ESTRUCTURAS VISIBLES EN LOS NUMEROS PERFECTOS Y π

Agustín Moreno C.
Universidad Nacional de Colombia.

1 Introducción.

En el siglo XVIII, Gottfried Wilhem Leibniz preguntó en una carta a los hermanos Bernoulli si podría existir un patrón en la expanción binaria de π. Tres siglos después esta pregunta continúa aún sin responderse.

El objetivo de este artículo es el de mostrar diferentes técnicas visuales a partir del uso del computador, por ejemplo, para obtener patrones ya sean numéricos o geométricos.

En un artículo reciente Borwein y Jörgenson[1], estudiaron la posibilidad de obtener patrones visuales en números tales como π, e, 22/7, 1/65 537 y otros mediante el uso de técnicas computacionales observaron que las imágenes que proporcionan los dígitos en el número π corroboran el hecho de que estos aparecen aleatoriamente, ofreciéndonos a primera vista una "masa confusa de puntos", parafraseando al matemático Jacques Hadamard(1865-1963) cuando describió sus pensamientos iniciales en la demostración de que había un número primo mayor que 11[2,p.76].

Exploremos en este artículo técnicas parecidas al procesamiento digital de imágenes (por ejemplo reconocimiento de bordes e imágenes ambiguas). Para obtener cierto patrón en los dígitos de los números perfectos y π, mostraremos patrones geométricos obtenidos por computador, que los griegos ya habían propuesto como instrumento de representación de los números naturales y que denominaron Chrizodes.

2 El número Pi (π) y los números perfectos.

Definición 2.1. Un número perfecto es aquel que puede obtenerse sumando todos sus divisores excepto él mismo.

Son números perfectos: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056 y todo número que pueda escribirse en la forma

$$p_n = 2^{n-1}(2^n - 1) \text{ con } 2^n - 1 \text{ primo}$$

Primos de la forma $2^n - 1$(conocidos como primos de Mersenne).
Entre los primeros 6172 dígitos de los primeros números perfectos observamos

Dígito	**Frecuencia**
0	609
1	569
2	611
3	638
4	636
5	648
6	636
7	609
8	615
9	601

hasta la fecha se conocen 38 números perfectos siendo $p_{38} = 2^{6972593-1}(2^{6972593} - 1)$ con 4.197.919 cifras descubierta por Hajratwala, Woltman, Kurowski.
La conjetura sobre si hay una infinidad de números perfectos aún continúa abierta y está ligada a la conjetura de si existen infinitos número de Mersenne.
Los primeros 100 dígitos de π son:
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230
781640628620899862803482553

En los primeros 6´000.000.000 observamos

Dígito	**Frecuencia**
0	59963005
1	600033260
2	599999169
3	3600000243
4	599957439
5	5600017176
6	600016588
7	600009044
8	599987038
9	600017038

La fracción más usada para obtener aproximaciones de π es $22/7$ la cual tiene una efectividad del 0.04025%. Los dígitos tanto de los números perfectos como los de π aparecen aleatoriamente [2] y [3]. La expansión binaria de π para los primeros dígitos es:

11.0010010000111111011010101000100010000101101000110000100011010011

La fórmula de Ramanujan para obtener π y que adiciona 8 decimales cada término es

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right]$$

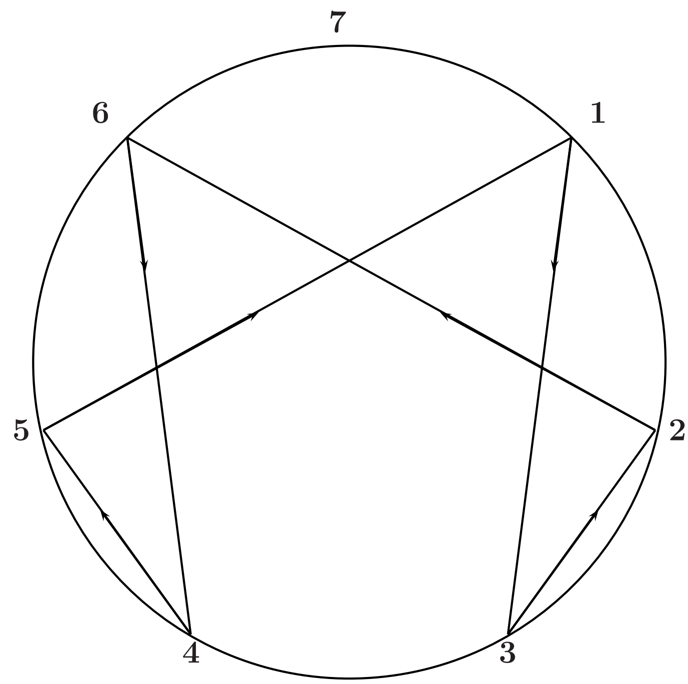
Las figuras 1 y 2 muestran como aparecen los dígitos de π y $22/7$ en un mapa de bits obtenido con primeros 1000 digitos y que muestran la aleatoriedad de su aparición en π más no en $22/7$.

Miles de páginas se han escrito sobre los números perfectos y el número π mostrando muchas de las características de éstos números[3].

3 Patrones Geométricos. Chrizodes.

Definición 3.1. El términos Chrizode viene Chrizo y Zoide que significa una escritura dorada en un círculo. Concretamente los Chrizodes son modelos gráficos de fenómenos conectados a las congruencias aritméticas. Solo tenemos que usar un círculo ó anillo graduado como un reloj, en el cual la serie de números obtenidapor multiplicaciones, divisiones o potencias son representadas por líneas y sus puntos de intersección.

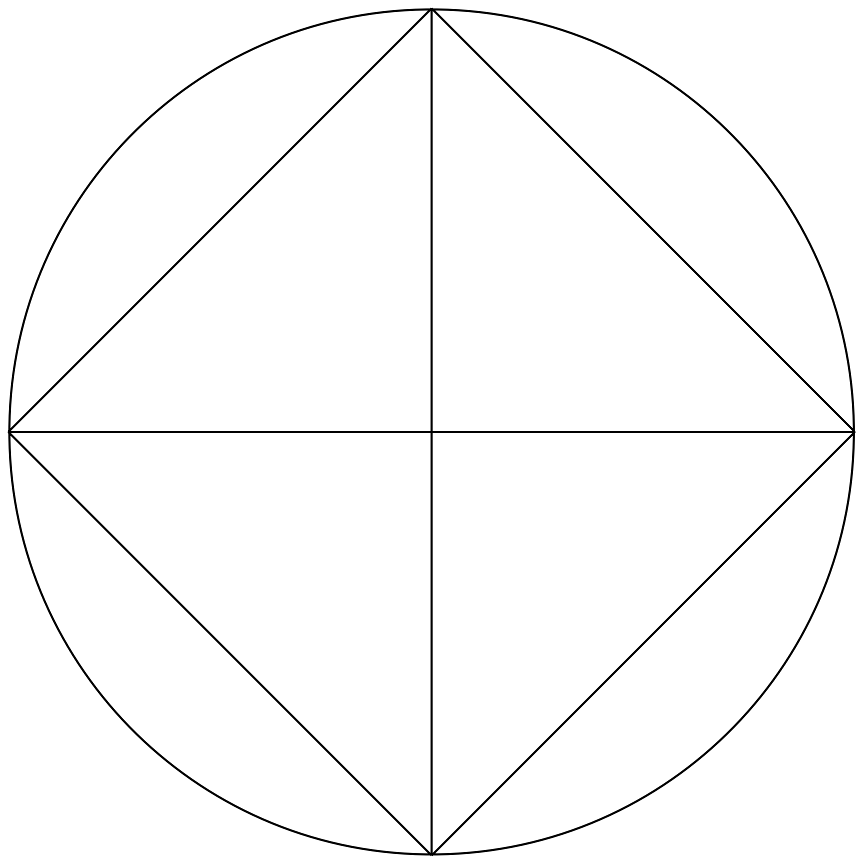
Ejemplo:(Multiplicación por 3 en el número 7, ($3n$ mod(71)))



1, 3, 9, 27, etc. Se representa dibujando un círculo con N=7 puntos equidistantes numerados desde 1 hasta N. Luego simplemente conectamos los puntos definidos con las líneas acorde al valor de los términos de la serie módulo 7. Ejemplo:(9 se conecta con 2 pues 9-7=2).

Para representar la multiplicación por 3, conectamos con líneas cada número a su triple en un círculo con N puntos, observe la figura(1 conectado con 3, 2 con 6, etc).

Si se quiere representar un número basta elegir tantos puntos equidistantes en el círculo, como el número indique y luego se procede a conectar todos estos puntos. Ejemplo:



4 Los números 1, 2, 3 y 4.

Los Chrizodes tienen múltiples aplicaciones entre ellas en el arte y la arquitectura artistas como Durero los usaron como fuente de inspiración para su obra(ver la figura abajo).

5 Los arquitectos góticos los usaron para orlar catedrales.

En tiempos recientes los Chrizodes han sido usados para modelar la difracción de la luz en un cristal, por ejemplo, el Chrizode obtenido al observar los cortes de líneas y puntos de los números pentagonales, coincide con la forma en la que se refracta la luz en el cristal de Rubisco(Observe la figura) esta técnica se usa frecuentemente en Radiocristalografía.

Al final del artículo ofrecemos una lista de operaciones representadas en forma de Chrizode.
Los primos de Gauss y Eisenstein(Irreducibles de la forma $n + im$ y $n + iw$, con $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$) ofrecen patrones geométricos muy utilizados, por ejemplo,

en el diseño textil(observe la figura).

En la que se describen primos de esta clase con $|n + im| = n^2 + m^2 < 100$

6 Imágenes en π y los números perfectos.

Borwien y Loki Jörgenson[1] describieron los primeros 1600 dígitod decimales de π Pixelando un cuadro de(40x40) siendo los números pares Pixeles blancos y los números impares Pixeles negros. En [3] Moreno y Gómez describieron parcialmente una técnica para obtener una imagen de un mapa de bits obtenido a partir de las cifras de un número dado; describamos dicha técnica más en detalle y observemos algunos resultados.

1. Dada una lista de números naturales(en nuestro caso las cifras de los números perfectos o π) sume las cifras hasta obtener dos bloques adyacentes de cifras que sumen un número menor o igual que 100, dichos bloques no pueden constar de más de 10 cifras.

2. En el caso en el que se obtenga el número límite de 10 cifras en un bloque utilícelas comenzando desde la novena para volver a sumar considerándose estos números parte del segundo bloque que representa la suma en los números del primer bloque(esto más tarde significará que

una imagen se sobrepondrá a otra produciendo imágenes ambiguas que luego deben separarse).

3. Construimos un mapa de bits en el que los Pixeles en negro indican el primer bloque de un número cuya suma se obtiene de los Pixeles en blanco que representan cada una de las cifras del segundo bloque descrito en el paso 1.

4. Extraemos las imágenes, usando una técnica de procesamiento digital de imágenes conocida como Detección de bordes(en nuestro trabajo realizamos esta labor mecánicamente).

5. El proceso mismo muestra que la suma en un bloque de cifras de los números perfectos o π sea aleatoria lo que a primera vista haría pensar sobre la aleatoriedad de las imágenes que aparecerrían, lo cual en este caso no ocurre, lo observado a diferencia de lo comentado en el primer parágrafo son tres características de los cuerpos considerados bellos(patrón, simetría y proporción).

   Patrón: Pues hay una imagen que aparece representando un bloque de cifras de los números escogidos aleatoriamente.

   Simetría: La que poseen las imágenes que son objetos de la naturaleza.

   Proporción: Una representación forma parte de otra similar y de tamaño diferente.

   El patrón obtenido depende del tamaño de los Pixeles, para que la imágen no sea difusa, los arreglos se incrementarán o disminuirán dando un tamaño a cada Pixel de la forma $\frac{1}{2''}$

6. La información obtenida de las cifras de los números perfectos es semejante(no igual) a la obtenida de las cifras del número π.

Ejemplo del punto 1.

$\boxed{\mathbf{5\ 4}}\ \mathbf{9}$

Bloque 1

Ejemplo del punto 2.

$\mathbf{5}\ \boxed{\mathbf{4}}\boxed{\mathbf{2\ \ 3}}$

Número compartido

Al final del artículo presentamos varios ejemplos representando mil cifras iniciales de los números perfectos, luego se eligieron cfras aleatorias en los perfectos(31, 32, 34, 38) para hacerles un tratamiento homogéneo. El resultado una vez concatenados todos los bloques tratados coincide con la información gráfica obtenida de 2'000.000 de cifras de π.

7 Conclusiones.

La consecución de patrones geométricos se hace mucho más eficiente si usamos herramientas computacionales. En el caso de la obtención de Chrizodes, dependemos de la capacidad del computador para incrementar el número de puntos y líneas que pueden ser graficadas en la pantalla.

Todo número puede verse como un mensaje visual que posee varias características entre otras las siguientes:

1. Confiabilidad: Debido a su representación única cada uno transmite diferente información.

2. Redundancia: A cada número puede añadírsele o disminuírsele una cierta cantidad de dígitos sin que la información ofrecida por él cambia ostensiblemente.

3. Se requiere un mínimo de 1000 cifras para empezar a obtener información visual de una lista de números finitud. Debido al procedimiento usado para extraer la información.

4. Los números con un número finito de cifras pueden ser estudiados como aquellos con una infinidad de cifras(pues la forma de obtener las sumas de una lista de números puede llegar a ser mucho mayor que el número de cifras que están siendo sumadas.)

5. Ambigüedad: Siempre aparecen varias imágenes traslapadas en una pequeña zona del mapa debido a que el procedimiento admite tales traslapos desde el comienzo, y a la redundancia incluida en el mensaje.

   Aun cuando se traten los números como mensajes visuales y estos posean problemas como los de tipo 5 éstos mensajes aparecen coherentes, simétricos y proporcionales por lo que es claro que dígito a dígito, π y los números perfectos poseen cifras aleatorias, no es dígito a dígito en donde debe buscarse un patrón ya que no lo habrá sino en la información visual que ellos ofrecen una vez puestos en mapas de bits adecuados.

Apendice A.

Representación chrizoidal de algunas operaciones aritméticas

Apendice B.

Información gráfica óbtenida en los primeros 1600 dígitos de π y los números perfectos.

Primeros 1600 dígitos decimales de π módulo 2.

Los pixeles negros representan los números pares y los blancos impares, note la aparente aleatoriedad de su aparición

Apéndice C.

El genoma humano es parecido en un 99.8% al genoma de cualquier otra especie primate sobre la tierra, por lo que se diferencian en cadenas de polímeros un pequeña permutación en la cadena de A.D.N implicará inmediatamente un cambio de organismo.

De la misma manera los números perfectos ofrecen su información, toda las especies animales pueden ser obtenidas por medio de procesamiento de imágenes compartiendo un mismo espacio como lo hace su A.D.N pero una permutación de las cifras o un distinto punto de vista implicará la recuperación por medio del proceso de un nuevo organismo o animal.

A continuación mostramos el tratamiento de las primeras 1600 cifras de los números perfectos. Se muestran 5 imágenes obtenidas de una permutación de tales cifras si se cambia la orientación de la imagen otra especie animal deverá ser observada. Observe la forma de hélice semejando la cadena de A.D.N en la primera figura.

Esto explica la aparente aleatoriedad en la aparación de las cifras de los números perfectos, puesto que nos ofrecen información distinta en cada tramo de los dígitos, pero cada uno de estos tramos constituirá una única especie animal.

Bibliografía.

[1] Peter, Borwein and Loki Jörgenson, *Visible Mathematical Society*, December 2001

[2] A.T Bharucha -Reid and M. Samband Ham, *Random Polynomials*, Academic Press, Orlando, Fl, 1986.

[3] Gómez, Moreno, *Los Números Perfectos Memorias XVI Coloquio Distrital de Matemáticas*, Diciembre 1999.

[4] J. Voelcker, *Picturing Randomnes, IEEE Spectrum 8*,(1988)13-16.