EL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL SEGÚN CHARLES S. PEIRCE

Arnold Oostra
Profesor de Matemáticas
Universidad del Tolima.

A nuestro amigo
Edward Pérez,
In Memoriam.

Resumen.

Se bosqueja un estudio del artículo On the Logic of Number, publicado en 1881, en el cual C. S. Peirce presentó una axiomatización de los números naturales.

Contrario a lo que quizás hace pensar el título, este no es un estudio amplio o filosófico de la noción de número natural en el pensamiento peirceano. Se trata, simplemente, de presentar y discutir un artículo breve de Peirce, publicado en la época fugaz pero muy productiva en la que estuvo vinculado directamente a la academia. Ese escrito contiene un sistema de axiomas para los números naturales, una definición recursiva de las operaciones, demostraciones inductivas de sus propiedades algebraicas básicas, una extensión de la estructura para incluir los números negativos y un primer estudio de la noción de conjunto finito. El artículo en cuestión es muy anterior a los trabajos de Dedekind y Peano sobre estos temas, de manera que puede decirse con seguridad que se trata de la primera axiomatización publicada de los números naturales. (Véase Shields 1981, 1997.)

En la sección 1 del documento presente se hace una descripción más detallada del artículo de Peirce. En la sección 2 se procura construir un contexto para este aporte valioso: se busca un lugar para la axiomática en el edificio filosófico peirceano; se presenta la axiomatización posterior, más conocida, de Peano; se muestran otras axiomatizaciones similares. En la sección 3 se discute el problema de la equivalencia de los diferentes sistemas axiomáticos para los números naturales.

1 Lectura: El artículo On the Logic of Number.

1.1 Charles S. Peirce.

Charles Sanders Peirce (1839–1914) es uno de los últimos científicos universales. Es más conocido en la filosofía, a la cual hizo aportes significativos: es el padre de la semiótica moderna, creó el pragmatismo auténtico y redujo a un mínimo –tres–las categorías ontológicas. Pero aunque esa es la contribución más reconocida de Peirce, no pueden pasarse por alto sus gigantescas y numerosas contribuciones a la lógica y a la matemática: axiomatizó el cálculo proposicional distinguiendo la implicación de la deducibilidad y relacionándolas mediante un teorema de deducción; anticipó cálculos implicativos débiles y lógicas trivalentes; propuso una notación homogénea para la totalidad de los conectivos binarios clásicos y estudió entre ellos los conectivos completos; desarrolló el cálculo de predicados, la teoría de cuantificadores y las formas normales; discutió la noción de conjunto, diversas definiciones del infinito y las comparaciones cardinales; estudió el continuo de manera original; desarrolló un sistema muy amplio de lógica gráfica que permite, entre otros resultados, realizar deducciones formales de manera visual. (Véase *Thibaud 1982, Zalamea 1993, 1997, Oostra 2000, García et al. 2001.*)

Por un cúmulo de razones de toda índole –geográficas, circunstanciales, personales, metodológicas, conceptuales–Peirce fue marginado de la academia. Durante su vida, aún reconociendo su brillantez, no fue admitido de manera estable en ningún centro universitario; por el contrario, fue echado de la Universidad Johns Hopkins después de apenas un lustro de labores que ya empezaban a arrojar frutos. El rechazo no terminó con su muerte pues el gigantesco volumen de sus escritos, cerca de 100.000 páginas manuscritas, fue relegado al olvido por mucho tiempo y cuando se realizaron los primeros esfuerzos por editar parte de ella, los documentos fueron alterados y recortados. Sólo durante las últimas décadas del siglo XX se iniciaron esfuerzos serios y cuidadosos por restaurar la obra de Charles S. Peirce y darle el lugar que merece. Desde 1976 se desarrolla en la Universidad de Indiana el Peirce Edition Project, encaminado a producir la edición completa, respetuosa y cronológica de los escritos de Peirce.

En la tarea de recuperación del legado de Peirce pueden distinguirse tres niveles. En primer lugar es preciso leer a Peirce: abordar los temas presentes en sus escritos y estudiarlos con rigor. En segundo lugar, cada aspecto de la obra de Peirce debe interpretarse en contextos variados: sus aportes pueden compararse con otros trabajos en el desarrollo de la ciencia y, por otra parte, deben mirarse en el contexto filosófico global de la obra de Peirce. Por último, la tarea más difícil pero también más fructífera es la de construcción: las ideas presentes en el legado de Peirce deben desarrollarse y explotarse para avanzar en el planteamiento y la solución de problemas abiertos importantes. En el documento presente pueden encontrarse reflejados, tenuemente, estos tres frentes de trabajo.

1.2 Contenido del artículo.

El escrito *On the Logic of Number* fue publicado en 1881 en las páginas 85 a 95 del volumen 4 de la revista *The American Journal of Mathematics.* Desde las primeras frases el autor indica la intención de su cometido.

Nadie puede poner en duda las propiedades elementales concernientes al número: las que no son manifiestamente verdaderas a primera vista son verificadas por las demostraciones usuales. Pero aunque vemos que son verdaderas, no vemos fácilmente con precisión por qué son verdaderas; tanto es así que un lógico inglés de renombre ha abrigado la duda si serían verdaderas en todas las partes del universo. El objetivo de este artículo es mostrar que ellas son consecuencias estrictamente silogísticas de unas pocas proposiciones primarias.

En pocas palabras, el propósito de Peirce es axiomatizar la aritmética.

En seguida el autor postula un "*término relativo*" –lo que hoy se denomina una relación binaria–del cual pide, en primer lugar, que sea transitivo; luego, que sea (en terminología actual) reflexivo; además que sea antisimétrico. A eso denomina un "*relativo fundamental de cantidad*" y al sistema obtenido, un "*sistema de cantidad*". Esto se llama ahora una relación de orden y un conjunto (parcialmente) ordenado: según algunos historiadores este es el primer lugar en que aparecen así juntas estas conocidas definiciones.

A continuación Peirce distingue entre "*sistema múltiple*", en el cual hay pares de elementos que no se relacionan entre sí y "*sistema simple*", que corresponde a un conjunto linealmente ordenado (o totalmente ordenado). Cabe anotar que Peirce, anterior al auge de la teoría de conjuntos y muy anterior a Bourbaki, por supuesto no habla de elementos: dice "*cantidades*". Los "*sistemas simples*" a su vez los clasifica en "*continuos*", "*discretos*" y "*mixtos*":

en los primeros, entre cada par de elementos relacionados hay un tercero, es lo que hoy se denomina un orden denso; en un sistema "*discreto*", cualquier elemento mayor que otro es sucesor inmediato de algún elemento o, lo que es lo mismo, todo elemento no minimal posee antecesor inmediato; un sistema "*mixto*" es "*continuo*" en unas partes y "*discreto*" en otras. Luego, un "*sistema simple discreto*" puede ser "*limitado*", "*semi–limitado*" o "*ilimitado*", según tenga mínimo y máximo, o sólo uno, o ninguno de los dos.

Para terminar su clasificación, Peirce afirma que un "*sistema simple, discreto y no limitado (semi–limitado o ilimitado)*" puede ser "*infinito*" o "*super–infinito*" y da varias descripciones del primer caso, definiendo el segundo como su complemento. En un sistema "*infinito*", todo elemento mayor que uno dado puede ser alcanzado por pasos sucesivos hacia el sucesor inmediato. En otras palabras –de Peirce–, si es cierto que el sucesor inmediato de todo elemento de cierta clase también pertenece a la clase, entonces todo elemento mayor que un elemento de esa clase pertenece a la clase. O bien, un sistema "*infinito*" puede ser definido –y Peirce lo indica–como uno en el que, del hecho de que una proposición dada, si es válida para un elemento entonces es válida para su sucesor inmediato, puede inferirse que si esta proposición es válida para algún elemento entonces es válida para todo elemento mayor. Es, con toda exactitud, lo que hoy se conoce como el principio de inducción.

Asumidos los axiomas –"*sistema de cantidad simple*, *discreto, semi–limitado, infinito*"–, Peirce procede a dar algunas definiciones. El mínimo lo llama uno, 1. La suma $x+y$ la define por recursión –de nuevo, según algunos estudiosos esta es la primera vez que aparecen tales definiciones en matemáticas–: si x carece de antecesor inmediato, entonces es el mínimo y $x+y$ se define como el sucesor inmediato de y; en caso contrario, si x tiene antecesor inmediato x' entonces $x+y$ se define como el sucesor inmediato de $x'+y$. De manera similar, si x carece de antecesor inmediato, xy se define como y; en caso contrario, se define como $y+x'y$.

A continuación el autor prueba –por inducción, como se dice hoy–las propiedades siguientes de las operaciones recién definidas.

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. $x+y = y+x$
3. $(x+y)z = xz+yz$
4. $x(y+z) = xy+xz$

5. $(xy)z = x(yz)$

6. $xy = yx$

   Ahora Peirce cambia un poco las condiciones para estudiar un "*sistema simple, discreto, ilimitado, infinito en ambas direcciones*". Ya no hay mínimo pero cierto elemento se designa uno, 1, mientras su antecesor inmediato es el cero, 0. Los elementos mayores que 0 constituyen un "*sistema simple, discreto, semi–limitado, infinito*" en el cual es válido todo el desarrollo anterior. Las definiciones de las operaciones, al igual que sus propiedades demostradas, se extienden al "*sistema ilimitado*". Peirce indica que las pruebas de estas últimas son consecuencia inmediata de la primera de las siguientes, que sí prueba todas en detalle.

7. Si $x + y = x + z$ entonces $y = z$

8. $x + 0 = x$

9. $x0 = 0$

10. Todo elemento x mayor que 0 tiene un negativo $-x$

11. $(-x)y = -(xy)$

12. $x = -(-x)$

En la última sección del artículo, Peirce da un nuevo uso a los números recién construidos: define una "*cuenta*" como una correspondencia biyectiva entre una "*clase*" y un segmento inicial de los números naturales. Mediante una compleja demostración inductiva asegura que el número de números menores o iguales que un natural x es x, sin importar la forma u orden en que se "*cuenten*", garantizando así la unicidad del número de elementos de cualquier conjunto finito. Colige luego que si un subconjunto de un conjunto finito posee tantos elementos como éste conjunto, entonces es igual a él, lo cual ilustra con un "*modo de razonamiento frecuente en teoría de números*":

Todo Texano mata un Texano,
Nadie es muerto por más de una persona,
Por lo tanto, todo Texano es muerto por un Texano.

Cabe anotar que de esta sección pueden extraerse con facilidad dos nociones de conjunto finito, precisadas de nuevo más tarde en la historia de la matemática: (a) un conjunto es finito si está en correspondencia biyectiva con un segmento inicial de los números naturales; (b) un conjunto es finito si no está en correspondencia biyectiva con ningún subconjunto propio. De hecho, Peirce en este artículo deduce (b) de (a).

1.3 Axiomatizaciones en terminología actual.

El artículo On the Logic of Number contiene una axiomatización para los números naturales y una para los números enteros. Una presentación con terminología y simbología actuales es la siguiente.

Números Naturales.

Términos:
Un conjunto, $\mathbb{N}$, y una relación binaria, $\mathbb{R}$, en $\mathbb{N}$. Axiomas:

1. $\mathbb{R}$ es un orden lineal en $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{N}$ posee elemento $\mathbb{R}$ –mínimo y no posee elemento $\mathbb{R}$ –máximo
3. Todo elemento de $\mathbb{N}$ distinto del R–mínimo posee R–antecesor inmediato
4. Si un subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface: para cada $n \subseteq \mathbb{N}$, si S contiene a n entonces contiene el $\mathbb{R}$–sucesor inmediato de n entonces S satisface: si S contiene un elemento k entonces contiene todos los $\mathbb{R}$–sucesores de k

Números Enteros.

Términos:
Un conjunto, $\mathbb{Z}$, y una relación binaria, $\mathbb{R}$, en $\mathbb{Z}$. *Axiomas:*

1. $\mathbb{R}$ es un orden lineal en $\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}$ no posee elemento $\mathbb{R}$–mínimo ni posee elemento $\mathbb{R}$–máximo
3. Todo elemento de $\mathbb{Z}$ posee $\mathbb{R}$–antecesor inmediato
4. Si un subconjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{Z}$ satisface: para cada $m \subseteq \mathbb{Z}$, S contiene a m si y sólo si contiene el $\mathbb{R}$–sucesor inmediato de m entonces $S = \mathbb{Z}$

2 Contextos: Axiomatizaciones.

2.1 La axiomática en Peirce.

Benjamin Peirce, padre de Charles, fue uno de los matemáticos americanos más distinguidos durante el siglo XIX. Quizás la mayor influencia se ejerció a través de sus textos entre los que se destaca *Linear Associative Algebra*, publicado por primera vez en 1870 y que comienza con la siguiente definición notable:

> La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias.

Benjamin falleció en 1880; en 1881 fue reimpreso de manera póstuma su escrito *Linear Associative Algebra*, esta vez editado por Charles Peirce, en el mismo número de la revista *The American Journal of Mathematics* en el cual se publicó *On the Logic of Number*. Todo parece indicar que Charles quiso enfatizar y honrar la visión de su recién fallecido padre, a quien siempre quiso y estimó mucho, mostrando con claridad que la aritmética consiste en conclusiones necesarias "de unas pocas proposiciones primarias". Cabe observar que a la sazón ya se había logrado la aritmetización del análisis y que poco después se lograría la de la geometría, de suerte que, más que nunca antes, la matemática podía verse como una teoría de conclusiones necesarias. Charles Peirce siguió muchas veces a su padre en la citada definición de la matemática, ampliándola y complementándola con la siguiente.

> La lógica deductiva es la ciencia de obtener conclusiones necesarias.

Este par de definiciones puede conducir a un interesante estudio del papel y de la dependencia mutua de la matemática y la lógica deductiva en el pensamiento peirceano, analizados en distintos pasajes. (Véase Grattan–Guinness 1992, Levy 1997.) La matemática es, para Peirce, anterior a la lógica –como puede observarse en su clasificación de las ciencias–porque debe haber razonamientos y conclusiones necesarias antes de que pueda existir una ciencia de los mismos. En palabras del pensador:

> El matemático busca la solución de un problema... mientras el lógico, sin importarle un comino la solución, desea analizar la forma del proceso mediante el cual ella se obtiene.

Por otra parte, puede observarse que la axiomática es ubicua en el legado peirceano. Además de la primera axiomatización de la aritmética, Peirce presentó la primera axiomatización del cálculo proposicional y estudió por primera vez los conectivos completos. También vale la pena destacar su sistema de gráficos existenciales, considerados por él mismo su obra maestra: sus partes alfa y beta corresponden al cálculo proposicional y cálculo de predicados de la lógica clásica y se axiomatizan con un sistema reducido y homogéneo de reglas de transformación; el ambiente gama es mucho más amplio pero contiene, en particular, cálculos modales que pueden describirse de igual manera con sistemas sencillos de reglas. (Véase **Zalamea** 1997, 2001.)

2.2 La axiomatización de la aritmética por Peano.

Desde que se diferenciaron, la geometría y la aritmética se constituyeron en los dos pilares fundamentales de la matemática. La axiomatización de la geometría fue un proceso muy, muy largo que, aunque iniciado mucho antes, se materializó por primera vez en el trabajo *Elementos de Euclides*, unos 300 años antes de Cristo. Durante el siglo XIX, sin duda con el impulso de la aparición de las geometrías no euclidianas, se multiplicaron los esfuerzos por axiomatizar la geometría, empeño culminado finalmente en 1899 con la publicación de *Fundamentos de la Geometría*, de *David Hilbert*. (Véase **Campos** 1994.)

Durante el siglo XIX también se presentaron varias axiomatizaciones de la aritmética o, con más precisión, de los números naturales. Sin lugar a dudas, la más conocida es la que presentó *Giuseppe Peano* en 1889 en un pequeño libro, escrito en latín y publicado en Turín, titulado *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. Mucho más que un texto de aritmética, este documento contiene una introducción a la lógica que también ejerció gran influencia. Peano reconoce hacer uso de estudios de otros autores: en lógica menciona a *Boole, Schröder, Peirce, Jevons y MacColl*; en aritmética menciona el trabajo de Dedekind publicado el año anterior –reconocido de manera generalizada como la primera axiomatización de la aritmética, aunque salió a la luz 7 años después del artículo de Peirce–y el texto de Grassmann de 1861. Este último libro posiblemente fue fuente de inspiración tanto para Peano y Dedekind como para Peirce, fuente que merecería un estudio aparte.

A continuación se hace una presentación muy resumida de la primera parte del libro de Peano. En el prefacio se introduce una gran cantidad de notación lógica. El §1, titulado *Números y Adición*, comienza con las "explicaciones" siguientes.

- El símbolo $\mathbb{N}$ significa número (entero positivo)
- El símbolo 1 significa unidad.
- El símbolo $a + 1$ significa el sucesor de a, o, a mas 1.
- El símbolo $=$ significa es igual a. Consideramos este signo como nuevo, aunque tiene la forma de un signo lógico.

En seguida se enuncian los "*axiomas*". En esta presentación sólo se ha modificado la notación lógica.

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a = a$.
3. Si a, $b \in \mathbb{N}$ entonces: $a = b$ si y sólo si $b = a$.
4. Si a, b, $c \in \mathbb{N}$ entonces: $a = b$, $b = c$ implica $a = c$.
5. Si $a = b$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces $a \in \mathbb{N}$.
6. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a + 1 \in \mathbb{N}$.
7. Si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces: $a = b$ si y sólo si $a + 1 = b + 1$.

8. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a + 1 \neq 1$.

9. Si k es una clase (¡Peano escribe: $k \in K$!), $1 \in k$, y si para $x \in \mathbb{N}$: $x \in k$ implica $x + 1 \in k$, entonces $\mathbb{N} \in k$.

Siguen las "definiciones" $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, etcétera y algunos "teoremas", en su mayoría de lógica exceptuando las afirmaciones $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ etcétera. Luego se encuentra otra "definición".

Si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces: $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Peano anota que esta definición debe leerse como sigue: si a y b son números y si $(a+b)+1$ tiene significado (esto es, si $a+b$ es un número) pero $a+(b+1)$ aún no ha sido definido, entonces $a + (b + 1)$ significa el número que sigue a $a + b$. De aquí se sigue que si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a + 2 = (a + 1) + 1$, $a + 3 = (a + 2) + 1 = ((a + 1) + 1) + 1$, etcétera.

Los teoremas aritméticos que el autor demuestra a continuación son los siguientes.

Si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $a + b \in \mathbb{N}$. Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ entonces: $a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$. Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $1 + a = a + 1$. Si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $a + b = b + a$.

En el §2 Peano define la sustracción; en el §3 define la multiplicación, como sigue.

Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a \times 1 = a$. Si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces $a \times (b + 1) = (a \times b) + a$.

Actualmente, los axiomas 2 hasta 5 se consideran propiedades lógicas y se distinguen de la aritmética; el axioma 6 y una implicación del 7 dicen que la correspondencia que a cada número asigna el siguiente es una función; la inclusión $\mathbb{N} \in k$ se considera en la intersección con $\mathbb{N}$, para no cuantificar sobre todos los conjuntos sino sólo sobre subconjuntos de $\mathbb{N}$. Con estas reducciones, una presentación de los axiomas de Peano con terminología y simbología actuales es la siguiente.

Números Naturales.

Términos:

Un conjunto, $\mathbb{N}$; una función, s, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$; una constante, 1, en $\mathbb{N}$. *Axiomas:*

1. s es inyectiva

2. 1 no pertenece al recorrido de s

3. Si un subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ satisfacet

   - $1 \in S$
   - para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \in S$ entonces $s(n) \in S$

   entonces $S = \mathbb{N}$

2.3 Axiomatización de otros conjuntos ordenados.

Una de las características notables de la axiomatización de los números naturales debida a Peirce en su artículo de 1881 es que el autor estudia este sistema como un conjunto ordenado: inicialmente da la definición de conjunto ordenado, luego va añadiendo condiciones hasta capturar la estructura buscada. En la matemática actual se conocen otros conjuntos ordenados determinados completamente por un puñado de sus propiedades, es decir, axiomatizados. A continuación se presentan dos ejemplos.

Números Racionales.

El conjunto de los números racionales con el orden usual es el único conjunto linealmente ordenado $\mathbb{Q}$ que satisface las condiciones siguientes.

1. $\mathbb{Q}$ no posee elemento mínimo ni posee elemento máximo

2. Entre cada par de elementos distintos de $\mathbb{Q}$ hay un tercer elemento (el orden es denso)

3. El conjunto $\mathbb{Q}$ es enumerable (Véase **Willard** 1970.)

El conjunto de Cantor.

El conjunto ternario de Cantor con el orden heredado de la recta real es el único conjunto linealmente ordenado C que satisface las condiciones siguientes.

1. Todo subconjunto de C posee extremo superior (C es un retículo completo)
2. Entre cada par de elementos distintos de C hay un salto (un par de elementos, uno antecesor inmediato del otro)
3. C no posee elementos aislados (elementos que poseen, a la vez, antecesor inmediato y sucesor inmediato)
4. En C hay una cantidad enumerable de saltos (Véase **Oostra** 1991.)

3 Mediación: Peirce y Peano.

4 La equivalencia de las axiomatizaciones.

Una demostración formal de la equivalencia entre los sistemas de axiomas presentados por Peirce y Peano no es difícil, aunque posiblemente los detalles técnicos la hagan tediosa.

De los axiomas de Peano a los de Peirce podría pasarse fácil, verificando las condiciones que exige este último en el sistema usual de los números naturales, que se supone es un modelo de los axiomas de Peano. Un camino más riguroso es definir el orden, por ejemplo como sigue.

Si $a, b \in \mathbb{N}$ entonces: $a < b$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$.

A partir de aquí, empleando los axiomas de Peano y las propiedades derivadas de ellos, pueden demostrarse las condiciones de Peirce.

Al revés, para pasar de los axiomas de Peirce a los de Peano basta demostrar que cada elemento tiene un sucesor inmediato (¡esto no está explícito en los axiomas de Peirce!). Por la linealidad del orden, este sucesor inmediato es único y ya se tiene la función sucesor prerequerida por las condiciones de Peano. Por la construcción de esta función, las condiciones se verifican sin mayor dificultad.

4.1 La equivalencia puesta en duda.

Es bien sabido que la equivalencia formal no significa igualdad. Una comparación –no muy profunda–de los conjuntos de axiomas presentados por Peirce y Peano arroja el siguiente par de observaciones.

Aún si se empleara la notación actual de la teoría de conjuntos (¡cuya precursora es el trabajo de Peano!), los axiomas de Peirce no pueden aspirar a superar los de Peano en elegancia y concisión. Por otra parte, los términos de la axiomatización de Peano aparecen de manera muy artificial –de hecho, la estructura (Conjunto, Endofunción) no es usual en matemáticas–mientras la presentación de Peirce es contextual y natural: una relación –muy común en matemáticas y en lógica–, binaria, transitiva, de orden, lineal, con mínimo y sin máximo, con antecesores, inductivo... En esta sucesión, cada condición añadida puede verse como una restricción adicional al universo hasta que en la intersección queda un solo objeto, precisamente el que se quería axiomatizar.

En este punto vale la pena traer a colación una de las expresiones de la llamada *Máxima Pragmática*, elemento fundamental en el pensamiento de Charles S. Peirce.

Considerad qué efectos, que concebiblemente podrían tener consecuencias prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de estos efectos es la totalidad de nuestra concepción del objeto.

(Véase **Peirce** 1878.) Si el "objeto" es el sistema de los números naturales, la comprensión de los mismos crece si se los estudia desde diferentes perspectivas, por ejemplo: a partir de los axiomas de Peirce, a partir de los axiomas de Peano, a partir de la teoría de conjuntos, ...

Pero si el "objeto" es la equivalencia entre los sistemas aritméticos de Peirce y Peano, no es suficiente una deducción, más o menos rigurosa, de los axiomas propuestos por el uno en el sistema propuesto por el otro. Tal demostración ahoga el sabor de la diferencia esencial que parece existir entre las presentaciones: en un caso un orden, en el otro una función. Para detectar la diferencia –si la hay–, sería preciso recorrer el haz de todos los contextos posibles en los cuales los sistemas fueran expresables y comparables. Lo cual es muy difícil.

Una ayuda magnífica en este sentido la ha provisto, desde su creación a mediados del siglo XX, la teoría de categorías. Se trata de una ciencia cuya primera impresión lleva a pensarla como un lenguaje universal y sintético para la matemática, que permite verla de una forma esencialmente distinta pues cambia el lenguaje interno, analítico, atomista de la teoría de conjuntos por un lenguaje externo, sintético, libre. La teoría de categorías no mira lo que hay dentro de los objetos sino analiza las relaciones entre los mismos, de ahí que ella se refiera a todo lo que pueda expresarse con flechas. La libertad del lenguaje sintético hace ver relaciones y similitudes entre conceptos que con la visión conjuntista ni siquiera eran pensadas, lo cual se ha comprobado de manera efectiva en varios casos concretos. Por ejemplo, se han construido sendas categorías que constituyen modelos para la independencia del axioma de elección, para la independencia de la hipótesis del continuo, para la topología intuicionista (todas las funciones reales son continuas) y para el cálculo lambda. (Véase **Mac Lane and Moerdijk** 1992.)

Entre las categorías en las cuales pueden construirse los números reales, existen algunas donde la construcción que simula las cortaduras de Dedekind y la que generaliza las sucesiones de Cauchy arrojan objetos no isomorfos. Ese hecho sorprendente demuestra que estas dos construcciones son esencialmente distintas, si bien en la teoría de conjuntos clásica dan el mismo resultado porque allí sólo existe un campo ordenado y completo. (Véase **Johnstone** 1977.)

De esta manera, demostrar con la teoría de categorías la diferencia esencial entre las axiomatizaciones de los números naturales dadas por Peirce y Peano consistiría en encontrar alguna categoría en las cuales los "objetos números naturales" correspondientes no son isomorfos. Para lo cual se plantea el problema preliminar de traducir al lenguaje de la teoría de categorías –al lenguaje de flechas–los dos sistemas axiomáticos.

Traducir la axiomatización de Peirce al lenguaje de las categorías parece difícil, de entrada hay dos maneras de considerar una relación: como subobjeto del producto cartesiano o como una clase de equivalencia de un par mónico de morfismos. Por el contrario, la axiomatización de Peano fue traducida al lenguaje categórico de manera en extremo elegante por *William Lawvere*. (Véase **Freyd and Scedrov** 1990, **Lawvere** 1964.)

4.2 La axiomatización de Lawvere.

La traducción al lenguaje categórico de los axiomas de Peano puede considerarse una nueva axiomatización de la aritmética, que se presenta a continuación sin más preámbulos.

Números Naturales.

Términos:
Un conjunto, $\mathbb{N}$; una función, s, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$; una constante, 1, en $\mathbb{N}$. *Axioma:* Para cualquier conjunto X con una función f de X en X y una constante a en X, existe una única función s de $\mathbb{N}$ en X tal que

- $s(1) = a$
- $ss = fs$ (funciones compuestas)

Un elemento de X puede verse como una función de T en X siendo T un conjunto unitario. Luego la axiomatización puede presentarse con el siguiente diagrama de flechas, que evidencia la traducción categórica.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dd, dashed, "S"] & N \arrow[dd, dashed, "S"] \\
T \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "a"'] & & \\
 & X \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Una función de $\mathbb{N}$ en X suele llamarse una sucesión en X y sus imágenes se denotan s_n. Con esta terminología, el axioma de *Lawvere* toma la forma siguiente.

Para cualquier conjunto X con una función f de X en X y una constante a en X, existe una única sucesión sn en X tal que

- $s_1 = a$
- $s_{n+1} = f(s_n)$

Se trata de la sucesión $(a, f(a), f(f(a)), ...)$ que se usa, por ejemplo, en espacios métricos para probar que toda función contractiva en un espacio completo tiene un punto fijo, y en teoría del caos para ejemplificar este caótico fenómeno.

De los axiomas de Peano al de Lawvere se pasa fácil, demostrando –por inducción, claro está–la existencia y unicidad de la sucesión. Al revés, probar los axiomas de Peano a partir del único axioma de Lawvere es un poco más complejo pero resulta una prueba elegante, muy típica del pensamiento con flechas. (Véase **Mac Lane and Birkhoff** 1970.)

Bibliografía.

[1] Campos, Alberto 1994 *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, editor: Alberto Campos, Bogotá.

[2] Dedekind, Richard 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig.

[3] Freyd, Peter J. and Andre Scedrov 1990 *Categories, Allegories*, North–Holland, Amsterdam.

[4] García, Mireya, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra 2001

[5] Simetría y Lógica: La Notación de Peirce para los 16 Conectivos Binarios, Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1 –26.

[6] Grassmann, Hermann 1861 *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*. Eslin, Berlin.

[7] Grattan–Guinness, Ivor 1992 *Peirce: entre la lógica y las matemáticas*, Mathesis 8, 55 –72.

[8] Johnstone, P. T. 1977 *Topos Theory*, Academic Press, London.

[9] Lawvere, F. William 1964 *An Elementary Theory of the Category of Sets*, Proc. Nat. Acad. Sci. 52, 1506 –1511.

[10] Levy, Stephen H. 1997 *Peirce's Theoremic/Corollarial Distinction and the Interconnections Between Mathematics and Logic*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 85 –110.

[11] Mac Lane, Saunders and Garrett Birkhoff 1970 Algebra, Macmillan, London.

[12] Mac Lane, Saunders and Ieke Moerdijk 1992 *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag, New York.

[13] Oostra, Arnold 1991 *La Topología del Orden y el Conjunto Ordenado de Cantor*, Tesis (Matemático), Universidad Nacional de Colombia.

[14] 2000 *Acercamiento lógico a Peirce*, Boletín de Matemáticas –Nueva Serie VII, 60 –77.

[15] Peano, Giuseppe 1889 *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, Bocca, Turin.

[16] Peirce, Benjamin 1870 *Linear Associative Algebra*, private edition, Washington, D.C. Reprinted in: American Journal of Mathematics 4, 97 –229.

[17] Peirce, Charles S. 1878 *How to Make Our Ideas Clear*, Popular Science Monthly 12, 286 –302.

[18] 1881 *On the Logic of Number*, American Journal of Mathematics 4, 85 –95.

[19] Shields, Paul 1981 *Charles S. Peirce on the Logic of Number*, Ph. D. Dissertation, Fordham University, New York.

[20] 1997 *Peirce's Axiomatization of Arithmetic*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis, 43 –52.

[21] Thibaud, Pierre 1982 *La Lógica de Charles Sanders Peirce*, Paraninfo, Madrid.

[22] Willard, Stephen 1970 *General Topology*, Addison–Wesley, Reading (Massachusetts).

[23] Zalamea, Fernando 1993 *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*, Mathesis 9, 391 –404.

[24] 1997 *Lógica Topológica: Una Introducción a los Gráficos Existenciales de Peirce*, XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

[25] 2001 *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá.

Sitios en Internet.

http://members.door.net/arisbe/arisbe.htm Principal sitio de estudios peirceanos.
http://www.iupui.edu/ peirce/web/index.htm Sitio de la edición completa.
http://www.unav.es/gep/ Mayor sitio peirceano en español.

Arnold Oostra Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, A A 546, Ibagué, COLOMBIA oostra@bunde.tolinet.com.co