuesto de unidades. De igual modo en esta fuente se tiene que para Jamblico, la descripción de la colección de unidades fue aplicada a la pregunta cuántos?, i.e. el acto de numerar, por Thales, que sigue la visión egipcia, mientras que Eudoxio el Pitagórico dijo que un número era una multitud definida. Por tro lado, tanto en [4] y [5] se afirma que Aristóteles presenta varias definiciones que describen la misma cosa: multitud limitada, multitud (o combinación) de unidades o la multitud de indivisibles, varios, multitud mensurable por la unidad, y multitud medida y multitud de medidas, la medida es claro que es la unidad. A la edad media, esta definición pasa divulgada por San Isidoro como *Numerus autem est multitudo ex unitatibus constituta.*

Definición 2.3. *Un número es parte de otro cuando el menor mide al mayor.*

Corresponde a la primera definición del libro V, la diferencia esencial radica en que allí se estudian las magnitudes. En ambos casos se entiende que corresponde al concepto de submúltiplo o parte alicuota. Nicómaco afirma que: El submúltiplo ... es el número que comparado con uno grande puede medirlo exactamente. De modo similar, el término subdoble se encuentra en Nicómaco significando la mitad.

Definición 2.4. *Un número es fracción de otro cuando no lo mide.*

Es tal como se presenta en [5] a partir de la comparación de los términos $\mu\acute{\epsilon}\rho o\zeta$ y $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$, sin embargo en [4] se dice que la expresión *parte* en Euclides denota lo que llamamos fracción propia. Esto es, una parte sería un submúltiplo, el inconveniente del término *parte* es que significa algún número de los submúltiplos dando una fracción menor que la unidad; en este trabajo, Heath advierte que no ha encontrado la palabra usada en este sentido especial ni en Nicómaco, Theon de Smyrna o Jamblico excepto en un paraje de Theon donde es usado como fracción propia en la cual $2/3$ es una ilustración.

Definición 2.5. *Un número es múltiplo de otro menor cuando este lo mide.*

La definición de múltiplo es casi idéntica a la segunda definición. Nicómaco citado en [4] define múltiplo como número mayor que es primero en orden y origen, siendo el número que considerado en comparación con otro, lo contiene completamente más de una vez.

Definición 2.6. *Un número es par si es divisible en dos partes iguales.*

Definición 2.7. *Un número es impar si no es divisible en dos partes iguales o difiere de un número par en una unidad.*

En [4] se presenta la ampliación de estas definiciones dadas por Nicómaco así: Un número par es posible dividirlo en dos partes iguales sin que caiga una unidad en el medio, y un número es impar cuando no puede dividirse en dos partes iguales por la intervención ya mencionada de la unidad.

Definición 2.8. *Un número par de veces un número par es cuando un número par es medido por un número par.*

Definición 2.9. *Un número par de veces un número impar en la cual es medido por un número par de acuerdo a un número impar.*

Definición 2.10. *Un número impar de veces un número impar es aquella en la cual se mide un número impar por un número par*

Estas tres definiciones (2.8, 2.9 y 2.10) constituyen de acuerdo con [5] una clasificación de los números módulo cuatro. Falta desde luego, la del imparmente par, que es de la forma $4n + 2$, aparentemente igual al parmente par del tipo $4n$; pero la diferencia consiste que en los números parmente pares se llega a un cociente 1 al cabo de un cierto número de divisiones por 2, y en los imparmente pares no, siendo por tanto, de la forma $2m(2n + 1)$. San Isidro en sus Etimologías, da mucha importancia a estos números que gozaron de gran predicamento durante la edad media.

Definición 2.11. *Número primo es el solamente divisible por la unidad.*

Se recuerda que Euclides no considera la unidad como número, y por consiguiente, no tiene en cuenta la divisibilidad de un número por si mismo.

Definición 2.12. *Números primos entre si son los que no tienen más divisor común que la unidad.*

Corresponde a lo que hoy se denomina primos relativos.

Definición 2.13. *Número compuesto es el divisible por algún número.*

Definición 2.14. *Números compuestos entre si son los que tienen un mismo divisor común.*

De acuerdo con [5] el P. Tomas Vicente Tosca (1651 - 1723) define los números compuestos entre si como los que tienen alguna medida común a más de la unidad.

Definición 2.15. *Producto de un número por otro es lo que resulta de sumarlo consigo mismo tantas veces como unidades tiene el otro.*

Definición 2.16. *Número plano es el producto de dos números que se llaman sus lados.*

Definición 2.17. *Número sólido es el producto de tres números que se llaman sus lados.*

Las palabras plano y sólido están inspiradas en la geometría, los griegos también consideraban números lineales cuando solo tenían longitud. Los lados de los números son nuestros factores.

Definición 2.18. *Número cuadrado es el producto de un número por si mismo.*

Definición 2.19. *Número cúbico es el producto de un número por sí mismo dos veces seguidas.*

Definición 2.20. *Se dice que cuatro números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, parte alicuota o fracción del segundo que el tercero del cuarto.*

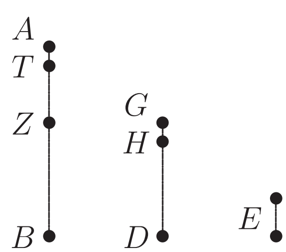
Definición 2.21. *Los números planos y sólidos se dicen semejantes cuando sus lados son proporcionales.*

Definición 2.22. *Se dice perfecto un número cuando es igual a [la suma de] sus partes alicuotas.*

Con el propósito de disfrutar un teorema y su prueba a la manera de Euclides de [5] se presenta la

Proposición 2.1. *Dados dos números desiguales, réstese sucesivamente el menor del mayor. Si el número que queda separado no mide nunca al anterior hasta separar la unidad, los dos números son primos entre si.*

Demostración.



Sean AB y GD los números dados. Si no son primos relativos, algún número E los dividirá. Llévese sucesivamente el menor GD sobre el mayor AB hasta el punto Z tal que la longitud que quede ZA sea menor que GD y hágase lo mismo con GD y ZA hasta que HG sea menor que ZA y con HG y ZA hasta que quede una unidad TA. Entonces, por medir E a GD y GD a BZ, E mide a BZ, y como mide al total BA, medirá al resto AZ; pero AZ mide a DH, luego también E mide a DH y como mide al total GD, mide al resto GH y como GH mide a ZT, E medirá a ZT y por medir al total ZA, mide al resto que es la unidad TA, lo cual es imposible. Los números AB y GD, no teniendo, pues, un número que los mida, son primos entre si. $\square$

3 De los otros Libros Aritméticos.

Con las definiciones dadas en el libro VII y sus resultados, se prueban las proposiciones de los libros VIII y IX, para cada uno de estos se enuncian las primeras y últimas proposiciones:

Proposición 3.1 (Proposición VIII 1). *Si varios números están en proporción continua y los extremos son primos relativos, dichos números son los menores que tienen entre si la misma razón.*

Proposición 3.2 (Proposición VIII 27). *Los números sólidos semejantes tienen entre si la misma razón que dos números cubos.*

Proposición 3.3 (Proposición IX 1). *El producto de dos números planos semejantes es un cuadrado.*

Proposición 3.4 (Proposición IX 36). *Si varios números, empezando por la unidad, están en proporción duplicada y la suma de todos es un número primo, el producto de esta suma por el último es número perfecto.*

Es inevitable ceder a la belleza de esta proposición, al fín y al cabo, los números perfectos son aún motivo de investigaciones; se presenta un esquema de la prueba dada por Nesselmann en Die Algebra der Griechen (1842) que aparece en [5]:

Demostración. Supongamos que $p = 2^n - 1$ es primo y sea $s = 2^{n-1}p$; entonces la suma S de los divisores de s es:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} + p(1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}) \\
&= (1 + p)(1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}) + 2^{n-1} \qquad = 2 \cdot 2^{n-1}(2^{n-1} - 1) + 2^{n-1} \\
&= 2^{n-1}[2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1] \\
&= 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{n-1}p \\
&= s
\end{aligned}$$

La proposición es falsa si p no es primo. ◻

4 A manera de Tarea.

En primer lugar se llama la atención con respecto a la última prueba del parágrafo anterior, está pendiente el estudio de la misma prueba a la manera de Euclides, la comparación se puede realizar, pero téngase presente la diferencia de épocas y que la que aquí se expone es resultado de un proceso de decantación y maduración de algunas ideas matemáticas. De todas maneras, Euclides se anticipa a Mersenne con los números primos de la forma $p = 2^n - 1$ estableciendo además una relación con los números triangulares.

De todas las ideas que quedan pendientes por exhibir, se resalta la del trabajo desarrollado por Euclides en el libro X que trata de las magnitudes no conmensurables, que a pesar de la visión moderna de las magnitudes irracionales, es crucial acompañar a Euclides en esta faena si se quiere estudiar con seriedad la evolución de las ideas matemáticas.

Con respecto a la labor docente, la obra de Euclides es referencia para quien desea estimular la creatividad de sus estudiantes. Se soporta esta afirmación con las actitudes observadas en las pruebas de las primeras proposiciones; la regla y el compás aclaran las ideas y los procedimientos.

Referencias

[1] Alberto Campos, *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Alberto Campos Editor, Bogotá, 1994

[2] Alberto Campos, *De Pitágoras a Euclides*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1984

[3] John H. Conway, Richard K. Conway, *The Book of Numbers*, Springer - Verlag, New York, 1996

[4] EUCLIDES, *The Thirteen Books of Elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath*, Vol. 2, Dover, 1956

[5] EUCLIDES, *Elementos de Geometría*, En Científicos Griegos. Recopilación estudio Preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, Vol. 1, Dover, 1970

[6] Bernardo Recamán S., *Los Números. Una Historia para Contar*, Taurus, 2002

[7] Carl Sagan, *Cosmos*, Planeta, Barcelona, 1992